新课程

解题方法

CHAOJI BAODIAN

超级宝典

掌握 **一种** 解题方法

比做 **一百道** 题更重要

高一年级数学

主编　康宇

山西教育出版社

新课程

解题方法超级宝典

XINKECHENGJIETIFANGFACHAOJIBAODIAN

高一年级 数学

主　编　康　宇
作　者　康　宇　吴扬华　王　晖　张艳萍
　　　　龙新军　黄发春　温文仁

山西教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

新课程解题方法超级宝典．高中一年级数学/李殿起主编．—太原：山西教育出版社，2006．9
ISBN　7-5440-3178-0
Ⅰ．新…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学课-高中-解题　Ⅳ．G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 043945 号

新课程解题方法超级宝典．高中一年级数学

责任编辑　康　健
助理编辑　席鑫宁
复　　审　王佩琼
终　　审　张金柱
装帧设计　王耀斌
印装监制　贾永胜

出版发行　山西教育出版社（太原市水西门街庙前小区 8 号楼）
印　　装　太原市新华胶印厂
开　　本　790×960　1/16
印　　张　25.25
字　　数　526 千字
版　　次　2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月山西第 1 次印刷
印　　数　1—5000 册
书　　号　ISBN　7-5440-3178-0/G·2879
定　　价　29.00 元

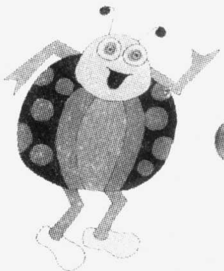
《新课程解题方法超级宝典》系列图书

读者编者作者交流互动平台

非常感谢您选择和使用《新课程解题方法超级宝典》系列图书，为了使本书更加完善，为了使本书能够成为您学习中更加得力的助手，为了能更加周到地为您服务，请将您阅读本书后的感受、意见、想法、建议尽快寄给我们，我们将在下一版的编写出版工作中做进一步的改进，让本书真正成为您学习中的良师益友。

1. 您是怎样得到本书的____：
   A. 自己购买　B. 同学介绍　C. 老师推荐　D. 家人代购

2. 您认为本书的优点在哪里？



3. 您认为本书不足之处是什么？

4. 您从本书中学到了哪些有用的方法？还需要做哪些补充？

5. 在数、理、化的学习中你最需要哪一类的书？

您的反馈是我们的期待，您的建议是我们的宝藏，您的参与对我们很重要！您可以通过以下方式和我们取得联系：

1. 电子邮件：sxjyzjz@ yahoo. com
2. 写信：山西省太原市水西门街庙前小区 8 号楼
   收信人：《新课程解题方法超级宝典》编辑室
   邮编：030002
3. 电话：0351—4729831

出版宣言

我们的口号：掌握1种解题方法比做100道题更重要！

方法是什么?

方法是攀登顶峰时你选择的最佳路径；方法是茫茫大海上引你前行的点点白帆；方法是身陷困境后突然伸出的一只援手；方法是无边沙漠中远处传来的声声驼铃；方法是皓首穷经后的会心一笑；方法是苦思冥想中的恍然大悟；方法是百思千转而获得的关键“巧解”；方法是眉头紧皱涌上心间的锦囊“妙计”……

方法是举一反三，以一当十；方法是以勤补拙，触类旁通；方法是科学高效，事半功倍；方法是以平常的付出，考出能够上北大清华的成绩。方法是你做过三道同类题后的驾轻就熟；方法是你遇到似曾相识时的推己及彼；方法是你拨开杂芜透过现象看到的本质；方法是你题海泛舟得到秘诀和启迪的片刻轻松……

正是基于这样的认识，我们在

全国范围内约请一批富有经验的知名学科老师，从现有教材尤其是新课标教材所呈现的理念内容，知识体系中，从全国数以百计的各类考试状元、竞赛获奖者的学习经验和总结提炼中，从每位老师各自数十年的教学实践和体会感受中，提纯归纳、总结升华、探索规律、凝炼方法，精心编写了这一套“新课程解题方法超级宝典”系列丛书，意在为广大中小学生提供最优质的材料、最精当的训练、最科学的思路、最实用的方法，意在使你付出一倍的汗水，取得十倍的喜悦，花同样的心血，收获骄人的成绩。

