高等学校
数学学习指导丛书

高等数学精讲精练

上册

与同济大学《高等数学》（第五版）同步

主编　陈启浩

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习

北京师范大学出版社

高等学校
数学学习指导丛书

高等数学精讲精练

上册

与同济大学《高等数学》（第五版）同步

主编 陈启浩
编者 寿 宇
李茂生
陈文超

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学精讲精练. 上册 / 陈启浩主编. —北京：北京师范大学出版社，2006
（高等学校数学辅导丛书）
ISBN 7-303-08034-1

Ⅰ.高... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第036005号

高等学校数学学习指导丛书
高等数学精讲精练
上册
北京师范大学出版社发行
（北京新街口外大街19号 邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京新丰印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：185mm×260mm 印张：22 字数：555千字
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1~3 000册
定价：27.00元

前　言

高等数学是大学工学、经济学、管理学各学科和专业的一门重要基础课，也是这些学科和专业的硕士研究生入学考试必考科目之一.

目前出版的高等数学辅导读物，其中虽不乏佳作，但多以题解“《高等数学》（同济大学）习题”或“历年硕士研究生入学试题”形式出现. 本书则是旨在引导正在学习高等数学的读者，能与课堂教学或自学同步，准确灵活地理解高等数学中的众多概念与理论，熟练掌握各种问题的解题方法和技巧，较快捷、较深入地学会高等数学这门课程；同时帮助正在复习迎接硕士研究生入学考试的读者能在较短时期内使高等数学水平有一个较大幅度的提高，从容面对数学考试.

全书按同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第五版）（高等教育出版社）各章顺序编写，共分十二章及附录（高等数学的应用、全书综合练习题及考研试题）. 每章分若干节，每节都由以下三部分组成：

一、**主要内容提要**　列出该节的核心内容，即主要定义、定理及计算公式.

二、**疑问与解答**　将该节中较易混淆的概念、学习中会出现的问题以及解题方法和技巧以疑问形式提出，并结合典型例子给出解答.

三、**基础练习**　这里的练习都是基础题，旨在通过这些练习题熟悉本节的有关概念、理论及计算方法. 基础练习包括单项选择题和填空题（书后都有解答），特别对单项选择题，在解答中不仅给出选择其中某项的理由，也给出不选择其余三项的理由.

此外，每章的最后都安排有**“主要计算方法总结”**一节（除第六章）和**综合练习**（A）（B），通过这一节的阅读和综合练习训练，将融会贯通全章的各个知识点，提高分析问题和解决问题的能力.

北京师范大学出版社理科室的编辑们对本书面世给予了热情的支持和帮助，谨此致谢.

由于水平有限，成书时间仓促，书中疏漏等不足之处恐难幸免，恳请广大读者及同行指正.

陈启浩

2006 年 2 月识于北京

目　录

第一章 函数、极限和连续

第一节　函　数

一、主要内容提要

1 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的数集．如果对每个 $x\in D$，变量 y 按照某个法则总有确定的实数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$．

当任意的 $x\in D$ 都相应地只有一个函数值 y 时，称此函数为单值函数，否则称为多值函数．在高等数学范畴内，凡没有特别说明的函数都是单值函数．

使表达式 $f(x)$ 有意义的实数值 x 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，记为 D；当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值 y 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 W．

2 函数的四种基本性质

(1)有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义．如果存在正数 K，使得对任意的 $x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant K \quad (\text{或 } f(x)\leqslant K\text{，或 } f(x)\geqslant -K),^{*}$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的有界(或有上界的，或有下界的)函数．

(2)单调性

设函数在数集 D 上有定义．如果对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 是 D 上的单调增加(或单调减少)函数．

单调增加与单调减少总称函数的单调性．

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的数集 D(即如果 $x\in D$，则必有 $-x\in D$，例如对称区间 $(-l,l)$ 就是这样的数集)上有定义．如果对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)=f(x)$)，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数(或偶函数)．

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义．如果存在正数 l，使得对任意的 $x\in D$，有 $x+l,x-l\in D$ (例如区间 $(-\infty,+\infty)$ 就是这样的数集)，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的周期．

---

* $|f(x)|\leqslant K$ 对应着 $f(x)$ 是有界函数；$f(x)\leqslant K$ 对应着 $f(x)$ 是有上界的函数；$f(x)\geqslant -K$ 对应着 $f(x)$ 是有下界的函数．此叙述方法同时给出有界性的三个定义，为叙述简洁，全书在定义中多次采用此种叙述方式．

通常,称最小正周期,即最小正数周期(如果存在)为 $f(x)$ 的周期.

