

南方建筑科學研究所

科學通報

工字梁弯曲时塑性变形的 計 算

И. И. 齐恒科 著

建筑工程出版社

內容提要 这本小册子叙述了关于在弹性限內、彈塑性变形范围内及硬化时工字梁弯曲問題的理論解答，說明了按極限状态計算方法的应用問題，提供了計算超过弹性限荷載的梁在卸載后的应力及撓度的公式，載有决定各种荷載条件下的工字梁撓度用的表及曲綫图。

这本小册子供金屬結構設計工程师及科学工作者使用。

原本說明

書 名 УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ
出版者 Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре
出版地点 及 年 月 Москва—1955

工字梁弯曲时塑性变形的計算

建筑工程部設計總局 譯

*

建筑工程出版社出版 (北京市阜成門外大街)

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 032 号)

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

书号: 55 千字 787×1092 $\frac{1}{32}$ 印張 2 $\frac{5}{8}$

1953年6月第1版 1956年6月第1次印刷

印數: 1—3,015 册 定價 (10) 0.42 元

序 言

考虑塑性变形的問題对于结构物的正确設計和建筑中鋼材的使用具有重大的意义。

鋼結構設計标准(ННТУ1-46)在許多研究的基础上考虑塑性变形的发展,并根据法向应力的极限图形,容許在計算受弯曲作用的板梁时提高抵抗力矩15%。

以后,許多研究者不仅研究了法向应力极限图形的发展,而且研究了切綫应力极限图形的发展,根据由于考虑橫向力产生塑性鉸的情况得出了必須采用极限容許荷載限制的結論。

Б.М. 布罗烏德在确定承載能力时同样也是以对法向应力及切綫应力极限图形的研究为根据,他在自己的著作中指出,决定工字梁的极限荷載不研究变形是不够的。

Н.Д. 儒金亦指出,只根据法向应力及切綫应力图形的发展情况所决定的荷載,不能認為是极限的。

南方建筑科学研究所关于計算塑性变形問題的研究在决定极限容許荷載时,不是根据应力图形最終的极限状态来探討,而是根据应力及变形的图形的整个发展过程。同时,在南方建筑科学研究所的研究中,与上述著作不同的是考虑了硬化。

进行这些研究的結果,作出了結論:对于主要应用在建筑中的建筑軟鋼,决定承載能力的准則是变形,而不是强度^①。

① 决定受載时承載能力的穩定性及持久性的問題,本書未加考慮。

目 录

序 言.....	2
第一节 受两个集中力的梁的弯曲.....	6
第二节 受均布荷载的梁的弯曲.....	12
第三节 考虑硬化研究各种荷载及各种钢材超过 弹性限的挠度.....	16
第四节 考虑法向应力及切线应力决定弹性范围与弹性 范围间的界限.....	23
第五节 横向力对于挠度的影响.....	28
第六节 决定超过弹性限的挠度用的表及曲线图.....	37
第七节 考虑塑性变形研究弯曲时的极限状态举例.....	59
第八节 关于超过弹性限弯曲的实验资料.....	78
结 论.....	82

序 言

考虑塑性变形的問題对于结构物的正确設計和建筑中鋼材的使用具有重大的意义。

鋼結構設計标准(ННТУ1-46)在許多研究的基础上考虑塑性变形的发展,并根据法向应力的极限图形,容許在計算受弯曲作用的板梁时提高抵抗力矩15%。

以后,許多研究者不仅研究了法向应力极限图形的发展,而且研究了切綫应力极限图形的发展,根据由于考虑橫向力产生塑性鉸的情况得出了必須采用极限容許荷載限制的結論。

Б.М. 布罗烏德在确定承載能力时同样也是以对法向应力及切綫应力极限图形的研究为根据,他在自己的著作中指出,决定工字梁的极限荷載不研究变形是不够的。

Н.Д. 儒金亦指出,只根据法向应力及切綫应力图形的发展情况所决定的荷載,不能認為是极限的。

南方建筑科学研究所关于計算塑性变形問題的研究在决定极限容許荷載时,不是根据应力图形最終的极限状态来探討,而是根据应力及变形的图形的整个发展过程。同时,在南方建筑科学研究所的研究中,与上述著作不同的是考虑了硬化。