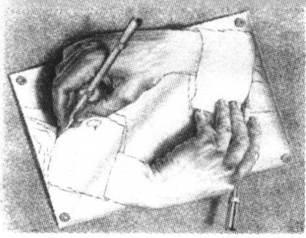
这是我们的一种理想，一种孜孜不倦的追求。究竟能实现多少，还有待广大师生试用检验。**你的建议和意见（书末附有专纸奉候）**，我们将视为珍宝，并将在以后的修订中进一步吸收消化，完善提高。你的关注和参与，将会给我们带来新的希望和动力。在你成长求知的过程中，愿我们的这本书能成为你学习路上的好伙伴，在你实现人生理想的奋斗中，愿我们的这本书能为你留下一段值得回味的美好记忆。

编委会

JIETI FANGFA

目录

目录



第一章　集合与简易逻辑

整体感悟

本章是高中数学的入门，它包括集合与简易逻辑两部分. 第一部分内容包括集合的有关概念、集合的表示方法和集合的补、并、交集的运算，并且考虑到后续学习的需要，研究了绝对值不等式和一元二次不等式的解法；第二部分首先介绍了命题和含有逻辑联结词“或”、“且”、“非”的三种复合命题的意义及判断它们真、假的方法，然后讲述了四种命题及其相互关系，介绍了反证法，通过实例介绍了充分条件、必要条件、充要条件等有关知识.

正确理解集合的概念和复合命题三种形式的构成是学好本章的关键. 集合思想尤其是补集思想，是本章最基本的数学思想，例如用集合的语言表述数学问题，用集合的观点研究解决数学问题；转化与化归思想是本章另一个基本的数学思想，绝对值不等式和一元二次不等式的解法就体现了这种数学思想；数形结合思想在本章也有所运用，例如利用文氏图表示集合，借助数轴求不等式的解集；在解含参数的集合与不等式的数学问题中，也用到分类讨论的数学思想.

本章用到的思维方法有：抽象与概括、特殊与一般、分析与综合及常见的逻辑方法；思维形式有：发散思维、聚合思维和逆向思维.

§1.1　集　　合

典例精析

例1　考察下列各组对象能否构成一个集合？若能构成集合，指出它是无限集、有限集还是空集.

(1)著名的人；　(2)不小于2005，不大于2010的整数；　(3)方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的实根；

(4)在直角坐标系中，横坐标与纵坐标相等的所有点.

思维互动

思路>>判断一个对象能否构成一个集合，关键看其元素是否“确定”；判断是有限集、无限集还是空

集,要看其元素的个数是有限个、无限个还是不含任何元素.

解析>>(1)不构成一个集合.因为“著名的人”无明确的划分标志,对于某个人是否“著名”无法客观地判断.

(2)构成一个集合.因为不小于2005,不大于2010的实数x满足$2005\leqslant x\leqslant 2010$,其中的整数有2005,2006,2007,2008,2009,2010.任何一个整数可以明确地判断是不是这个范围的数.它是有限集,因为它含有6个元素.

(3)构成一个集合.因为方程$x^2-x+\frac{1}{2}=0$的根的判别式$\Delta=(-1)^2-4\times1\times\frac{1}{2}=-1<0$,所以这个方程没有实根,这个集合是空集.

(4)构成一个集合.因为平面直角坐标系中的任何一个点可以明确地判断它的横、纵坐标是否相等.这个集合是无限集.因为横纵坐标相等的点有无限个.

思维迁移

1.对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的,互异的,无序的.这是集合元素的三个特征.

(1)“确定性”是指对于一个给定的集合,任何一个对象或者是集合中的一个元素,或者不是它的元素,两者必居其一.它是判断能否构成一个集合的关键.

