大學用書

高等應用數學

上冊

(數字解釋微積分)

Dr. JEROME C. R. LI 著

袁丕志
張金裕 譯

維新書局印行

大學用書

高等應用數學

上　冊

(數字解釋微積分)

Dr. JEROME C. R. LI 著

袁　丕

張　金　裕　譯

維新書局印行

中華民國五十八年九月初版

高等應用數學

上　冊

基本定價參圓正

著　者：Dr. JEROME C. R. LI

譯　者：袁　丕　志
　　　　張　金　裕

發行人：蔣　紀　周

內政部登記證內版臺業字第一一二一號

出版者・印刷者・發行者

維　新　書　局

臺北市館前路六十七號

郵儲劃撥六一八五號

原　序

計算數學 (Numerical Mathematics) 主要爲討論基本微積分之書籍。其特點爲以數字與算術運算，作爲表達數學觀念之工具。主要目的乃在解釋微分與積分之意義。

本書並不强調數學之證明，主要利用數字闡明積分公式之意義。例如，利用三角函數表以說明積分

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

之意義。

本書並非針對某一種程度之學生。目前作者亦難確定可能對那一種學生有用。但在著此書時，作者本人認爲對社會與生物學科之研究生爲最有幫助。因爲此類學生在大學時代，很少或者沒有大學數學之訓練，但在研究院時，忽然需要矩陣與微積分之智識。此時該等學生面臨着缺乏必須之數學知識，但又不願放棄研究院之攻讀機會。作者現擬以本書解決這個問題。作者深信，這些學生不需老師之幫助，即可瞭解本書。此乃本書所以多用文字加以反復說明之故。

本書對讀者數學程度之要求，僅爲高等代數。關於三角及解析幾何並非必須。因這些項目均已包括於本書之內。

本書以一章專門討論矩陣代數。因爲矩陣現已成爲多數學科所喜用之工具。但删去該章並不影響全書之連續性。

本書並不討論，微積分對物理及工程等之傳統應用。因爲這類之應用，並非可用日常生活之慣例，加以譬喻。

儘管本書所用之名稱爲計算數學，但其並非爲數字微積分之書籍。本書所用之方法，並未超過梯形法則與辛普遜法則之範圍。

本書包括十五章；每章分成數節，每節均加以編號，例如，第12章之第 4 節稱爲§12.4。

本書多處採用前後參閱制。讀者可能經常須參閱某些方程式或圖表。爲參閱方便起見，本書最後附有圖表之索引。

對於重要之方程式均加以編號，每節爲一單元。於一方程式初次出現時，以號碼爲其標誌，例如方程式 (2)。若在另一節指定參閱此方程式時，則另冠之以該節之編號，例如§12.4方程式(2)。

至於各圖表之編號，與其出現之章節編號相同。若數表或數圖在同一節內出現，則另加英文字母區別之。例如表12.4a與12.4b爲§12.4之第一表與第二表。

若讀本書欲練習每一例題與習題，則應有計算機之幫助，較爲方便，至於電腦並非需要，苟有此等工具，則更可給讀者練習使用現代計算工具之經驗。

本書後面附有習題解答，所有之問題均爲模仿之性質，因其重點在測驗讀者對本書之瞭解程度，而非訓練其想像力。若讀者發覺不能解出問題時，宜重加熟讀，而不宜苦思。

李景仁

一九六五年七月

譯者的話

高等應用數學，原名爲 Numerical Mathematics。

現在本省各大專院校之學生，必須通過大專聯考才有機會就讀。然而聯考又分爲甲、乙、丙、丁四組。因此考試科目，亦因組別之不同而有差異。數學一科，雖爲每組皆考之共同科目，卻因組別之不同，而題目有難易之分。是以一般視數學爲畏途之學生，只好避重就輕，對於數學不加準備者，比比皆是。俟踏入大學之門後，其所學之科系，則往往又非應用數學不可。屆時倘因數學根基太差，則對科學之研究，必將事倍而功不及半。

吾等有見於此，爲幫助數學根基較差，而對科學之研究，又有濃厚興趣者，爰將吾師 Dr. Jerome C. R. Li 所著之 Numerical Mathematics 一書譯成中文。

本書內容及編排方式，詳見原著序文，於此不再贅述。吾等所要强調者，乃本書不僅適於研習社會與生物科學之研究生，尤其對於大學各學系，僅具代數知識之學生，更有所裨益。彼等若能精研本書，則本書必能導其善用數學以研究科學。至於五年制專科學校，四，五年級之學生研習應用數學者，採用本書爲教本，尤爲適宜，特於此加以介紹。

