场论

莫　撼
邓居智　编著

刘庆成　主审

原子能出版社

东华理工学院核特色系列教材

场　　论

莫　撼
邓居智　编著

刘庆成　主审

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

场论/莫撼,邓居智编著. —北京:原子能出版社,2006.10
ISBN 7-5022-3661-9

Ⅰ.场 Ⅱ.①莫… ②邓… Ⅲ.场论 Ⅳ.0412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 048510 号

内容简介

《场论》是一本以数学方法研究地球物理场的教科书。本书共分五章和七个附录。其中第一章介绍了教授《场论》中主要用到的数学工具,第二章至第五章则分别介绍和研究引力场、稳定电场、稳定磁场以及变电磁场的性质、规律和它们的计算方法。附录中则主要收集了《场论》的相关公式以及电磁学中不同单位制的转换关系,并附有习题答案。

本书可作为"勘探技术与工程"本科专业的专业基础课程的教学用书,亦可用作其他从事物探专业的教师、工程技术人员的参考书。

场 论

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑 谭 俊
责任校对 李建慧
责任印制 丁怀兰
印 刷 保定市中画美凯印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 18.375
字 数 456 千字
版 次 2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5022-3661-9
经 销 全国新华书店
定 价 **38.00 元**

 网址:http://www.aep.com.cn

总　序

东华理工学院（原华东地质学院）创建于1956年，经过近50年的办学历程，该院形成了以本科教育为主体，以研究生教育为先导，以高职、专科、成人教育为补充的多层次办学格局，发展成为一所以工为主，理工结合，文、管、经、法兼备的多科性普通高等学校。

在光荣而曲折的办学历程中，东华理工学院始终牢记办学使命，形成、保持、发展了鲜明的“东华理工特色”：**艰苦奋斗，为国奉献，构建核军工学科群优势**。伴随着祖国核工业前进的步伐，学院自力更生，艰苦奋斗，励精图治，勤俭办学，成为我国核工业开路先锋——核燃料循环工程人才培养的摇篮，为我国国防科技工业和社会经济发展做出了重大贡献。面对新的挑战和机遇，学院紧紧抓住发展这个第一要务，牢记“两个务必”，以邓小平理论和“三个代表”重要思想为指导，与时俱进，开拓创新，以质量求生存，以特色求发展，以社会需求为导向，主动适应高等教育由精英式教育向大众化教育的转变，稳定外延，注重内涵拓展和可持续发展，为早日实现“省内一流，全国知名，部分优势学科进入国际先进行列”而不懈努力。

东华理工学院被联合国国际原子能机构指定为铀矿地质和同位素水文学高级培训中心以及东亚地区同位素水文数据库主办单位，学院的国家级“分析测试研究中心”被国际原子能机构指定为参比实验室。依托“核设施数字工程实验中心”和“地理信息与数字影像技术研究中

心”建设的“江西省空间信息与数字国土实验室”，于2004年2月被确定为省级重点实验室。2005年，“核资源与环境工程”省、部共建教育部重点实验室又获批准立项建设。

为了系统地总结东华理工学院在核科学技术相关学科教学和科研中积累的知识和经验，更好地培养核科技人才，促进我国核科技事业的发展，我院决定组织出版《东华理工学院核特色系列教材》，并选定《应用水文地球化学》、《水文地球化学》、《场论》、《场论解题指南》、《核辐射测量原理》、《水文地质学》、《环境水文地质学》、《铀矿石的化学分析》、《同位素水文学导论》和《应用地球物理仪器》等10本教材首批出版，今后还将组织撰写更多的特色教材纳入本教材系列。

《东华理工学院核特色系列教材》出版委员会

前 言

《场论》是一本以数学方法研究地球物理场的教科书。本书主要介绍和研究引力场、稳定电场、稳定磁场以及时变电磁场的性质、规律和它们的计算方法。它是“勘查技术与工程”本科专业的专业基础课程，是学习“重力勘探”、“磁法勘探”、“电法勘探”、“电磁勘探”等专业课程的基础。

全书共分五章和七个附录，其中第一章介绍了教授《场论》中主要用到的数学工具，以方便学生学习时查阅，但是否作为讲授的内容，应视学生的具体情况而定。第二章至第五章则分别介绍和研究引力场、稳定电场、稳定磁场以及时变电磁场的性质、规律和它们的计算方法，是本书的主要部分。附录中则主要收集了《场论》的相关公式以及电磁学中不同单位制的转换关系，并附有习题答案。本书亦可用作其他从事物探专业的教师、工程技术人员的参考书。