(2)“互异性”是指集合中的任何两个元素是互不相同的,两个相同的对象在同一集合中,只能看作一个元素.

(3)“无序性”是指在一个集合中,通常不考虑元素之间的顺序.例如:$\{1,2,3\}$,$\{2,3,1\}$与$\{3,2,1\}$均表示同一集合.

2.集合的分类:含有有限个元素的集合叫有限集;含有无限个元素的集合叫无限集;不含任何元素的集合叫空集.空集用$\varnothing$来表示,只含一个元素的集合也叫单元素集.注意:$\{0\}$,$\varnothing$,$\{\varnothing\}$是有区别的.

思维体验

1.下列四个条件:①不超过π的正有理数;②个子高的学生;③算术平方根等于它自身的数;④《水浒传》中的108将.其中能够构成集合的是 ( )

A.①②③ B.①③④ C.②③④ D.①②④

答案>>B

2.第1题中的集合,其中有限集是________,无限集是________.

答案>>③④ ①

例2 用适当的方法表示下列集合:

(1)正奇数集; (2)大于3小于10的整数组成的集; (3)方程$ax^2+bx+c=0$的解集;

(4)平面直角坐标系中第二象限的点集.

思维互动

思路>>弄清集合的元素是什么,再选择适当的方法.

解析>>(1)$\{$正奇数$\}=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$.

(2) $\{$大于 3 小于 10 的整数$\} = \{x \mid 3 < x < 10, x \in \mathbf{N}\} = \{4,5,6,7,8,9\}$.

(3) $\{x \mid ax^2 + bx + c = 0\}$.

(4) $\{(x,y) \mid x < 0$, 且 $y > 0\}$.

思维迁移

1. 集合的表示方法有：列举法、描述法、图示法、特殊字母表示法等. 列举法和描述法各有优点，应根据具体的问题选取适当的方法. 有的集合可以用多种方法表示，而有的只能用其中的某种方法. 一般情况下，无限集不宜用列举法.

2. 描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法. 使用描述法时，应注意如下问题：①写清楚集合中元素的代号；②说明该集合中元素的性质；③不能出现未被说明的字母；④多层描述时，应当准确使用“且”、“或”等词语；⑤所有字母的内容都应写在大括号内；⑥描述的语句、符号力求简明、确切.

3. 常用的数集和空集用特定字母来表示，不能再加大括号和用其他字母.

思维体验

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid y = x^2 - 1, x < 5, x \in \mathbf{N}\}$；　(2) $\{y \mid y = x^2 - 1, x < 5, x \in \mathbf{N}\}$；

(3) $\{(x,y) \mid y = x^2 - 1, x < 5, x \in \mathbf{N}\}$.

答案 >>1. (1) $\{0,1,2,3,4\}$.　(2) $\{-1,0,3,8,15\}$.

(3) $\{(0,-1),(1,0),(2,3),(3,8),(4,15)\}$.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 由 4 和 6 的所有公倍数组成的集合；　(2) $\{1,-3,5,-9,\cdots,19\}$.

答案 >>2. (1) $\{x \mid x$ 是 4 与 6 的公倍数$\} = \{x \mid x = 4k$, 且 $x = 6k, k \in \mathbf{N}^*\} = \{x \mid x = 12k, k \in \mathbf{N}^*\}$.

(2) $\{x \mid x = (-1)^n(2n+1), n \in \mathbf{N}\}$.

例 3 设集合 $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x \mid x = 4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, 又有 $a \in A, b \in B$, 判断元素 $a+b$ 与集合 A,B,C 的关系.

思维互动

思路 >> 根据集合 A,B,C 的元素特点，通过变换来判断.

解析 >> $\because$　$a \in A, b \in B$, $\therefore$　$a = 2k, k \in \mathbf{Z}$; $b = 2k' + 1, k' \in \mathbf{Z}$, $\therefore$　$a + b = 2(k + k') + 1, k, k' \in \mathbf{Z}$, $\therefore$　有 $a + b \notin A$. $a + b \in B$. 当 $k + k'$ 为奇数时, $a + b \notin C$; 当 $a + b$ 为偶数时, $a + b \in C$.

