数学建模

高等师范院校教材

主编　李晓毅　徐兆棣

SHUXUE JIANMO

SHUXUE JIANMO

辽宁大学出版社

高等师范院校教材

数学建模

主　编　李晓毅　徐兆棣
副主编　宇永仁　孟宪吉

SHUXUE JIANMO

SHUXUE JIANMO

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/李晓毅等主编. 一沈阳：辽宁大学出版社，2006.7
ISBN 7－5610－5152－2

Ⅰ. 数...　Ⅱ. 李...　Ⅲ. 数学模型一高等学校一教材　Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 063899 号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码：110036）
印 刷 者：沈阳航空发动机研究所印刷厂
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：14.25
字　　数：360 千字
印　　数：1～1000
出版时间：2006 年 7 月第 1 版
印刷时间：2006 年 11 月第 1 次印刷
责任编辑：春　光
封面设计：本　忠
责任校对：昆　春

定　　价：28.00 元

联系电话：024－86864613
邮购热线：024－86830665
网　　址：http：//press. lnu. edu. cn
电子邮件：Lnupress@vip. 163. com

前 言

全国大学生数学建模竞赛是教育部高等教育司同中国工业与应用数学学会共同举办、面向全国高等院校学生的一项竞赛活动。这一活动对于提高学生综合素质、培养创新精神和合作精神，促进高等学校教学建设和教学改革起着重要的推动作用。目前，这一竞赛活动已成为我国高等学校中规模最大的大学生课外科技活动（引自教高司函[2002]64 号）。

大学生数学建模竞赛（全称 Mathematical Contest in Modeling.缩写为 MCM）1985 年起源于美国。由于它新颖的、富有挑战性的竞赛方式吸引了越来越多的大学生参加进来，所以很快成为了一项颇具影响的国际性赛事。我国的大学生于 1989 年开始参加了美国的 MCM，历年来都取得了较好的成绩。

自参加美国的 MCM 以来，我国数学界的有识之士也开始酝酿组织我们自己的大学生数学建模竞赛。上海市率先于 1990 年和 1991 年分别举办了数学类和非数学类的大学生数学建模竞赛，西安市也于 1992 年举办了“西安市第一届大学生数学建模竞赛”。全国性的大学生数学建模竞赛是于 1992 年举办的，当时全国有 74 所大学的 314 个代表队参加。首次举办就得到了各级领导的关心和企业界的大力支持。自此，此项赛事每年举行一次，并因其所特有的趣味性、灵活性、务实性和富有挑战性而受到大学生的青睐。

很多像牛顿一样伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师，他们将各个不同科学领域的知识同数学有机地结合起来，在不同的学科中取得了巨大的成就。如力学中的牛顿定律，电磁学中的麦克斯韦方程组，化学中的门捷列夫周期表，生物学中的孟德尔遗传定律等，都是经典学科中应用数学模型的光辉范例。目前，在计算机的支持下，数学模型在社会、经济、生态、地质、航天等方面有了更加广泛和深入的应用。因此，从某种意义上讲，数学建模是培养现代化高科技人才的重要途径。

数学建模课程是 20 世纪 80 年代初进入我国大学的。《数学模型》（第一版，姜启源编）出版于 1987 年，是我国第一本数学建模教材，当时只有少数几所学校的数学系开设这门课程。目前开设这门课程的学校已有几百所，出版的有关教材也有几十本。十多年来，几方面的因素对数学建模教学起着重要影响：首先，全国大学生数学建模竞赛，得到广大同学的热烈欢迎，以及教育部门，教师们的热情关心和支持，成为我国高校规模最大的课外科技活动，竞赛促进了数学建模教学的开展，教学又扩大了受益面，为竞赛奠定了坚实的基础。其次，计算机技术及数学软件的发展和普及，为改善、丰富数学建模课程的内容提供了条件，一些学校数学实验课、数学建模系列课的开设，给数学建模教学内容和方法的改革以很大的启示，原来数学建模课上只作理论分析、课下只作笔头练习的情况得以改进。

最后，数学建模教学和竞赛的开展，对数学教学体系、内容和方法改革起了积极的推动作用，得到众多教育界人士和教师们的认可，将数学建模的思想和方法有机地融入大学数学主干课程中去的研究与实践已经起步，教数学建模课和教数学主干课的教师互相结合与交流，在教学上得以相互借鉴与促进。