本书是在作者二十多年《场论》教学的基础上编写而成的，书中各物理量均采用中华人民共和国法定计量单位。书中着重基本概念和理论的讲述，在对场的分析和推理过程中力求准确和严格，同时又尽量做到深入浅出，并尽可能地与专业的需要和特点相联系。把抽象和枯燥的数学推导与生动形象的物理场相结合是本书的一大特点，也是学习《场论》时必须强调注意的。注重计算能力的训练是本书的另一特点，为此，书中安排了大量的例题以演示和讨论各种计算方法，在每章的后面均附有适量的习题，供学生练习用。

本书由“地球探测与信息技术”重点学科资助。本书第一章、第三章、第四章和第五章由莫撼编写，第二章以及附录由邓居智编写。全书由刘庆成主审，莫撼审校，邓居智负责图件的制作。在编写本书过程中得到了龚育龄教授和黄临平教授的大力支持，文字工作还得到了朱海军和张英德同学的大力协助，在此致以深切的谢意。

由于水平所限，书中难免仍有疏漏之处，敬请读者提出宝贵意见。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

绪 论

场论，顾名思义，就是研究各种物理场的分布及其相互作用的理论。物体在天然或人工激发的条件下在其周围形成各种各样的物理场，如核辐射场、引力场、电磁场、弹性波场等等。这些物理场的性质、分布特征和规律与物体的物理性质和几何特征有密切关系。应用地球物理学（俗称物探）就是运用物理学的原理、方法和仪器以观测和研究地球物理场空间与时间的分布规律，借以实现地质勘查或寻查埋藏物的一门应用性学科。其中：以研究核辐射场为基础的称为核勘查；以研究引力场为基础的称为重力勘查；以研究磁场为基础的称为磁勘查；以研究电场和电磁感应场为基础的称为电勘查（包括电磁感应法）；以研究弹性波场为基础的称为地震勘查；以研究地热场为基础的称为地热勘查等。因此，场论是为学习应用地球物理学打好基础的一门重要课程。

场论是在学生已学完相应高等数学和物理学后继续学习的后续课程。它既是利用数学工具更为深入地研究各种物理场的性质及其时空分布规律的一门学科，又是各种应用地球物理方法的综合性理论基础课。因此，场论在应用地球物理专业的课程中，起到承前启后的作用，是十分重要的。

早在几千年以前，我们的祖先就已经发现地磁的现象并加以利用。经过长期的生产和生活实践，人们逐渐认识到，在客观世界所进行的一切物理、化学过程中，存在着某种物质客体。这种物质客体的存在是不以人们意志为转移的。我们比较熟悉的物质客体的存在形式是由分子、原子所组成的物体，这样的物质客体一般来说比较容易看到或感觉到它们的存在。而物质客体的另一种存在形式——场，人们就不太容易感觉它的存在。虽然人们早就谈论过引力场、电磁场这类名词，但作为物质客体的形式，深入认识它们，还是近代的事。随着物理学的不断发展，尤其是近代物理学的崛起，场的物质性越来越为人们所认识，场是物质的一种形态已成为大家的共识。

具有一定的质量、能量和动量是物质客体普遍的属性。物理学家早在20世纪初就发现了光（电磁波）对固体和液体施加的压力。这说明电磁场（电磁波）和其他物质形式一样，具有确定的能量和动量。和其他物质一样，场遵从能量守恒及转换定律和动量守恒及转换定律。

在一定条件下，物质客体的一种存在形式可以产生物质客体的另一种存在形式——场。如带电体产生电场；电流产生磁场；质量物体产生引力场等等。一种场也可以转换为另一种场，如时变电场可以转换为时变磁场等。

但是，我们也应注意到场作为物质客体的一种形态，它也必然与由原子组成的物质客体具有不同的特点。例如，物体在空间占有一定的位置，即是说物体在空间的分布是有限的、不连续的，而场在空间的分布是无限的、连续的（在一定条件下，场的分布可以是有限的）。又如物体占有的空间不可能被其他物体所占有，而场则不同，在同一空间可以存在各种不同的场。在引力场空间，电磁场照样可以存在。场还能渗透到物体占有的空间之中。例如引力场存在于质量物体内部，电场存在于介质内部等等。此时场可能改变物体的状态，而物体也可能影响场