思维迁移

1. 元素与集合的关系是“$\in$”或“$\notin$”关系，若 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$；若 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$.

2. 在判断元素与集合的关系时，既要明确集合的意义，又要分析集合中元素的特点，不能被问题的表象所迷惑. 例如本题容易产生如下误解：$\because$　$a \in A, b \in B$, $\therefore$　$a = 2k, b = 2k+1, (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore$　$a + b = 4k + 1 (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore$　$a + b \notin A, a + b \notin B, a + b \in C$.

思维体验★

已知$A=\{x|x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$,若$a\in A,b\in B,c\in C$,则（　　）

A. $ab\in A,bc\in B,ca\in C$　　B. $ab\in A,bc\in C,ca\in A$

C. $ab\in B,bc\in C,ca\in A$　　D. $ab\in B,bc\in A,ca\in B$

答案>>B　提示:设$a=3n,b=3m+1,c=3s+2,n,m,s\in\mathbf{Z}$. 则

$ab=3n(3m+1)=3(3mn+n)\in A$;

$bc=(3m+1)(3s+2)=9ms+6m+3s+2=3(3ms+2m+s)+2\in C$;

$ca=3n(3s+2)=3(3ns+2n)\in A$.

例1　(2005·北京春招)含有三个实数的集合既可以表示为$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可以表示为$\{a^2,a+b,0\}$,求$a^{2004}+b^{2005}$的值.

思维互动

思路>>利用集合中元素的互异性,分情况讨论求出a,b的值.

解析>>依题意,有$a\neq0$. 则$b=0$. 则$\begin{cases}a^2=1,\\a\neq1,\end{cases}$解得　$a=-1$,

$\therefore\quad a^{2004}+b^{2005}=(-1)^{2004}+0^{2005}=1$.

思维迁移

两个非空集合是否相同,就是要看它们的元素是否完全相同,当然元素的顺序可以不同. 如果给出的两个集合相同,求字母的取值时,务必考虑元素的互异性.

思维体验★

若集合$\{a,a+d,a+2d\}$与集合$\{a,aq,aq^2\}$表示同一集合,求q的值.

答案>>$q=-\frac{1}{2}$　提示:分两种情况讨论求解.

(1)若$\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=a(q-1),\\2d=a(q^2-1).\end{cases}$ $\because$　集合元素是互异的,$\therefore\quad a\neq aq$,$\therefore\quad a\neq0$,且$q\neq1$,

$\therefore\quad q+1=2\Rightarrow q=1$,与$q\neq1$相矛盾.

(2)若$\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=a(q^2-1),\\2d=a(q-1).\end{cases}$又$\because\quad a\neq0$,且$q\neq1$,$\therefore\quad\frac{1}{2}=q+1$,$\therefore\quad q=-\frac{1}{2}$符合题意.

例2　已知$A=\left\{x\in\mathbf{N}\left|\frac{12}{x+3}\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,$B=\left\{\frac{12}{x+3}\in\mathbf{Z}\,\middle|\,x\in\mathbf{N}\right\}$.试用列举法表示集合$A,B$.

思维互动

思路>>首先区分这两个集合的差别,代表元素是什么,然后找出集合中的元素,把它们无重复、无遗漏地一一列出来.

解析>>由 $x\in\mathbf{N}$,$\frac{12}{x+3}\in\mathbf{Z}$,可知当 $x=0,1,3,9$ 时,$\frac{12}{x+3}=4,3,2,1$. 而 A 以 x 为元素,∴　$A=\{0,1,3,9\}$;B 以$\frac{12}{x+3}$为元素,∴　$B=\{1,2,3,4\}$.

思维迁移

用描述法表示的集合中元素与元素的特征要区别开来. 一般地,元素位于竖线左侧,元素的特征位于竖线的右侧.