进行这些研究的結果,作出了結論:对于主要应用在建筑中的建筑軟鋼,决定承載能力的准則是变形,而不是强度^①。

① 决定受彎時承載能力的穩定性及持久性的問題,本書未加考慮。

所以，本著作中采取按照变形并考虑超载时残余挠度的积累进行验算，作为承载能力的主要准则。

决定超过弹性限的挠度时，不考虑固定施加荷载时的所谓“后效”或变形的增大，因为对于金属其影响不大。

在研究中，在弹性限内，弹塑性变形阶段内及硬化时采取

了平截面的假设，这一假设是用众所周知的近似法，由许多实验所证实的。

卸载时采用了力矩与挠度之间的直线关系。

本书也研究了横向力对挠度及极限荷载影响的问题。

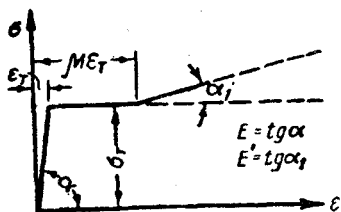


图 1

所有计算都用一个参数 ν_a 的函数来进行。这个参数乃是梁在最大应力点上的伸长 $\epsilon_{\text{кр.}\alpha}$ 与受拉时流动起点上的伸长 ϵ_T 之比。梁的荷载、力矩、应力及挠度都以这参数的函数表示。所采用的方法易于在一般形式中研究超过弹性限及硬化时的整个变形发展的过程。在已经完成的计算的基础上消去参数 ν_a ，并组成荷载与挠度之间的关系。

一切计算都用无量纲参数进行，这样就能广泛地研究各种特性的影响，并为各种荷载图形、各种编号的工字梁、各种力学性能的钢材编制挠度与加载程度的关系表及曲线图。

研究中，金属工作采取受压和受拉一样。

图 1 所示为所采用的考虑硬化的拉伸图。

设钢材有以下数值：

μ ——流幅的终点及起点的伸长比。对于 3 号钢取

$\mu = 15$ ；

$\frac{E'}{E}$ ——硬化模数与弹性模数之比。对于建筑软钢，这个

比变动在 0.01 到 0.04 的范围内，平均为 0.02；

σ_T, E ——流限，弹性模数。

本著作研究了两种工字形断面型钢：一般应用于焊接梁的带直翼缘的简化型钢(图2, a)及轧制型钢(OCT 10016-39)图2, b)

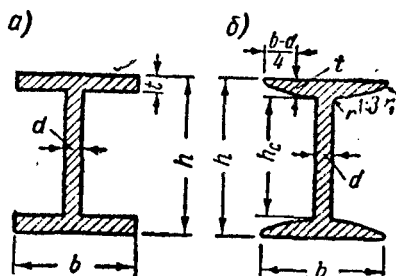


图 2

在考虑到硬化的第一节至第三节中，载有适用于简化型钢(图2, a)的计算。此种型钢设有如下的参数：

$$k_1 = \frac{b-d}{b}; \quad k_2 = \frac{h-2t}{h}; \quad \alpha = 1 - k_1 k_2^3. \quad (1)$$

本著作中载有计算超过弹性限的梁挠度用的表及曲线图。这些表及曲线图都是在各种简单荷载及简化应力图(没有硬化)的情况下适应于轧制工字型钢(OCT 10016-39)编成的。