的分布。例如，当一质量物体放在引力场之中时，引力场会改变物体的状态，而物体也会影响引力场的分布。

在与时间无关的稳定场中，场的存在总是与某种确定的实物联系着的。例如，引力场的存在与质量物体的存在相联系；静电场的存在与相对静止的带电物体的存在相联系；稳定磁场的存在与稳定电流的存在相联系，等等。我们把这些物质（质量、电荷、电流等等）称作场源。场和场源是同时并存于空间的两种不同形态的物质。而在时变场中，场可以独立于场源而存在，例如在时变电磁场中，即使初始的激发源已经消失，电磁场仍然存在，并以波的形式在空间传播。

场和场源之间的关系是场论研究的主要内容之一。经过长期生产和生活实践以及不懈的科学实验，人们已总结出了场和场源关系的基本规律。例如万有引力定律、库仑定律、毕奥—沙伐尔定律、法拉第电磁感应定律等等。根据场源在空间的分布，我们就有可能求出相应的场在空间的分布。反之，我们也可以根据场的空间分布，反演场源在空间的分布，这正是地球物理勘查的目标。

场与物体之间有力的作用，例如引力场施力于质量物体；电场施力于带电物体；磁场施力于电流，这也正是场的物质性的一个有力证明。

为使读者对本书有一个大致的了解，现将本书的主要内容简介如下。

全书共分五章。

第一章：场论的数学基础

本章先从矢场分析讲起，阐明物理场中标量和矢量的概念，进而介绍描述标量场的空间变化率，以及矢量场的聚散程度和涡旋特征的三个基本概念——梯度、散度、旋度的数学和物理意义，并讨论了矢场分析中的两个重要公式——高斯公式和斯托克公式。

本章的第二部分将向读者介绍几个场论中常见的微分方程——拉普拉斯方程、亥姆霍兹方程和波动方程的分离变量解法，并扼要阐明勒让德函数、贝塞尔函数以及富氏变换和拉普拉斯变换的基本性质。这些都是研究地球物理场的重要数学工具。读者可根据需要选读其中的内容，教师可以根据学生的数学水平选取某些段节作为授课之用。

第二章：引力场

本章第一部分从万有引力定律出发，导出了描述引力场强度的公式，并证明引力场为无旋有源场。引出了引力位的概念，导出了引力位的泊松方程和它的定解条件。本章第二部分介绍了地球重力场的概念，为以后学习重力勘查打下基础。

第三章：稳定电场

本章第一部分从库仑定律出发，首先讨论了真空中和介质中静电场的基本性质，在此基础上导出了电势的泊松方程及定解条件。本章的第二部分介绍了稳定电流电场的性质，电势的拉普拉斯方程及定解条件，为学习直流电勘查打下理论基础。

第四章：稳定磁场

本章第一部分从安培定律和毕奥—沙伐尔定律出发，讨论了稳定磁场的基本性质，引出了磁矢势的概念，在此基础上导出了磁矢势的微分方程及定解条件。本章的第二部分介绍了磁标势的定义，它所满足的微分方程及定解条件，为学习磁勘查打下理论基础。最后，本章还介绍了磁标势与引力势的关系，引出了泊松体的概念，为重磁数据处理补充了一部分理论基础。

第五章：时变电磁场

本章在麦克斯韦方程组的基础上建立了时变电磁场的波动方程。详细讨论了平面单色波在介质中传播的一般规律，并介绍了电磁场矢势和标势的波动方程及它们的定解条件，为交流电勘查的学习打下良好的数理基础。

本章的附录中给出了各章的主要公式以及不同单位制中电磁学公式的相互转换，为读者阅读其他文献提供了方便。

第一章　场论的数学基础

本章将简要地介绍在场论中经常要用到的数学方法。在矢场分析中将讨论梯度、散度和旋度及其运算，这是分析、计算引力场和电磁场的基本数学工具。在偏微分方程和特殊函数中着重讨论了拉普拉斯方程和波动方程的分离变量解法，以及勒让德函数和贝塞尔函数的基本性质，这是大多数物理场研究中经常要接触到的数学问题。富氏变换和拉氏变换在物理场的频率域分析中有着十分广泛的应用。由于物探数据具有离散和随机性的特点，因此，在对物探数据进行处理时，统计分析将是一个十分有用的数学工具，因此，也专门进行了讨论。