3 反函数

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,记其值域为 W,则对每个 $y\in W$,可以确定 D 上的一个或几个 x 值,使得 $y=f(x)$. 这种对应关系称为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=\varphi(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此,$y=f(x)$ 的反函数通常指的是 $y=\varphi(x)$.

4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 如果 $W\subseteq D_1$,则对每个 $x\in D$,通过 $u=\varphi(x)$ 及 $y=f(u)$ 有数值 y 与之对应,如此确定的以 x 为自变量、y 为因变量的函数,称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$.

由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 产生复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的运算称为函数的复合运算,简称复合.

5 初等函数

幂函数 $y=x^{\mu}$、指数函数 $y=a^x$、对数函数 $y=\log_a x$、三角函数及反三角函数称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的,并能用一个数学表达式表示的函数称为初等函数.

不是初等函数的函数称为非初等函数. 不能转换为用一个数学表达式表示的分段函数(即在定义域的不同部分用不同数学表达式表示的函数)是常见的非初等函数.

二、疑问与解答

问 1 何谓两个函数相同?

答 定义域和表示自变量与因变量之间对应关系的法则是函数的两个要素. 如果函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的定义域相同,均为 D,且对每一个 $x\in D$,有 $f(x)=g(x)$,则称这两个函数相同.

例如,$f(x)=|x|$,$g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域同为 $(-\infty,+\infty)$,且对每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x)=g(x)$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就是相同函数.

又如,$f(x)=x+1$,$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,除了 $x=1$ 点外,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则完全一致,但由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同函数.

问 2 怎样定义无界函数?

答 函数的无界与有界是两个对立概念,因此,将不是有界的函数称为无界函数. 于是,无界函数可定义为:设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果对任意的正数 K,存在 $x\in D$,使得 $|f(x)|>K$,则称 $f(x)$ 是 D 上的无界函数.

例如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的,这是因为对任意的正数 K,有 $x_0=\dfrac{1}{K+1}\in(0,1)$,使得 $|f(x_0)|=K+1>K$.

问 3 函数运算时其奇偶性如何发生变化?

答 分两部分回答这个问题.

(1)设函数 $f(x),g(x)$ 都在关于原点对称的数集 D 上有定义,则对这两个函数作四则运算时,关于奇偶性有以下结论:

如果 $f(x),g(x)$ 都是奇(偶)函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是奇(偶)函数;

如果 $f(x),g(x)$ 都是奇(偶)函数,则 $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数;

如果 $f(x),g(x)$ 都是奇(偶)函数,且 $g(x)\neq 0$,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是偶函数.

(2)设函数 $f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合,且都在关于原点对称的数集上有定义,则关于复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的奇偶性有以下结论:

如果 $f(u)$ 与 $\varphi(x)$ 同为奇函数,则 $f[\varphi(x)]$ 为奇函数;

如果 $f(u)$ 为偶函数,$\varphi(x)$ 为奇函数,则 $f[\varphi(x)]$ 为偶函数;

如果 $\varphi(x)$ 为偶函数,则 $f[\varphi(x)]$ 为偶函数.

注 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的数集 D 上有定义,则有以下结论:

(1) $f(x)$ 可以表示成 D 上的奇函数 $f_1(x)$ 与偶函数 $f_2(x)$ 之和,此时可取

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)];$$

(2)存在 D 上的奇函数 $g_1(x)$,使得 $f(x)+g_1(x)$ 是偶函数,此时可取

$$g_1(x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)];$$

(3)存在 D 上的偶函数 $g_2(x)$,使得 $f(x)+g_2(x)$ 是奇函数,此时可取

$$g_2(x)=-\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)].$$

问 4 函数运算时其单调性如何发生变化?

答 分两部分回答这个问题.

(1)设函数 $f(x),g(x)$ 都在数集 D 上有定义,则这两个函数做四则运算时,关于单调性有以下结论:

如果 $f(x),g(x)$ 都是单调增加(单调减少),则 $f(x)+g(x)$ 单调增加(单调减少).

如果 $f(x)$ 单调增加(单调减少),$g(x)$ 单凋减少(单调增加),则 $f(x)-g(x)$ 单调增加(单调减少).