本書出版倉卒，譯者學識淺薄，失誤之處，在所難免。尚祈先進學者，不吝賜教，期於再版時，重行修正，以求完善。

譯者 袁丕志 張金裕 民國五十八年九月九日

高等應用數學

上冊目次

第一章　緒　　論

第二章　代　　數

第三章 矩　　陣

第四章 函數關係

第五章 微分—有限區間

第六章 微分—微小區間

第七章 積分—有限區間

第八章 積分—微小區間

高等應用數學

第　一　章

緒　　論

（INTRODUCTION）

本書主要乃以數字與算術之運算，說明數學之基本原理及其應用，於討論正題之前，有關數字及運算應注意的事項，首先在本章內加以說明。

§1.1　演繹法 (Deduction)

數學乃演繹法的一種工具，根據已知條件，無需加以實驗，即可導出結果。例如一孩童幫人打雜，第一天賺 3.50 元，第二天賺4.50元勿需再問，人人都知該一孩童在兩天內共賺 8.00 元。因爲每天所賺的錢，已經知道，故兩天所賺的總額即可算出來。

此一簡單的例子，即在說明數學的應用及其限制條件，只要知道每日的賺款，一個數學家不需費神，即可告訴吾人該孩童兩日的賺款總額。然而，如果沒有已知條件，一個數學家，不論如何聰明，亦無法回答該孩童兩日內終究賺了多少錢？

數學家的工作，並非無中生有，乃是根據已知的條件去演繹或導出一些結果。所得的答案乃根據問題之本身而產生。

此可以解方程式爲例，加以說明，假設有一方程式:

$$3x-6=0$$

其答案是

$$x=2$$

該一方程式所問者爲: 何數的 3 倍減去 6 可等於零？ 要回答此一問題，吾人須先將此問題之本身，重新加以組織， 其步驟: (1) 於該一方程式等號之兩邊各加上 6，卽得

$$3x=6。$$

(2) 再將上式之兩邊各除以 3 ,卽得答案爲

$$x=2。$$

其意卽謂 2 的 3 倍減去 6 等於零。

由上例可知，數學所能回答的問題，乃是包含其答案在內者。**故數學不在尋找問題的答案，而是從問題之本身將其答案顯示或導引出來。**

如果問題本身不含有答案，則不能用數學來作答。例如美國的首都在那裏？是不能用數學方法來作答的。該一問題之答案是華盛頓府(Washington D. C.)，由美國的首都幾個字裏，無論應用何種運算方法決不會得到答案。

但吾人不可誤解，以爲數學僅能由已知條件，演繹出某些結果，卽謂其毫無用處。事實上，利用數學可從少數的事實，導出許多的結果。惟一所受限制的， 乃是一個人之想像力而已。 這種現象， 猶如吾人用26個英文字母，表達許多不同的觀念，一個創作家，無需再去發明新字母,僅僅用原有的 26 個字母，重新加以排列，卽可表達出新觀念，是一樣的道理。

§1.2 數字之用途 (Uses of Numbers)

數字的主要用途爲; 計數,次序,度量以及作爲代表的符號等等。

例如計數 1，2，3 等是。吾人對於數字最熟習的用法，爲排列次序，如第一，第二，第三等等；其次作爲度量之用者，如 6 呎高，35 度等。近代對於數字的用法更加廣泛，如電話號碼及地區編號等，皆用數字表示。

數字之用於次序者，有兩種不同的體系，一爲由 1 開始，另一則爲由零開始，例如高樓大厦的層數，在美國標示爲第一層，第二層，第三層等是。但同樣層數的建築物，在英國則標示爲地面層，第一層，第二層等。其中之地面層即爲表示第零層的意思，此處吾人對英國的這種表示方法，也許感覺不習慣，任何人都會覺得由 1 開始才是順理成章的事。曾經有過計數自零開始嗎？試看美國人計算出生的年齡，在小孩出生滿一週歲時，才謂第一個生日，而小孩眞正出生的那一天，並沒有將其視爲第一個生日計算在內，而其出生的這一天，毫無疑問的，視爲第零個生日了。從這種觀點來看，吾人又可想像到，應用這種計算生日的次序又很自然。但這種計算方法，不論其自然也吧，不自然也吧，均是毫無道理可言的。而在中國計算出生的年齡，則由出生之日，即算爲第一個生日，依次爲第二，第三個生日等等；又如美國計算高樓層數的次序相同。所以在中國的小孩，滿一週歲時，我們稱之爲第二個生日，謂小孩已經兩歲了。當我們爲人祝賀五十大壽時，事實上他僅僅才滿 49 歲而已。