第一节　矢场分析

一、矢函数及其运算

矢场分析是场论中最基本的数学工具之一。在研究物理场时，通常把仅由坐标变量 (x, y, z) 和时间变量 (t) 所惟一确定的物理量称为标量，并以标函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 来表示，例如温度 $T(x, y, z, t)$；密度 $\rho(x, y, z, t)$ 等都是标函数。标函数的定义域称为标量场，例如温度场、密度场等。

有些物理场不随时间而变化，这种场称为稳定场，例如引力场、静电场、稳定磁场就属于稳定场。另一些物理场与时间有关，例如变速场、时变电磁场等，称之为时变场。

如果物理量的大小（强弱）以及方向均与坐标变量无关，则由它组成的物理场称为均匀场。虽然绝对的稳定场和绝对的均匀场并不存在，但为了研究方便，常把在某一时间或空间范围内变化不大的场视作稳定场或均匀场。

另外，有些物理场不能用标函数描述，如速度场，只知道场中各点的速度数值是不够的，还必须知道各点速度的方向。因此引入矢函数的概念。

1. 矢函数的定义

如果在域 Ω 内对每一个数性变量 q，矢量 $\boldsymbol{a}$ 总有一确定的值（包括其大小和方向）和它对应，则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 是数性变量 q 的矢函数，记为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(q) \qquad \in \Omega \tag{1.1}$$

式中，Ω 为矢函数 $\boldsymbol{a}$ 的定义域。数性变量 q 可以是坐标变量也可以是时间变量，或兼而有之。例如在研究静电场时，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 就是坐标变量的矢函数，而在研究时变电磁场时，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 就不仅是坐标变量，而且也是时间变量的矢函数。在本章中，除非特别声明，矢函数仅是坐标变量的函数。矢函数 $\boldsymbol{a}$ 可以在任何坐标系中进行分解，例如在直角坐标系中就有

$$\boldsymbol{a} = a_x(q)\boldsymbol{i} + a_y(q)\boldsymbol{j} + a_z(q)\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为直角坐标系三个坐标轴（x 轴、y 轴、z 轴）方向的单位矢量。

2. 矢函数的运算

对矢函数可以进行求导与微分。若矢函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(q)$ 在域 Ω 内连续，并且 q_0 和 $(q_0+\Delta q)$ 都在域内，则极限

$$\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(q_0+\Delta q)-\boldsymbol{a}(q_0)}{\Delta q} \tag{1.3}$$

如果存在，则称 $\boldsymbol{a}(q)$ 在 q_0 是可导的。该极限就称为 $\boldsymbol{a}(q)$ 在 q_0 的导数，用 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}q}\right)_{q_0}$ 或 $\boldsymbol{a}'(q_0)$ 表示。显然，矢函数的导数仍为一矢量，并且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

类似地，可以定义矢函数的二阶、三阶导数。

可以用一个质点在曲线上的位移这一常见的物理现象来说明矢函数导数的几何意义和物理意义(图 1.1)。显然，矢径 $\boldsymbol{r}(q)$ 是质点坐标位置的函数，这里 q 表示质点的坐标变量。设曲线 l 上 M 点坐标变量为 q，N 点坐标变量为 $(q+\Delta q)$，由图 1.1 可知，矢线 $\boldsymbol{MN}$ 可表示为 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{r}(q+\Delta q)-\boldsymbol{r}(q)$，两边除以 Δq，并令 $\Delta q\to 0$，取极限，便有

$$\boldsymbol{r}'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\boldsymbol{MN}}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(q+\Delta q)-\boldsymbol{r}(q)}{\Delta q}$$

这时 $\boldsymbol{MN}$ 的方向与过 M 点的切线方向相同，并指向坐标变量增加的方向。因此 $\boldsymbol{r}'(q)$ 表示在 M 点上矢径 $\boldsymbol{r}(q)$ 对坐标变量的变化率，方向为 M 点的切线，并指向坐标变量增加的方向。

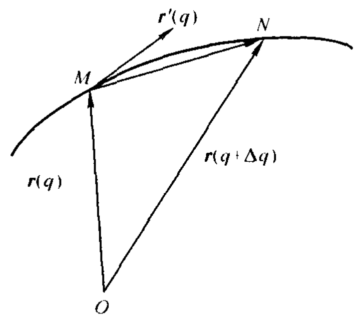

图 1.1 矢函数导数的计算

在上述例子中，q 也可以是时间变量，这时 $\frac{\boldsymbol{MN}}{\Delta q}$ 就表示在时间间隔 Δq 内质点位移的平均速度。事实上，q 通常既是坐标变量又是时间变量，这时 $\boldsymbol{r}'(q)$ 表示 M 点在 q 时刻的速度，其方向沿 M 点的切线方向。

