全国成人高考

数学一本通

QUANGUO CHENGREN GAOKAO
SHUXUE YIBENTONG

蔡道法　编著

安　徽
科学技术
出版社

图书在版编目(C I P)数据

全国成人高考数学一本通/蔡道法编著. —合肥:安徽科学技术出版社,2000. 4
ISBN 7-5337-1030-4

Ⅰ. 全…　Ⅱ. 蔡…　Ⅲ. 数学-成人教育:高等教育-解题　Ⅳ. O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02501 号

*

安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路 1 号新闻出版大厦)
邮政编码:230063
电话号码:(0551)2825419
新华书店经销　中国科学技术大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:12.125　字数:347 千
2002 年 7 月第 2 次印刷
印数:6 000
ISBN 7-5337-1030-4/O·34　定价:15.00 元

前　言

成人高等教育是我国高等教育的重要组成部分，由于社会对在职人员学历要求的提高和应届高中毕业生的参与，成人高考报考人数逐年递增。针对在职人员离开中学时间长，复习时间紧；一些应届考生的基础较弱的特点，设计一本适合成人高考使用的数学辅助资料，这就是编写此书的出发点。

本书避免了一些成人高考复习资料中存在的内容过多(学员没有足够时间全部顾及)、过广(面面俱到，体现不出轻重)、过细(将中学教材一一罗列)、过深(脱离成人高考的要求)的缺陷，是一本针对性、实用性极强的成人高考辅导材料。与同类书相比，本书具有如下特点：

1. 按图索骥　从近年的数学成人高考试题分析入手，找出中学教材中的对应知识点，以此来确定、组织编写内容。这样做的好处在于避免盲目性，减少分散性，以考题的轻重来确定复习材料的轻重，做到针对性强、重点突出，从而在有限时间内达到高效率。只有对成人高考题的广度、深度、难度有深入了解，才能去“制伏”这些试题。

2. 对症下药　在了解近年试题的基础上，去研究试题，从知识、技能两个方面进行梳理，找出相应的解题方法，总结出其中的解题规律，有些解题规律及技巧还是教材和其他辅导资料中未曾见到的。通过讲解例题再具体应用这些解题规律，使感性认识与理性认识相结合，从而有效地提高读者的数学解题能力和应试能力。

3. 知其然，更要知其所以然　成人高考题中的客观题(选择题、填空题)共有 105 分，占总分 150 分的 70%。客观试题只知答案是不够的，必须了解解题过程，本书对客观试题均给出解题过程，这是广大考生所需求的。

4. 知己知彼，百战不殆　为了便于读者检验自己对有关知识与解题方法的掌握程度，本书备有自我检查题，附有答案，并对难题给予提

示或略解。

另外说明一点，书中以“cot”表示余切，这是新的表示方法，同时这样表示与余弦的表示方法一致，便于记忆。

在学完这本书之后，完全可以从容应试。祝广大考生考出自己满意的成绩来。

蔡道法

目　　录

试 题 总 体 分 析

为了能做到“知己知彼”，我们需要从宏观上，对数学试题作一个整体分析，了解所考的各部分内容在整个考题中处于怎样的地位，占有多大的份量。这样，在复习时便能“重其所重，轻其所轻”。

下面以表格的形式，列出 1996 年～1999 年成人高考(数学)试题内容分布统计(括号内的数字表示该内容的考题数)。

文史财经类

内容 \ 分数 \ 年份			1996	1997	1998	1999
代数	一	数、式、方程(组)	14(2)	9(1)		10(2)
	二	集　合	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
	三	不等式	5(1)	5(1)	10(2)	5(1)
	四	指数与对数	8(1)	8(1)	5(1)	8(1)
	五	函　数	35(7)	40(8)	38(7)	34(6)
	六	数　列	13(2)	15(2)	14(2)	20(3)
	七	排列、组合	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
三角	一	三角函数、三角函数式的变换	10(2)	15(3)	15(3)	18(3)
	二	图像和性质	10(2)	10(2)	20(3)	5(1)
	三	解三角形	10(1)	5(1)	5(1)	5(1)
解析几何	一	直线	10(2)	10(2)	10(2)	10(2)
	二	圆锥曲线	25(4)	23(3)	23(3)	20(3)
充要条件						5(1)