思维体验

已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{9}{10-x}\in\mathbf{N}\right\}$,$B=\left\{\frac{9}{10-x}\in\mathbf{N}\,|\,x\in\mathbf{N}\right\}$. 问集合 A 与 B 共有几个相同元素,并写出由这些"相同"元素组成的集合.

答案>>2 个,$\{1,9\}$　提示:∵　$A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{9}{10-x}\in\mathbf{N}\right\}=\{1,7,9\}$,$B=\left\{\frac{9}{10-x}\in\mathbf{N}\,|\,x\in\mathbf{N}\right\}=\{9,3,1\}$,∴　A、B 有两个"相同"元素,这些"相同"元素组成的集合为$\{1,9\}$.

例 6　已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,ax^2-3x+2=0\}$.

(1)若 $A=\varnothing$,求实数 a 的取值范围;　(2)若 A 是单元素集,求实数 a 的值及集合 A;

(3)求集合 $P=\{a\in\mathbf{R}\,|\,a$ 使得 $A\neq\varnothing\}$.

思维互动

思路>>集合 A 为方程 $ax^2-3x+2=0$ 的解集,即(1)(2)(3)分别转化为方程无实根,仅有一个实根,及有根时 a 的取值范围.

解析>>(1)$A=\varnothing$,即方程 $ax^2-3x+2=0$ 无实根. 若 $a=0$,方程有一个实根 $x=\frac{2}{3}$,∴　$a\neq0$,

∴　$\Delta=9-8a<0$,即 $a>\frac{9}{8}$.

故 $A=\varnothing$ 时,a 的取值范围是 $a>\frac{9}{8}$.

(2)∵　当 $a=0$ 时,由(1)可知 $x=\frac{2}{3}$,∴　$A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$符合题意;当 $a\neq0$ 时,要使方程有两个相等的实根,则 $\Delta=9-8a=0$,即 $a=\frac{9}{8}$,此时 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

综上所述,当 $a=0$ 时,$A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$;当 $a=\frac{9}{8}$时,$A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

(3)由(1)可知,当 $a=0$ 时,$A=\left\{\frac{2}{3}\right\}\neq\varnothing$;

当 $a\neq0$ 时,要使方程有实根,则 $\Delta=9-8a\geqslant0$,即 $a\leqslant\frac{9}{8}$,

∴　$P=\{a\in\mathbf{R}\,|\,a$ 使得 $A\neq\varnothing\}=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{9}{8}\right\}$.

思维迁移

集合语言较为抽象，在理解集合含义的同时，要学会将集合语言转化成相应的代数语言，这是一个重要的数学思想.

思维体验★

已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值及 A； (2)若 A 中只有两个元素，求 a 的取值范围.

答案>>(1)当 $a=0$ 时，$A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$；当 $a=1$ 时，$A=\{-1\}$.

(2)由 $\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 解得 $a<1$，且 $a\neq0$.

例 已知数集 M 满足条件：若 $a\in M$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in M(a\neq\pm1$，且 $a\neq0)$.

(1)若 $3\in M$，试把由此确定的 M 的其他元素全部求出来；

(2)若 $a\in M(a\neq\pm1$，且 $a\neq0)$，试把由此确定的 M 的其他元素全部求出来.

思维互动

思路>>由题目知，如果 $a\in M$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in M$，于是有 $\frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}}\in M,\cdots$，这样就可以找出由 a 确定的 M 中的其他元素.

解析>>(1)$\because\ 3\in M$，$\therefore\ \frac{1+3}{1-3}=-2\in M$. 由 $-2\in M$，知 $\frac{1+(-2)}{1-(-2)}=-\frac{1}{3}\in M$；由 $-\frac{1}{3}\in M$，知 $\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{2}\in M$；由 $\frac{1}{2}\in M$，知 $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\in M$，再往下操作便出现循环，

$\therefore$ 若 $3\in M$，则 $-2,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\in M$.