所提出的方法及表和曲线图的应用，均以若干详细解释的例子加以阐明。

本书所叙述的以参数 ν 的函数研究弹塑性阶段的梁弯曲

的方法，亦可用于解决偏心受压及其他各种不均匀变形的問題。

作者非常感謝在完成本书及編写原稿时提供許多宝贵意见的技术科学博士 A.И. 維諾格拉托夫教授和技术科学付博士 H.Φ. 別良科夫。

作者对进行了編制表的巨大計算工作的 П.Е. 米倫宁科同志表示謝忱。

第一节 受两个集中力的梁的弯曲

我們来研究受相等对称作用力的工字梁(图3)的弯曲。

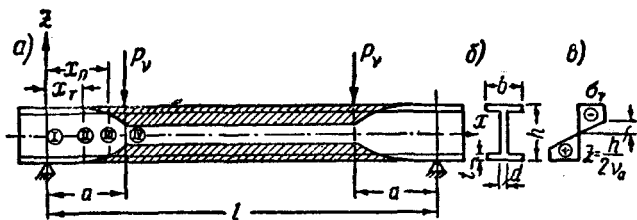


图 3

我們將按荷載增长順序及由弹性变形变为弹塑性变形以及参数 v_a 函数中的硬化各阶段来研究应力图、力矩、挠度的发展。

同时,并計算梁卸载后的残余挠度。

第一个阶段,弹性阶段 ($v_a < 1.0$)—特征是各点中的应力小于流限。卸载后不留下残余应力及挠度。

在純弯曲区的力矩 M_a 及梁中央的相对挠度 $\frac{y}{l}$ 以参数 $v_a = \frac{\epsilon_{kp} \cdot a}{\epsilon_T}$ 表示:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= M_T v_a, \\ \frac{y}{l} &= \frac{M_a l}{24 E J} \left(3 - 4 \frac{a^2}{l^2} \right) = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} \left(3 - 4 \frac{a^2}{l^2} \right) v_a, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $M_T = \sigma_T W$;

$\epsilon_{\text{кр.}a}$ ——在純弯曲区梁的邊緣纖維中的伸长；

ϵ_r ——拉伸图上流动开始时的伸长(图1)。

第二个阶段，翼緣范围内的流动 $\left(\frac{1}{k_2} > \nu_a > 1.0\right)$ 。

当 $\nu_a > 1.0$ 时，純弯曲区內的流动沿梁高度由邊緣纖維向翼緣内部扩展，并沿梁长度由加力处向支座扩展。

参数 ν_a 不大的增量（由 1.0 到 $\frac{1}{k_2}$ ）符合这个阶段。在变形发展总的过程中这个阶段的影响不大。因此，对于带直翼緣的簡化型钢(图2, a)，我們不計算这个阶段的挠度。对于軋制型钢(图2, б)，这个阶段的影响略微大些。所以，第六节及表 11, 12, 13 中載了符合这个阶段的力矩及挠度的計算。

第三个阶段，腹板范围内的流动 $(\mu > \nu_a > 1.0)$ 。

純弯曲区的流动是在腹板范围内沿高度扩展。在翼緣面上，流动沿梁长度由純弯区扩展到截面：

$$x_r = a \frac{M_r}{M_a}, \quad (3)$$

而在由翼緣轉变为腹板处則扩展到截面：

$$\left. \begin{aligned} x_{\pi} &= a \frac{M_{\pi}}{M_a}, \\ \text{式中 } M_{\pi} &= \frac{M_r}{2a} (3 - k_2^2 - 2k_1 k_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

純弯曲区的截面弹性部分，在高度上，局限于纵坐标：

$$z = \frac{h}{2\nu_a}. \quad (5)$$

图 3, a 及 б 示法向应力图形及流动区的扩展。

在純弯曲区中法向应力产生的力矩(图3, б)，以参数 ν_a 来表示：

$$M_a = M_T \left(\frac{W_{\pi\pi}}{W} - \frac{1-k_1}{2\alpha} \frac{1}{v_a^2} \right), \quad (6)$$

式中 $\frac{W_{\pi\pi}}{W} = \frac{3\psi}{2\alpha}$; 对于图 2, α 的型钢 $\psi = 1 - k_1 k_2^2$,
 $\alpha = 1 - k_1 k_2^2$ 。

以积分弯曲微分方程式的方法可得出跨度中央的挠度

$$EJy'' = -M_x. \quad (7)$$

在工段范围内 (由 $x=0$ 到 $x=x_T$) 用普通方法积分, 如对于弹性体一样。

在塑性变形范围内 (II、III、IV 段, 由 $x=x_T$ 到 $x=\frac{1}{2}$), 弯曲微分方程式有如下的形式^①:

$$EJy'' = -M_T v_x, \quad (8)$$

式中 $v_x = \frac{\epsilon_{KP} \cdot x}{\epsilon_T}$ 可根据截面 x 上内力与外力相等的条件以

函数 $\frac{M_a}{M_T}$ 及 $\frac{x}{a}$ 表示。譬如, 对于 II 段 (由 $x=x_T$ 到 $x=x_{\pi}$) 根据此条件得方程式:

$$\frac{M_a}{M_T} \frac{x}{a} = \frac{1}{2\alpha} \left(3 - \frac{1}{v_x^2} - 2v_x k_1 k_2^2 \right). \quad (9)$$