如果 $f(x),g(x)$ 都是单调增加(单调减少)的正值函数,则 $f(x)\cdot g(x)$ 单调增加(单调减少);如果 $f(x),g(x)$ 都是单调增加(单调减少)的负值函数,则 $f(x)\cdot g(x)$ 单调减少(单调增加).

如果 $f(x)$ 是单调增加(单调减少)的正值函数,$g(x)$ 是单调减少(单调增加)的正值函数,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加(单调减少);如果 $f(x)$ 是单调增加(单调减少)的负值函数,$g(x)$ 是单调减少(单调增加)的负值函数,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 单调减少(单调增加).

(2)设函数 $f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合,则关于复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的单调性有以下结论:

如果 $f(u)$ 单调增加,$\varphi(x)$ 单调增加(单调减少),则 $f[\varphi(x)]$ 单调增加(单调减少).

如果 $f(u)$ 单调减少,$\varphi(x)$ 单调减少(单调增加),则 $f[\varphi(x)]$ 单调增加(单调减少).

注 本结论可以总结为如下的口诀：

“内外增减同，复合增；内外增减异，复合减.”

问 5 周期函数是否都有最小正周期？

答 设 $f(x)$ 是周期函数，则对于任意的 $x\in D$($f(x)$ 的定义域)都有 $f(x+l)=f(x)$ 的正数 l 称为 $f(x)$ 的周期. 例如 $2k\pi(k=1,2,3,\cdots)$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期. 通常，称函数 $f(x)$ 的最小正周期为它的周期. 因此，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数. 但是并非任意周期函数都有最小正周期. 例如，任何正有理数都是函数 $f(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数},\\0, x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 的周期. 由于不存在最小的正有理数，因此这一周期函数无最小正周期.

问 6 如何计算函数的反函数？

答 根据反函数的定义，在计算函数 $y=f(x)$ 的反函数时，可以分两步进行：

第一步：由 $y=f(x)$ 求出 $x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域；

第二步：将 x,y 的记号互换得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$.

注 关于反函数，以下两点值得注意：

(1) $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在 xOy 平面上的图形是相同的，但 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 在 xOy 平面上的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2) $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$ 未必是单值函数，但是，当 $y=f(x)$ 是单调函数时，$y=\varphi(x)$ 是单值函数，且与 $y=f(x)$ 有相同的单调性.

问 7 我们知道，当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1 包含函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 W 时，$y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合. 那么 $W\subseteq D_1$ 是否是 $f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合的必要条件？

答 $W\subseteq D_1$ 不是 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合的必要条件.

实际上，只要满足 $D_1\cap W\neq\varnothing$(空集)时，函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 就可以构成复合函数 $f[g(x)]$，其定义域为 $\{x|u=\varphi(x),u\in D_1\cap W,x\in D\}$，其中，$D$ 是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域.

问 8 我们知道，初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合构成，并能用一个数学表达式表示的函数. 那么这里的“有限次”和“一个”两个词如何理解？

答 一个函数有时可以用多种方式构成或有多种表示形式，因此，一个函数只要当它能由常数和基本初等函数经有限次四则运算和复合构成，并且能用一个数学表达式表示时就是初等函数.

例如，函数 $f(x)=|\sin x|$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$虽可以表示为 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$

但是由于它也可以表示为 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，因此这个函数是初等函数.

又例如，今后我们会知道函数 $y(x)=1+e^x+\frac{1}{2!}e^{2x}+\cdots+\frac{1}{n!}e^{nx}+\cdots$ $(-\infty<x<+\infty)$ 可以表示成 $y(x)=e^{e^x}$(即由基本初等函数经过一次复合构成的)，因此这个函数也是初等函数.

三、基础练习

1. 单项选择题

(1)函数 $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,1)$

(2)设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则函数 $f(x+1)+f\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域为(　　).

A. $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right]$

C. $[-1,0]$　　D. $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

(3)$f(x)=|x\sin x|e^{\sin x}$是(　　).

A. 奇函数　　B. 无界函数

C. 周期函数　　D. 偶函数

(4)设函数 $f(x)=\ln(1+x)$,则复合函数 $f[f(x)]$的定义域为(　　).

A. $x>0$　　B. $x>\dfrac{1}{e}-1$

C. $x>-1$　　D. $0<x<\dfrac{1}{e}$

(5)函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0, \\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 是(　　).

A. 单调增加奇函数　　B. 单调减少奇函数

C. 单调增加偶函数　　D. 单调减少偶函数

(6)函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$即为(　　).