(2)若 $a\in M(a\neq\pm1$，且 $a\neq0)$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in M$. 由 $\frac{1+a}{1-a}\in M$，知 $\frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}}=-\frac{1}{a}\in M$；由 $-\frac{1}{a}\in M$，知 $\frac{1+\left(-\frac{1}{a}\right)}{1-\left(-\frac{1}{a}\right)}=\frac{a-1}{a+1}\in M$；由 $\frac{a-1}{a+1}\in M$，知 $\frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}}=a\in M$，再往下操作便出现循环，

$\therefore$ 若 $a\in M$，则 $\frac{1+a}{1-a},-\frac{1}{a},\frac{a-1}{a+1}\in M$.

思维迁移

解题时要注意角色的转换，反复利用“若 $a\in M$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in M$”的题设.

思维体验

数集 A 满足：$a\in A, a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)若 $2\in A$，试证明 A 中还有另外两个元素，并把这两个元素写出来；

(2)若 $a\in \mathbf{R}$，求证集合 A 不可能是单元素集.

答案>>(1)由 $2\in A$，知 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$；由 $-1\in A$，知 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$；由 $\frac{1}{2}\in A$，知 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$，

$\therefore$ A 中还有两个元素 $-1,\frac{1}{2}$.

(2)假设 A 是单元素集，则必有 $\frac{1}{1-a}=a$，即 $a^2-a+1=0$. $\because$ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$，方程没有实数根，故假设不成立，$\therefore$ A 不可能是单元素集.

实战演练

1. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{a^2-2a+1}{a-1}, a\in\mathbf{Z}, a\neq1\right\}$，若 $x\in A$，则①$x\in\mathbf{N}^*$；②$x\in\mathbf{Z}$；③$x\in\mathbf{Q}$；④$x\in\mathbf{R}$. 其中正确的有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 设集合 $A=\{x|x=(-1)^n, n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{2,4,6,8,\cdots\}$，$C=\{(x,y)|3x+2y=16, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x|1<x<2, x\in\mathbf{Q}\}$，$E=\{$等腰直角三角形$\}$. 其中无限集的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设 x、y、z 均为非零实数，则用列举法将 $\omega=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{|xz|}{xz}+\frac{|yz|}{yz}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的值组成的集合为__________.

4. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$ 中只有一个元素，则 $a=$________.

5. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$，试用列举法表示 A.

6. 已知集合 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，且 $M=N$，求 a,b 的值.

7. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|mx^2-2x+3=0, m\in\mathbf{R}\}$，若 A 中元素至多只有一个，求 m 的取值范围.

8. 集合 M 的元素为自然数，且满足：如果 $x\in M$，则 $8-x\in M$. 试回答下列问题：

(1)写出只有一个元素的集合 M；

(2)写出元素个数为 2 的所有集合 M；

(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个？

提示与答案

1. C 提示：$\because$ $x=\frac{a^2-2a+1}{a-1}=a-1$，又$\because$ $a\in\mathbf{Z}$，且$a\neq 1$，$\therefore$ 有$x\in\mathbf{Z}$，$x\in\mathbf{Q}$，$x\in\mathbf{R}$，故选C.

2. C 提示：$A=\{-1,1\}$，$C=\{(4,2),(2,5),(0,8)\}$为有限集，B、D、E为无限集.

3. $\{-1,7\}$ 提示：当x、y、z全为正值时，$\omega=7$；当x、y、z为两正一负时，$\omega=-1$；当x、y、z为一正两负时，$\omega=-1$；当x、y、z三个均取负值时，$\omega=-1$，故所组成的集合为$\{-1,7\}$.

4. 0或1 提示：当$a=0$时，$x=-\frac{1}{2}$，此时$A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$；当$a\neq 0$时，一元二次方程有两个相等实根，则$a=1$，此时$A=\{-1\}$，故$a=0$，或$a=1$.

5. $\{2,4,5\}$ 提示：由$\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N}$，$x\in\mathbf{N}$，得 $6-x=1,2,4,8$，$\therefore$ $x=5,4,2,-2$，而$x=-2$不合题意，$\therefore$ $A=\{2,4,5\}$.