如果解这个立方方程式的 v_x 并代入方程式 (8), 则积分就不可能得出最终的形式。因此, 以直线函数代替由 $x=$

$a \frac{M_T}{M_a}$ 到 $x=a \frac{M_{\pi}}{M_a}$ 范围内的函数 v_x :

① 弹塑性变形限内弯曲方程式积分的方法已由 C. A. 别尔什维仁教授研究出。这个方法就是: 根据截面仍是平面的条件, 将较之实际力矩有所增大的虚力矩代入方程式 (6) 的右边部分以代替实际弯曲力矩。 $M_T v_x$ 给出以参数 v_x 表示的此虚力矩之值。

$$\nu_x = 1 + \left(\frac{1}{k_2} - 1 \right) \frac{\frac{x}{a} M_a - M_T}{M_n - M_T}. \quad (10)$$

这样代替所引起的误差将微不足道。对于Ⅲ段(由 $x = x_n$ 到 $x = a$)，弯曲微分方程式将有如下的形式：

$$EJ y'' = -M_T / \sqrt{1 - k_1 (Q_x)^{-1/2}}, \quad (11)$$

式中 $Q_x = 3(1 - k_1 k_2^2) - 2(1 - k_1 k_2^3) \frac{M_a}{M_s} \frac{x}{a}$ ，而积分就可得出最终形式。

对于Ⅳ段(由 $x = a$ 到 $x = \frac{l}{2}$)，方程式(8)的右边部分是常数。

$$EJ y'' = -M_T \nu_a. \quad (12)$$

积分微分方程式和满足边界条件之后，得出梁中央的相对挠度：

$$\text{式中} \quad \frac{y}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} r, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} r = & 3\nu_a \left(1 - 4 \frac{a^2}{l^2} \right) + 4 \frac{a^2}{l^2} \left(\frac{M_T}{M_a} \right)^2 \left\{ \frac{2(1 - k_1)}{a^2} \left[\frac{1 - k_1}{\nu_n^3} \left(1 - \frac{\nu_n^3}{\nu^3} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3a}{\nu_n} \frac{M_n}{M_T} \left(1 - \frac{M_a}{M_n} \frac{\nu_n}{\nu_a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + (\nu_n - 1) \left[\left(\frac{M_n}{M_T} \right)^2 \frac{2M_n - 3M_T}{M_n - M_T} + \frac{M_T}{M_n - M_T} \right] + \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{M_n}{M_T} \right)^2 - 1 \right\}; \quad \nu_n = \frac{1}{k_2}. \end{aligned}$$

梁卸载后产生残余的挠度及应力。残余的应力及挠度值是根据变形与内力之间的比例条件来决定。这个比例已由实验资料所证实。

由此得出卸载后的残余挠度：

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{l}\right)_{\text{ост}} &= \frac{y_{\text{нагр}} - y_{\text{разгр}}}{l} = \\ &= \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} \left[r - \nu_{\text{разгр}} \left(3 - 4 \frac{a^2}{l^2} \right) \right] \end{aligned}$$

使荷载力矩等于卸载力矩 $M_a = M_T \nu_{\text{разгр}}$ ，即得出 $\nu_{\text{разгр}}$ 值。

由此得出卸载后的残余挠度：

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{l}\right)_{\text{ост}} &= \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} \left[r - \frac{M_a}{M_T} \left(3 - 4 \frac{a^2}{l^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} r_{\text{ост}} \end{aligned} \quad (14)$$