目前，随着数学建模课程在大专院校教学中的普及，有不少数学建模教材问世，但是这些教材多数是针对理工科学生编写的，而针对高等师范院校学生的教材却很少，为此，编写一套适宜高等师范院校学生的教材是当务之急。

本教材具有以下几个特点：

科学性、实用性：1.教材内容由浅到深，分为两部分，第一部分为初等数学模型部分，适合公共选修课和函授学员使用，内容相对简单，数学模型不算复杂，用初等数学的方法和少量的高等数学知识即可解决；第二部分为高等数学模型部分，适合数学、物理、计算机、生化等专业学员使用，内容相对深一些，数学模型复杂，用少量初等数学的方法和大量的高等数学知识方可解决。2.教材布局合理，按模型类型划分章节，每个模型都由实际问题引出，在学习模型的同时，学习与模型有关的数学知识，然后再给出实际问题，给学生以练习的空间，学练结合，循序渐进。3.尽可能与计算机结合，培养学生的动手能力。4.注意内容的趣味性，提高学生学习的兴趣和效率。

时代性、师范性：2003 年国家教育部出台的《普通高中数学课程标准》中，将数学建模内容正式列入其中，随后，各高等师范院校的教学计划和课程设置也都在做相应的调整和改革，将数学建模教学和竞赛作为一项重要内容，非数学专业本科生增设数学建模公共选修课，数学各专业本科生（包括专接本和函授本科生等）将原来的数学建模选修课改为必修课。鉴于此点，教材从内容、选材、引入方式上，力求新颖、实用，既结合高中教材的内容，为师范教育打下基础；同时，又结合全国大学生数学建模竞赛的题型、特点，为参加竞赛打下基础。

在实际教学时，可根据教学时数和教学对象选择教学内容。

本教材的大部分内容是编者近几年在数学建模教学中所讲授的内容，有不妥之处恳请各位专家给予批评指教。

编　者　2005 年 10 月

目　　录

第一篇　绪　论

第一章 数学建模概论

随着科学技术的迅速发展，数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中：电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置做出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制．气象工作者为了得到准确的天气预报，一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型．生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药．城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为领导层对城市规划的决策提供科学依据．厂长经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可以获得更大的经济效益．就是在日常生活如访友、采购当中，人们也会谈论找一个数学模型，优化一下出行的路线．对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁．

本章作为全书的导言和数学模型的概述，主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤，给读者以建立数学模型的全面的、初步的了解．1.1 节介绍了现实对象和它的模型的关系，给出一些模型形式，说明什么是数学模型；1.2 节阐述建立数学模型的重要意义； 1.3 节阐述建立数学模型的一般方法和步骤；1.4 节介绍数学模型的特点及数学模型的分类；1.5 节讨论建立数学模型能力的培养．

1.1　从现实对象到数学模型

人类生活在丰富多彩，变化万千的现实世界里，无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界，从而不断地创造出日新月异，五彩缤纷的物质文明和精神文明．博览会常常是集中展示这些成果的场所之一，那些五光十色，精美绝伦的展品给我们留下了深刻印象．工业展览会上，豪华、舒适的新型汽车叫人赞叹不已；农业博览会上，硕大娇艳的各种水果令人流连忘返；科技展厅里，大型水电站模型雄伟壮观，人造卫星模型高高耸立，清晰的数字图表显示着电力工业的迅速发展，和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线，核电站工程的彩色剧照前，手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍反应堆的运行机理，电影演播室里，播放着一部现代化炼钢厂实现生产自动控制的科技影片，其中既有火花四溅的钢坯浇铸情景，也有展示计算机管理和控制的框图公式和程序．

参观展览会，汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人一种亲切的感觉，可是从开阔眼界，丰富知识的角度看，电站、卫星、铁路、钢厂等这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象，以它们的各种形式的实物模型、照片、图表、公式、程序等汇集在人们面前，这些模型在短短几小时里所起的作用，恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的.

与形形色色的模型相对应，它们在现实世界的原始参照物统称为原型. 本节先讨论原型和模型，特别是数学模型的关系，再介绍数学模型的含义.

原型和模型 原型和模型是一对对偶体. 原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产管理的实际对象. 在科技领域通常是用系统过程等词汇，如电力系统、生态系统，又如钢铁冶炼过程、化学反应过程等. 本书所说的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型. 模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息减缩、提炼而构造的原型替代物.