6. $\begin{cases}a=0,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 提示：根据集合中元素的互异性，有$\begin{cases}a=2a,\\b=b^2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=b^2,\\b=2a.\end{cases}$解方程组，得

$\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}$（舍去），或$\begin{cases}a=0,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

7. $m=0$，或$m\geqslant\frac{1}{3}$ 提示：①当$m=0$时，方程为$-2x+3=0$，$x=\frac{3}{2}$符合题意；②当$m\neq 0$时，则$\Delta=4-12m\leqslant 0$，得 $m\geqslant\frac{1}{3}$.

8. (1)$M=\{4\}$；(2)M为$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$；(3)31个 提示：(1)$\because$ M中只有一个元素，则必须满足$x=8-x$，$\therefore$ $x=4$，故含一个元素的集合$M=\{4\}$.

(2)当M中只含两个元素时，其元素只能是x和$8-x$，从而全部含两个元素的集合M应为$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$.

(3)同样可写出只含有三个元素的集合M有4个，四个元素的集合M有6个，五个元素的集合M有6个，六个元素的集合M有4个，七个元素的集合M有4个，八个元素的集合M仅有1个，九个元素的集合M有1个，故共有31个.

§1.2　子集、全集、补集

典例精析

例1　判断下列各式是否正确,并说明理由:

(1)$2\subseteq\{x|x\leqslant 10\}$;　(2)$2\in\{x|x\leqslant 10\}$;　(3)$\{2\}\subsetneqq\{x|x\leqslant 10\}$;

(4)$\varnothing\in\{x|x\leqslant 10\}$;　(5)$\varnothing\not\subseteq\{x|x\leqslant 10\}$;　(6)$\varnothing\subsetneqq\{x|x\leqslant 10\}$.

思维互动

思路>>正确使用表示元素与集合及集合与集合之间关系的符号.

解析>>(1)不正确.因为数2不是一个集合,所以不能作为某一集合的子集.

(2)正确.因为2是集合$\{x|x\leqslant 10\}$中的元素.

(3)正确.因为$\{2\}$是集合$\{x|x\leqslant 10\}$的真子集.

(4)不正确.因为$\varnothing$是集合,不是集合$\{x|x\leqslant 10\}$的元素.

(5)不正确.因为$\varnothing$是任何非空集合的真子集.

(6)正确.因为空集是任何非空集合的真子集.

思维迁移

1. 元素与集合是属于或不属于关系,用符号"$\in$"或"$\notin$"来表示;集合与集合之间的关系是(真)包含、(真)包含于、或不包含、不包含于的关系,分别用符号($\supsetneqq$)$\supseteq$、($\subsetneqq$)$\subseteq$或$\not\supseteq$、$\not\subseteq$来表示.使用中不能把符号混淆.

2. 空集是不含任何元素的集合,用特定字母$\varnothing$来表示.空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.$\varnothing$与$\{\varnothing\}$是两个不同的概念.$\{\varnothing\}$是以空集$\varnothing$为元素的一个单元素集,可用$\varnothing\in\{\varnothing\}$来表示,同时$\varnothing$又是一个集合,因此也可用$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$来表示.

思维体验★

在以下六个写法中:①$\{0\}\in\{0,1\}$;②$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;③$\{0,-1,1\}\subseteq\{-1,0,1\}$;④$0\in\varnothing$;⑤$\mathbf{Z}=\{\text{整数}\}$;⑥$\{(0,0)\}=\{0\}$.其中正确写法的个数是　(　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

答案>>C　提示:仅②③⑤正确.

例2　已知$M=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$,$P=\{y|y=b^2-6b+10,b\in\mathbf{N}^*\}$,试判断集合$M$与集合$P$的关系.

思维互动

思路>>考察这两个集合的元素即两个表达式的取值是否相同.

解析一>>在集合P中,∵　$y=b^2-6b+10=(b-3)^2+1$,当$b=4,5,6,\cdots$时,与集合M中$a=1,2,3,$