這兩種計數次序的體系，均同樣實用。重要的，在一個國家之內，能採用符合一致的要求即可。然而在我們翻譯外國語言時，就得當心，特別注意這兩種不同的用法。

計數次序的這兩種體系，吾人均使用。例如下列四項

$$a_0 \qquad a_1 \qquad a_2 \qquad a_3$$

分別稱爲第零，第一，第二及第三項。若用另一種計數次序之體系，

則上列四項的次序爲

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4$$

則又分別稱爲第一，第二，第三及第四項了。當吾人使用這兩種計數體系時，只要在同一字母之下方，另加符合一致的標記卽可。

工具之發明，使吾人得以衡量各種事物與現象，並使其與數字發生關聯，譬如一個人的身材，不僅可以用高或矮來形容他，並且可以用數目來表示出他的高度，如 5 尺或 6 尺等是。再如氣候，吾人不僅可以用冷或熱來描述其變化情形，並且亦可以用溫度計加以測量，以數字表示之，如今日氣溫爲 $80°F$ 等是。由於各種事物與現象的數量化，才使科學家們，能以公式將定律表示出來。

現代對於數字的應用非常廣泛。不久以前，以數字代表人，僅用於監獄的人犯，但是現在許多場所，均用號碼來代表人物。例如一個工廠，將每一員工加以編號；再如吾人繳納所得稅時，也是用號碼代表，住的房子有門牌號碼，使用的電話有電話號碼，汽車的牌照用號碼，道路用號碼，第一街，第二街等等，銀行的戶頭用號碼，所開的支票上亦有號碼等等。現在用數字爲代表的例子，不勝枚舉，但是有人非常討厭數字，可是無論如何，用數字來作爲代表各種事物的符號，其用途愈來愈廣泛，就如同以機器來代替各種人工，是不可避免的，其道理完全相同。

§1.3 點與間隔 (Point and Interval)

在幾何學上，一條水平直線上的點，可用數字加以表示，而直線上任意兩點間之間隔，亦可用數字加以表示。如圖 1.3 所示；水平直線下面的 1，2，3，4 及 5，卽爲表示直線上之五個點，而在直線上面的 1，2，3及 4，乃表明不相重疊的四個間隔，卽 1 至 2，2 至 3，3 至

4及4至5。從點1至點5間之長度， 稱之爲距離或稱爲全距。 有關點，間隔及距離等諸名詞，在以後各章均常用到。

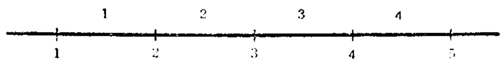

圖 1.3 由5點連成的四個間隔

在數學中，任意相異兩點之間，含有無限的數字，數與數之間經常有無限的數字存在，例如1與2之間，若吾人採用一位小數，該間隔內，則僅有9個不同的數字；即

1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9。

若在該兩點之間，所有數字均採用兩位有效小數，則在同一間隔內，將有99個不同的數字即

1.01 1.02 1.03 1.04 ··· 1.98 1.99。

若採用三位有效小數，以至於無限的有效小數，則在任意兩點之間，將有無窮的數字。在現代表示一個數值的數字，其位數通常均是有限的。

吾人日常生活中，對於所用的點與間隔的區別，經常是混淆不清。例如一個人的年齡爲21歲， 表示一個點， 然而事實上，乃是一個人的第21個生日至第22個生日之間的一段時間。再如測量一個人的高度爲72寸乃表示一個點，但若加以精確的測量，該人的高度是在71.5寸至72.5寸之間，所測量的72寸之數， 乃僅僅表示該人的高度，與71寸及73寸相比較，更接近於72寸而已。事實上，任何數之尾數由捨入而得者，皆爲一種間隔的觀念。

§1.4 0 與 1 (Zero and One)

初學數學的人，對於 0 與 1 這兩個簡單的數字，經常是分不清

楚。即使一個大學一年級的學生，也是照樣犯這種錯誤，如

$$\frac{1250}{1250}=0。$$

甚至於僅僅告訴他上式是錯的，他立刻即會改正過來，像這一類的錯誤，都是由於粗心大意所造成，但這種錯誤的發生，是有其原因的。

前述兩種計數次序的體系，是增加吾人困擾的主因。當將一組事項作有次序的編號時，吾人可自 0 開頭，亦可由 1 開始。但很少有人注意這是兩種不同的計數體系，此種對 0 與 1 不關心的態度，影響到吾人之計算結果。

數字中之 0 與 1 在表面上另有相似之處，若自一數 n 加上 0 或減去 0，所得之和或差仍爲 n，即

$$n+0=n$$

與

$$n-0=n。$$

但當該一數 n 乘以 1 或除以 1 時，所得之積或商仍爲 n 即

$$n\times 1=n(1)=n$$

與

$$n\div 1=n/1=n。$$

由以上的事實可知，當如此運算時，0 與 1 對一數 n 之值均無變動，仍爲 n。由於這種情形，亦可能導致錯誤的印象，以爲 0 與 1 是可以交換應用的。吾人應知，當一個數加上零或減去零對原數不變，同樣一個數乘以 1 或除以 1 對原數也是不變的。

更有甚者，以兩種不同的方法，比較一對數字時，亦可能使吾人對 0 與 1 分不清。例如某一大學，其學生註册人數，由 1,250 人增至 1,500 人，其增加之人數，可由下列兩種方法之一加以表示，一種方