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=\begin{cases} x-\pi, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi \end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases} -\pi-x, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi \end{cases}$

(7)函数 $y=\ln(\sec x+\tan x)$是(　　).

A. 以 2π 为周期的周期函数,且是偶函数

B. 以 π 为周期的周期函数,且是偶函数

C. 以 2π 为周期的周期函数,且是奇函数

D. 以 π 为周期的周期函数,且是奇函数

(8)设函数 $y=f(x)$的反函数为 $y=\varphi(x)$,则(　　).

A. $y=\varphi(x)$的反函数是 $y=f(x)$

B. $y=\varphi(x)$的反函数不是 $y=f(x)$

C. 当 $y=f(x)$是单调增加函数时，$y=\varphi(x)$是单调增加函数

D. 当 $y=f(x)$是单调增加函数时，$y=\varphi(x)$是单调减少函数

(9)设函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x-1, & 其他,\end{cases}$ 记它的反函数的三个单值分支为 $y=\varphi_i(x)$ $(x\in(-\infty,-2)\cup[0,+\infty);i=1,2,3)$，则(　　).

A. $\varphi_1(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1],\\ x+1, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty);\end{cases}$

$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1],\\ x+1, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty);\end{cases}$

$\varphi_3(x)=x+1,x\in(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$

B. $\varphi_1(x)=-\sqrt{1-x^2},x\in[0,1]$；$\varphi_2(x)=\sqrt{1-x^2},x\in[0,1]$；

$\varphi_3(x)=x+1,x\in(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$

C. $\varphi_1(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1],\\ x+1, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty);\end{cases}$

$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1],\\ x+1, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty);\end{cases}$

$\varphi_3(x)=x+1,x\in(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$

D. $\varphi_1(x)=x+1,x\in(-\infty,-2)$；

$\varphi_2(x)=\pm\sqrt{1-x^2},x\in[0,1]$；

$\varphi_3(x)=x+1,x\in[1,+\infty]$

2. 填空题

(1)函数 $y=\dfrac{x-2}{\ln x}+\sqrt{25-x^2}$的定义域为__________.

(2)设函数 $f(x)=x\ln(1+e^x)$. 选择一个偶函数 $g(x)=$______，使 $f(x)+g(x)$为奇函数.

(3)函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的值域为__________.

(4)设 $y=\sqrt{a}+f(\sqrt{x}-1)$. 当常数 $a=1$ 时，$y=x$，则函数 $f(x)=$__________.

(5)函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}$的反函数为__________(需指明定义域).

(6)设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & -1<x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\sqrt{e^x+1}, & x\leqslant 1,\\ \arctan x, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)\cdot g(x)=$__________.

(7)函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数为__________.

(8)设函数 $g(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x-1, & x>0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$__________.

(9)设函数 $f(u)=\arcsin u,\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x\leqslant\frac{1}{2},\\ x, & 其他,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$____________.

(10)设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ $y=\varphi(x)$ 是函数 $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0\end{cases}$ 的反函数,则 $f[\varphi(x)]=$____________.

第二节 极 限

一、主要内容提要

1 数列极限的定义与性质

设数列$\{x_n\}$及常数 A. 如果对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有$|x_n-A|<\varepsilon$,则称 A 是$\{x_n\}$的极限,或称$\{x_n\}$收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 如果数列$\{x_n\}$不收敛,则称$\{x_n\}$发散.

数列极限有以下主要性质:

(1)如果数列$\{x_n\}$收敛,则它的极限是唯一的;

(2)如果数列$\{x_n\}$收敛,则它是有界的;

(3)如果数列$\{x_n\}$收敛于 A,则它的任一子数列也收敛于 A;

(4)如果数列$\{x_n\}$收敛于 $A>0(A<0)$,则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$x_n>0(x_n<0)$;

(5)设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别收敛于 A,B. 如果存在正整数 N,当 $n>N$ 时有 $x_n\leqslant y_n$,则 $A\leqslant B$;

(6)设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别收敛于 A,B. 如果 $A<B$,则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $x_n<y_n$.

2 函数极限的定义与性质

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内(或点 x_0 的右侧邻近内,或点 x_0 的左侧邻近内)有定义,A 是常数. 如果对任给的 $\varepsilon>0$,存在正数 δ,使得对满足 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或$-\delta<x-x_0<0$)的 x,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限(或右极限,或左极限),记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$).