矢量微分定义为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)=\boldsymbol{a}'(q)\mathrm{d}q \tag{1.5}$$

同样，矢量微分也可以用其分量微分来表示

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)=\mathrm{d}a_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}a_y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}a_z\boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

如果矢函数 $\boldsymbol{a}(q)$、$\boldsymbol{b}(q)$ 和标函数 $\varphi(q)$ 都可导，则有下列微分法则成立

$$[\boldsymbol{a}(q)+\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)+\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.7}$$

$$[\varphi(q)\boldsymbol{a}(q)]'=\varphi'(q)\boldsymbol{a}(q)+\varphi(q)\boldsymbol{a}'(q) \tag{1.8}$$

$$[\boldsymbol{a}(q)\cdot\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)\cdot\boldsymbol{b}(q)+\boldsymbol{a}(q)\cdot\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.9}$$

$$[\boldsymbol{a}(q)\times\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)\times\boldsymbol{b}(q)+\boldsymbol{a}(q)\times\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.10}$$

同时还有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

其中，$q=q(t)$ 为中间变量。

矢函数不仅可以求导，也可以求积

$$\int \boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q = \boldsymbol{i}\int a_x(q)\mathrm{d}q + \boldsymbol{j}\int a_y(q)\mathrm{d}q + \boldsymbol{k}\int a_z(q)\mathrm{d}q \tag{1.12}$$

$$\int \lambda\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q = \lambda\int \boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.13}$$

$$\int [\boldsymbol{a}(q) + \boldsymbol{b}(q)]\mathrm{d}q = \int \boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q + \int \boldsymbol{b}(q)\mathrm{d}q \tag{1.14}$$

$$\int \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q = \boldsymbol{c}\cdot\int \boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.15}$$

$$\int [\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}(q)]\mathrm{d}q = \boldsymbol{c}\times\int \boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.16}$$

式中，λ 为常数，$\boldsymbol{c}$ 为常矢量。

例 1 一质点沿半径为 a 的螺线作匀线速运动，螺线方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k} \qquad (-\infty < \theta < \infty)$$

求运动质点的速度和加速度。

解：$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；式中：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta} = -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$；$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$；

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\mathrm{d}s')^2 + (b\mathrm{d}\theta)^2}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(a\mathrm{d}\theta)^2 + (b\mathrm{d}\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

式中，$\mathrm{d}s'$ 是 $\mathrm{d}s$ 在 xoy 平面上的投影。

于是：$\boldsymbol{v} = \dfrac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k})$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{a^2 + b^2}(-a\cos\theta\boldsymbol{i} - a\sin\theta\boldsymbol{j}) = \frac{-av^2}{a^2 + b^2}(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$$

二、方向导数与梯度

一个标量场通常可以表示为空间坐标的函数，除均匀场外，场中任意两点的标函数其数值一般是不相同的。因此，要想了解标量场的空间分布，就必须知道场域内任一点标函数沿各个方向的变化率。这个问题，在数学上归结为求该标函数的方向导数。在许多情况下，还必须知道标函数沿哪个方向的变化率有最大值？这个问题，在数学上就是求该标函数的梯度。

1. 方向导数

定义：设标函数 $\varphi(x,y,z)$ 在域 Ω 上连续，M 为域内任一点，过 M 点作一任意有向曲线 $\boldsymbol{l}$，曲线上 M，N 两点的弧长为 Δl，若极限

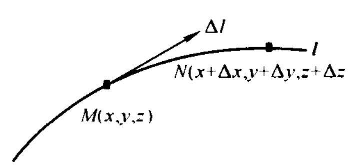

图 1.2 方向导数的计算

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi(x,y,z)}{\Delta l}$$

存在，则称此极限为标函数 $\varphi(x,y,z)$ 在 M 点沿曲线 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数。以 $\dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial l}$ 表示。

因此

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi(x,y,z)}{\Delta l} \tag{1.17}$$

式中，$\Delta\varphi(x,y,z) = \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)$，为 M 点上标函数 φ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的增量。