第四个阶段，翼缘范围内的硬化 $\left(\frac{\mu}{k_2} > \nu_a > \mu \right)$ 。

对于这个阶段依对第二阶段同样的见解，不进行挠度计算。

第五个阶段，腹板范围内的硬化 $\left(\nu_a > \frac{\mu}{k_2} \right)$ 。

当 $\nu_a > \mu$ 时，翼缘上出现硬化，而 $\nu_a > \frac{\mu}{k_2}$ 时，硬化转到工字钢的腹板上。

图4, a 及 σ 示法向应力图形及流动区的扩展。

边缘应力值：

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_T \left[1 + \frac{E'}{E} (\nu_a - \mu) \right] \quad (15)$$

流动区 x_T 及 x_n 在梁长度上的位置依公式(3)及(4)决定，而 x_y 及 $x_{y.n}$ 则依下列公式决定：

$$\left. \begin{aligned} x_y &= a \frac{M_y}{M_a}; \\ x_{y \cdot n} &= a \frac{M_{y \cdot n}}{M_a}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中

$$M_y = \frac{M_r}{2\alpha} \left[3(1 - k_1 k_2^2) - \frac{1 - k_1}{\mu^2} \right];$$

$$M_{y \cdot n} = \frac{M_r}{2\alpha} \left[3(1 - k_1 k_2^2) - \frac{1 - k_1}{\mu^2} k_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{E'}{E} \frac{\mu}{k^2} (1 - k_2)^2 (2 + k_2) \right],$$

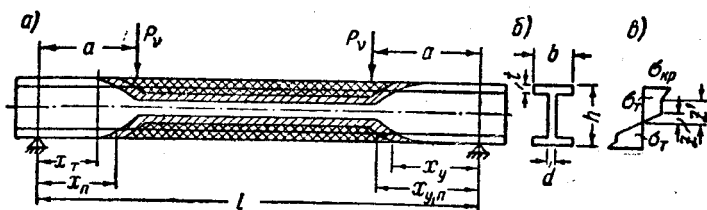


图 4

流动区在截面高度上的位置

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{h}{2v_a}; \\ z' &= \frac{h}{2v_a} \mu_0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

純弯曲区的力矩 M_a 值:

$$M_a = \frac{M_r}{2\alpha} \left\{ 3(1 - k_1 k_2^2) - \frac{1 - k_1}{v_a^2} + \frac{E'}{E} \left[2\alpha v_a - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 3\mu(1 - k_1 k_2^2) + \mu^3 \frac{1 - k_1}{v_a^2} \right] \right\}. \quad (18)$$

梁跨度中央的挠度可以用积分弯曲微分方程式 (7) 及 (8) 的方法近似算出:

式中
$$\left(\frac{y}{l}\right) = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} r, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} r = & 3\nu_a + 4 \frac{a^2}{l^2} \left(\frac{M_T}{M_a}\right)^2 \left\{ \left(\frac{\mu}{k_2} - \nu_a\right) \frac{\left(\frac{M_a}{M_T}\right)^3}{\frac{M_a}{M_T} - \frac{M_{y_n}}{M_T}} \left(1 - \frac{M_{y_n}^3}{M_T^3}\right) + \right. \\ & + (\nu_n - 1) \frac{M_T}{M_n - M_T} \left[2 \left(\frac{M_n}{M_T}\right)^3 - \right. \\ & \left. - 3 \left(\frac{M_n}{M_T}\right)^2 + 1 \right] - \mu(\nu_n - 1) \left[\frac{M_{y_n}^2}{M_T^2} + \frac{M_{y_n}}{M_T} \frac{M_y}{M_T} + \frac{M_y^2}{M_T^2} \right] + \\ & + \left[3 \left(\frac{M_n}{M_T}\right)^2 - 3\mu \left(\frac{M_y}{M_T}\right)^2 - 1 \right] + \frac{6(1-k_1)}{\alpha} \left(\frac{M_n}{M_T} k_2 - \right. \\ & \left. - \frac{M_y}{M_T} \frac{1}{\mu} \right) + 2 \frac{(1-k_1)^3}{\alpha^2} \left(k_2^3 - \frac{1}{\mu^3} \right) \left. \right\}. \end{aligned}$$

第二节 受均布荷载的梁的弯曲

第一个阶段——弹性阶段($\nu_a < 1.0$)。

中间截面的力矩：

$$M_a = M_T \nu_a = \frac{q_v l^2}{8}. \quad (20)$$

梁中央的相对挠度

$$\frac{y}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} \nu_a \frac{5}{2}. \quad (21)$$