设函数 $f(x)$在$|x|$大于某个正数的范围(或 x 大于某个数的范围,或 x 小于某个数的范围)内有定义,A 是常数. 如果对任给的 $\varepsilon>0$,存在正数 N,使得满足$|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)的 x,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$,或 $x\to-\infty$)时 $f(x)$的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$).

注 点 x_0 的右(左)邻近,即为点 x_0 的某个去心邻域的右(左)侧部分.

函数极限有以下主要性质:

(1)如果函数 $f(x)$在某个变化过程($x\to x_0$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,或 $x\to-\infty$)有极限,则极限必为唯一.

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),则存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中 $f(x)$有界.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$),则存在正数 N,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中 $f(x)$有界.

(3)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),则当 $A>0$ 时,存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)>0$;当 $A<0$ 时,存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)<0$.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$),则当 $A>0$ 时,存在正数 N,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)>0$;当 $A<0$ 时,存在正数 N,使得在 $|x|>N$($x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)<0$.

(4)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$). 如果存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)\geqslant a$(其中 a 为常数),则 $A\geqslant a$;如果存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)\leqslant a$(其中 a 为常数),则 $A\leqslant a$.

设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$). 如果存在正数 N,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)\geqslant a$(其中 a 为常数),则 $A\geqslant a$;如果存在正数 N,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)\leqslant a$(其中 a 为常数),则 $A\leqslant a$.

(5)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=B$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=B$). 如果存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $A\leqslant B$.

设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$),$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=B$). 如果存在正数 δ,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $A\leqslant B$.

(6)设函数 $f(x)$,$g(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内(点 x_0 的右侧邻近,或点 x_0 的左侧邻近)内有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=B$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=B$),且 $A<B$,则存在正数 δ,使得在 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$,或 $-\delta<x-x_0<0$)中有 $f(x)<g(x)$.

设函数 $f(x)$,$g(x)$在 $|x|$大于某个正数范围(x 大于某个数的范围,或 x 小于某个数的范围)内有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$),$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=B$),且 $A<B$,则存在正数 N,使得在 $|x|>N$(或 $x>N$,或 $x<-N$)中有 $f(x)<g(x)$.

3 数列极限与函数极限的关系

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),则对任意的 $x_n\to x_0$(或 $x_n\to x_0^+$,

或 $x_n\to x_0^-$)的数列$\{x_n\}$,有$f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$),则对任意的 $x_n\to\infty$(或 $x_n\to+\infty$,或 $x_n\to-\infty$)的数列$\{x_n\}$,有 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

如果对任意的 $x_n\to x_0$(或 $x_n\to x_0^+$,或 $x_n\to x_0^-$)的数列$\{x_n\}$,都有 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$).

如果对任意的 $x_n\to\infty$(或 $x_n\to+\infty$,或 $x_n\to-\infty$)的数列$\{x_n\}$,都有 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$).

4 函数极限与其左、右极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在且都为 A;

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在且都为 A.

5 函数极限的运算法则

$\lim f(x)$表示 x 的某个变化过程中函数 $f(x)$的极限.

如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则 $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B,\lim(f(x)g(x))=AB$;

如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B\neq 0$,则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$;

如果 $\lim\varphi(x)=a$,且在点 $x=a$ 的某个去心邻域内,$u=\varphi(x)\neq a$,$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则 $\lim f[\varphi(x)]=A$.

6 无穷小与无穷大

(1)无穷小的定义与性质

设函数 $f(x)$在某个变化过程中的极限为零,则称 $f(x)$为在这个变化过程中的无穷小.无穷小有以下主要性质:

有限个无穷小之和(或积)为无穷小;

有界函数与无穷小之积为无穷小,特别,常数与无穷小之积为无穷小;

函数 $f(x)$在某个变化过程中的极限为 A 的充分必要条件是:$f(x)$可表示为 A 与 α 之和,即

$f(x)=A+\alpha$ (其中,α 是这个变化过程的无穷小).

(2)无穷小比较

设 $\alpha(\alpha\neq 0)$,β 都是某个变化过程的无穷小,则

当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ 时,称 β 是比 α 高阶的无穷小;

当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$时,称 β 是比 α 低阶的无穷小;

当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c$($c$ 是非零常数)时,称 β 与 α 是同阶无穷小;

当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c$($c$ 是非零常数,$k>0$)时,称 β 是 α 的 k 阶无穷小;

当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时,称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\beta\sim\alpha$.