理工农医类

内容 \ 分数 \ 年份			1996	1997	1998	1999
代数	一	数、式、方程(组)	5(1)	10(2)	5(1)	8(1)
	二	集　合	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
	三	不等式	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
	四	指数与对数				
	五	函　数	28(5)	24(4)	23(4)	15(3)
	六	数　列	13(2)	13(2)	14(2)	14(2)
	七	排列、组合、二项式定理	10(2)	10(2)	10(2)	10(2)
	八	复　数	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
三角	一	三角函数及三角函数式的变换	10(2)	10(2)	13(2)	10(2)
	二	图像和性质	10(2)	13(2)	10(2)	13(2)
	三	反三角函数、简单三角方程	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
	四	解三角形	10(1)		5(1)	
立体几何		直线和平面 多面体和旋转体	15(2)	15(2)	15(2)	15(2)
解析几何	一	直线	5(1)	10(2)	5(1)	10(2)
	二	圆锥曲线	14(2)	15(2)	20(3)	25(4)
	三	参数方程、极坐标	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)
充要条件		充分条件 必要条件 充分必要条件	5(1)	5(1)	5(1)	5(1)

第一章 代　　数

一　数、式、方程(组)

(一) 试题

Ⅰ　选择题

1. 若两数的和为 6，其差的绝对值为 8，则以此两数为根的方程是

(A) $x^2-6x+7=0$;　　(B) $x^2-6x-7=0$;

(C) $x^2+6x-8=0$;　　(D) $x^2+6x+8=0$.

('93・理)

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根为 p 和 q，则 p 和 q 的值为

(A) $p=-1$, $q=-2$;　　(B) $p=1$, $q=-2$ 或 $p=0$, $q=0$;

(C) $p=1$, $q=0$;　　(D) $p=0$, $q=-2$ 或 $p=1$, $q=0$.

('96・理)

3. 关于 x 的方程 $x^2-(2n+3m)x+5m=0$ 的两根之和为 2，两根之积为 -10，则

(A) $m=-2$, $n=4$;　　(B) $m=2$, $n=-4$;

(C) $m=2$, $n=4$;　　(D) $m=-2$, $n=-4$.

('97・理)

4. 关于 x 的方程 $x^2-(2\sin\theta)x-\cos^2\theta=0$

(A) 有两个相等的实根；(B) 没有实根；

(C) 有两个不等的实根； (D) 有无实根不能判定.

('97・理)

5. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2-bx+4=0$ 的两个实根的和与这两个实根的积相等，若它的一个根为 $\frac{1}{4}$，则 a 的值为

(A) -48； (B) 24； (C) 48； (D) -24.

('98・理)

6. 已知关于 x 的方程 $x^2+ax-a=0$ 有两个不等的实根，则

(A) $a<-4$ 或 $a>0$； (B) $a\geqslant 0$；

(C) $-4<a<0$； (D) $a>-4$.

('99・文)

7. 关于 x 的方程 $x^2-(a+3b)x-2b=0$ 的两根之和为 8，两根之积为 -4，则

(A) $a=-2$，$b=-2$； (B) $a=-2$，$b=2$；

(C) $a=2$，$b=-2$； (D) $a=2$，$b=2$.

('99・文)

Ⅱ 解答题

1. 问实数 p 在什么范围内，关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} p+x+y=1 \\ p^2+x^2+y^2=1 \end{cases}$ 有实数解？

('90・理)

2. 已知方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根的倒数是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两个实根，且 $r\neq 0$，求 $\frac{sp}{r}$ 的值.

('95・理)

3. 设实数 a 使得方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个实根 x_1、x_2.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 当 a 取何值时，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 取得最小值，并求出这个最小值.

('96・文)

4. 实数m取何值时，关于x的方程$x^2+(m-2)x-(m+3)=0$的两根的平方和最小？并求出该最小值.

('97・文)

5. 实数a在什么范围时，关于x的二次方程$ax^2+2x+a-2=0$有两个相异的负根？

('99・理)

(二)试题详解

I 选择题

1. 答：(B).

解 设此两数为t_1、t_2，按题意，可知

$$t_1+t_2=6, \quad ①$$

$$|t_1-t_2|=8. \quad ②$$

由②式得 $(t_1-t_2)^2=64$，

即 $(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=64$，将①式代入，

得 $36-4t_1t_2=64$， $t_1t_2=-7$，

由 $t_1+t_2=6$， $t_1t_2=-7$，

可知t_1、t_2是方程$x^2-6x-7=0$的两根. 故选(B).

2. 答：(B).