第三个阶段，腹板范围内的流动($\mu > \nu_a > \frac{1}{k_2}$)。

随着参数 $\nu_a > 1.0$ 的增大，流动在翼缘范围内扩展，而 $\nu_a > \frac{1}{k_2}$ 时，流动则在腹板范围内扩展。

划分翼缘表面和过渡到腹板处流动区的坐标 x_1 及 x_{II} , 是以截面 x 上的力矩

$$M_x = 4M_a \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (22)$$

等于内力力矩 M_T 或 M_{II} 的条件来决定。由这些方程式求得:

$$\left. \begin{aligned} x_T &= \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_T}{M_a}}\right); \\ x_{II} &= \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{II}}{M_a}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

图 5 所示为 A624a 工字梁在不同 v_a 值的情况下流动区的扩展线。

在 $x = \frac{l}{2}$ 截面上的力矩 M_a 等于 $\frac{q_v l^2}{8}$, 并等于内力力矩(6)。

积分弯曲微分方程式(7)及(8), 可以近似算出跨度中央的相对挠度:

$$\left(\frac{y}{l}\right) = \frac{1}{12} \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{h} r, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } r &= 8 \frac{M_a}{M_T} \frac{x_T^3}{l^3} \left(4 - 3 \frac{x_T}{l}\right) + 12 \frac{x_{II}^2 - x_T^2}{l^2} + \\ &+ 4(v_{II} - 1) \frac{x_{II} - x_T}{l} \frac{2x_{II} + x_T}{l} + \\ &+ 6 \sqrt{\frac{M_T}{M_a} \frac{1 - k_1}{2\alpha}} \ln \frac{\frac{v_{II}}{v_a}}{1 - \sqrt{1 - \frac{v_{II}^2}{v_a^2}}} + \\ &+ \frac{3}{\alpha} \frac{1 - k_1}{v_{II}} \frac{M_T}{M_a} \left(\frac{v_{II}}{v_a} - 1\right); \end{aligned}$$

$$v_n = \frac{1}{k_2}; \quad \frac{x_r}{l} \text{ 和 } \frac{x_n}{l} \text{——參閱公式(23)}。$$

第五个阶段，腹板范围内的硬化（ $v_a > \frac{\mu}{k_2}$ ）。

随着参数 $v_a > \mu$ 的增大，翼缘上出现硬化。当 $v_a > \frac{\mu}{k_2}$ 时，硬化在腹板范围内扩展。

图6所示为流动及硬化区扩展简图。决定流动及硬化区在梁长度上最特出的点的坐标 x_y 和 $x_{y,n}$ 可依下式计算：

$$\left. \begin{aligned} x_y &= \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_y}{M_a}} \right); \\ x_{y,n} &= \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{y,n}}{M_a}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中 M_y 及 $M_{y,n}$ ——按公式(16)决定；

x_r 及 x_n ——可按公式(23)计算。

跨度中央的相对挠度 $\frac{y}{l}$ 可用积分 方程式(7)及(8)的方法近似算出，并以相似于函数(10)的綫函数来代替II、IV、V段的复杂算式 v_x ：

$$\frac{y}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma_r}{E} \frac{l}{h} r, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } r &= \frac{3\mu}{k_2} + 2 \left(v_a - \frac{\mu}{k_2} \right) \frac{l - x_{y,n} \left(4 \frac{x_{y,n}^2}{l^2} - 3 \right)}{l - 2x_{y,n}} - \\ &\quad - 6 \frac{M_r}{M_a} \sqrt{\frac{1-k_1}{2\alpha}} (Q_n^{1/2} - Q_y^{1/2}) - \\ &\quad - \frac{12}{5} \sqrt{\frac{M_r}{M_a} \frac{1-k_1}{2\alpha}} \ln \frac{v_y + Q_y^{1/2}}{v_n + Q_n^{1/2}} + 4 \left(A_1 \frac{x_r^2}{l^2} + \right. \\ &\quad \left. + A_n \frac{x_n^2}{l^2} + A_y \frac{x_y^2}{l^2} + A_{y,n} \frac{x_{y,n}^2}{l^2} \right); \end{aligned}$$