解 由题意可知

$$\begin{cases} p+q=-p, & ① \\ pq=q. & ② \end{cases}$$

对②式进行讨论

(1) 当$q\neq0$时：两边可约去q，得$p=1$，代入①式，可得$q=-2$；

(2) 当$q=0$时：将$q=0$代入①式，可得$p=0$.

综上，可知$p=1$，$q=-2$或$p=0$，$q=0$. 故选(B).

3. 答：(A).

解 设方程的两根为x_1、x_2，由韦达定理知

$$x_1+x_2=2n+3m, \qquad x_1\cdot x_2=5m.$$

按题意得 $2n+3m=2,$ ①

$5m=-10.$ ②

由②式,得 $m=-2$ 代入①式可得 $n=4$.

$\therefore$ $m=-2, n=4$. 故选(A).

4. 答:(C).

解 由根的判别式 $\Delta=4\sin^2\theta+4\cos^2\theta=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=4>0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实根,选(C).

5. 答:(A).

解 设方程的两根为 x_1、x_2,由韦达定理知

$$x_1+x_2=\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{4}{a}.$$

按题意得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{a}$, $\because a\neq0$, $\therefore b=4$,

将 $b=4$ 代入方程,则方程为 $ax^2-4x+4=0$,

$\because$ 已知方程有一个根为$\dfrac{1}{4}$.

$\therefore$ $a(\dfrac{1}{4})^2-4\times\dfrac{1}{4}+4=0$, $\dfrac{a}{16}+3=0$, $a=-48$.

故选(A).

6. 答:(A).

解 $\because$ 方程有两个不等的实根,

$\therefore$ 根的判别式 $\Delta>0$,

即 $a^2+4a>0$;

也即 $a(a+4)>0$;

$\therefore$ $a>0$ 或 $a<-4$. 故选(A).

7. 答:(D).

解 设方程的两根为 x_1、x_2,则由韦达定理知

$$x_1+x_2=a+3b, \quad x_1\cdot x_2=-2b,$$

由题意 $\begin{cases}a+3b=8,\\-2b=-4.\end{cases}$

解得 $a=2, b=2$. 故选(D).

Ⅱ　解答题

1. 解法一　将原方程组变形，得

$$\begin{cases} x+y=1-p, & ① \\ x^2+y^2=1-p^2. & ② \end{cases}$$

又　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$,

将①、②代入，得　$1-p^2=(1-p)^2-2xy$,

$\therefore$　$xy=p(p-1)$,

而　$x+y=1-p$.

由韦达逆定理可知，x、y 为方程

$$z^2-(1-p)z+p(p-1)=0$$

的根，故原方程组有实解即等价于此方程有实数解，从而判别式

$$\Delta=(p-1)^2-4p(p-1)\geqslant 0,$$

即　$(p-1)(3p+1)\leqslant 0$,

解得　$-\dfrac{1}{3}\leqslant p\leqslant 1$.

解法二　$\begin{cases} p+x+y=1, & ① \\ p^2+x^2+y^2=1. & ② \end{cases}$

由①得 $y=1-p-x$，代入②式，得 $p^2+x^2+(1-p-x)^2=1$.

即　$x^2-(1-p)x+p(p-1)=0$.

以下同“解法一”.

2. 解　设 x_1，x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的实根，由假设知 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$.

由韦达定理知　$x_1+x_2=p$.

由题设又可知 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两个实根，从而

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=r$，$\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=s$.

$\therefore$　$r=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=sp$，　　故　$\dfrac{sp}{r}=\dfrac{sp}{sp}=1$.

3. 解　(1)　$\because$　方程有两个实根，

$\therefore$ 判别式 $\Delta=(a-1)^2-4\geqslant0$，因而 $(a-1)^2\geqslant4$，

得 $a-1\geqslant2$ 或 $a-1\leqslant-2$，

$\therefore$ $a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-1$.

(2)由韦达定理知 $x_1+x_2=1-a$， $x_1\cdot x_2=1$.

因而
$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$
$$=\frac{(1-a)^2-2}{1}=(a-1)^2-2$$

其中 a 受到 $a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-1$ 的限制.

因为当 $a>1$ 时函数单调递增，所以在 $a\geqslant3$ 中当 $a=3$ 时函数取最小值；

当 $a<1$ 时函数单调递减，所以在 $a\leqslant-1$ 中当 $a=-1$ 时函数取最小值.（参见图 1－1）

设 $f(a)=(a-1)^2-2$,则 $f(3)=(3-1)^2-2=2$,$f(-1)=(-1-1)^2-2=2$.

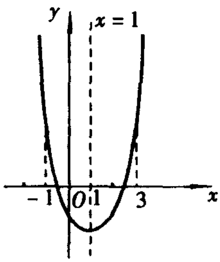

图 1－1

故 $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$的最小值等于 2.

4. 解 由方程的根的判别式

$\Delta=(m-2)^2+4(m+3)=m^2+16>0$

可知方程有两个不相等的实根，设此两根为 x_1、x_2，由韦达定理可知

$$x_1+x_2=-(m-2),\quad x_1x_2=-(m+3).$$

因而 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-2)^2+2(m+3)$

$=(m-1)^2+9$.

故当 $m=1$ 时有最小值等于 9.

5. 解 $\because$ 二次方程有两个相异的负根.

$\therefore$ $\Delta=4-4a(a-2)>0$.

即 $-4(a^2-2a-1)>0$，

也即 $a^2-2a-1<0$，

解得 $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$.

设方程的两根为 x_1、x_2，由题意知，$x_1<0$，$x_2<0$，$x_1\neq x_2$.

$\therefore$ $x_1+x_2<0$， $x_1\cdot x_2>0$.

由韦达定理知

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}, \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{a-2}{a}; \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{2}{a}>0, \\ \dfrac{a-2}{a}>0. \end{cases}$$

解得　$a>2$.

综上得　$2<a<1+\sqrt{2}$.

（三）考点剖析

Ⅰ　专题分析

从上述试题看到，“数、式、方程（组）”的考题内容以方程（组）为主，而方程与方程组中又以方程更为重要.

在关于“一元二次方程”的考题中考查的主要内容有韦达定理（即根与系数的关系）及其逆定理，根的判别式及二次函数求最值. 在最值题中，由于在转化成二次函数的过程中，需运用韦达定理，这首先要将求最值的表达式变成“和”与“积”的形式，因此，熟练运用诸如以下这些变形公式是非常重要的，它们是解好一元二次方程题的前提：

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$；　$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$；

$x^2-y^2=\sqrt{(x+y)^2-4xy}(x+y)$（设 $x>y$）；

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$；

$x^3-y^3=\sqrt{(x+y)^2-4xy}[(x+y)^2-xy]$,（设 $x>y$）.

当涉及二次项为字母系数的一元二次方程时，必须仔细审查题设中有无明确表示该系数不为零，否则，便需进行讨论（若题设中有“一元二次方程”字眼，意味该字母系数不为零，若仅为“方程”两字，则需讨论）.

在使用“根的判别式”、“韦达定理”解题时，大致有三种情形：①单独使用“根的判别式”解题；②单独使用“韦达定理”解题；③需

将“根的判别式”与“韦达定理”结合使用. 须注意三者的区别，掌握规律.

韦达逆定理指的是：“已知 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=b$，则 x_1，x_2 为方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个不等的实根.”此逆定理非常重要，应用广泛，有时与韦达定理结合使用.

Ⅱ 范例辅导

例 1 已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$，求 x^7+y^7 的值.

分析 求值式中的指数高达“7 次”，无法直接求值，设法“降次”，考虑到 7 次可折为 3 次加 4 次，而 4 次又可转化为 2 次，问题即可解决.

解 由 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2$， 又 $x+y=1$，

$\therefore$ $1-2xy=2$， $xy=-\dfrac{1}{2}$.

从而

$$\begin{aligned}x^7+y^7&=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)\\&=[(x+y)^3-3xy(x+y)][(x^2+y^2)^2-2\times(xy)^2]\\&\quad-(xy)^3(x+y)\\&=[1^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1][2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2]-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times1\\&=\frac{71}{8}.\end{aligned}$$

例 2 关于 x 的方程 $a+2bx+cx^2=0$，当 $ac<b^2$ 时

(A) 必有两个不等的实根；

(B) 没有两个不等的实根；

(C) 不一定有两个不等的实根；

(D) 以上结论都不对.

分析 注意到题中的方程是按“升幂”而非通常的“降幂”排列，因此首先要对项的排列顺序进行调整，其二是题中仅用“方程”两字，因而二次项系数有可能为零.

解 原方程等价于 $cx^2+2bx+a=0$，现根的判别式 $\Delta=(2b)^2-4ca=4(b^2-ac)>0$（因题设 $ac<b^2$，$b^2-ac>0$），但由于 c 可能为零，当