这里特别强调构造模型的目的性. 模型不是原型原封不动的复制品，原型有各个方面和各个层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面的层次. 一个原型，为了不同的目的可以有许多不同的模型. 如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真，但是不一定会飞，而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能，在外观上不必苛求. 至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模型，则要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体. 所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定.

我们已经看到模型的各种形式. 用模型替代原型的方法来分类，模型可以分为物质模型和理想模型. 前者包括直观模型，物理模型，后者包括思维模型，符号模型，数学模型等.

直观模型 指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按照比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真，这类模型的效果是一目了然的.

物理模型 主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外观或某些特征，而且可以用来进行模拟试验，间接地研究原型的某些规律. 如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能等. 有些现象直接用原型研究非常困难，便可借助于这类模型，如地震模拟装置等. 应注意验证原型与模型之间的相似关系，以确定模拟结果的可靠性. 物理模型常可得到实用上很有价值的结果，但也存在成本高，时间长，不灵活的缺点.

思维模型 指通过人们对模型的反复认识，将获取的知识以经验形式直接储存于人脑中，从而可以根据思维和直觉做出相应的决策. 如汽车司机对方向盘的操纵，一些记忆性较强的工作的操作，大体上是靠这类模型进行的. 通常所说的某些领导凭经验做出决策也是如此. 思维模型便于接受，也可以在一定条件下得出满意结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便与人沟通.

符号模型 在一定约定条件或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定形式组合起来的描述模型. 如地图、电路图、化学结构式等. 具有简单明了、目的性强及非量化的特点.

本书专门讨论的**数学模型**则是由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法.

与数学模型有密切关系的数学模拟，主要是运用数字式计算机的**计算机模拟**. 它根据

实际系统或过程的特性，按照一定数学规律用计算机程序语言模拟实际运作状况，并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析．例如通过各种工件在不同机器上按一定工艺顺序加工的模拟，能够识别生产过程中的瓶颈环节；通过高速公路上交通情况的模拟，可以分析车辆在路段上的分布特别是堵塞的状况．与用物理模型的模拟实验相比，计算机模拟有明显的优点：成本低、时间短、重复性高、灵活性强．有人把计算机模拟作为建模的手段之一．但是数学模型在某种意义下描述了对象内在特性的数量关系，其结果容易推广，特别是得到了解析形式的答案时，更容易推广．而计算机模拟则完全模仿实际演变过程，难以得到数字结构分析对象的内在规律．当然，对于那些因内部机理过于复杂，目前尚难以建立数学模型的实际对象，用计算机模拟获得一些定量结果，可称是解决问题的有效手段．

什么是数学模型　数学模型应该说是每个人都十分熟悉的．早在学习初等代数的时候，我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了．当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的．譬如你一定解过这样的所谓“航行问题”：

甲乙两地相距 750 公里，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需 50 小时，问船速、水速各为多少?

用 x，y 分别代表船速和水速，可以列出方程：

$$(x+y)\cdot 30=750 \qquad (x-y)\cdot 50=750$$

实际上，这组方程就是上述航行问题的数学模型，列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题，方程的解 $x=20({km}/{h})$，$y=5({km}/{h})$，最终给出了航行问题的答案．

当然，真正的实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是数学模型的基本内容已经包含在解这个代数问题的过程中了．那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景做出必要的假设；用字母表示待求的未知量；用相应的物理或其他规律列出数学表达式，求出数学上的解答；用这个答案解释原问题；最后还要用实际现象来验证上述结果．

一般地说，**数学模型**可以描述为，对于现实世界的一个**特定对象**，为了一个**特定目的**，根据特有的**内在规律**，做出一些必要的**简化假设**，运用适当的**数学工具**，得到的一个**数学结构**．

需要指出，本书的重点不在于介绍显示对象的数学模型是什么样子，而是要讨论建立数学模型的全过程，建立数学模型简称为**数学建模**或**建模**．

1.2　数学建模的重要意义

数学，作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和人们生活的实际需要密切相关的．作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史．两千多年以前创立的欧几里德几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例．进入 20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域的渗透和电子计算机的出现与飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义．

1）在一般工程技术领域，数学建模仍然大有用武之地．

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程

技术领域中，数学建模的普遍性和重要性不言而喻．高速、大型计算机的飞速发展，使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题（如大型水坝的应力计算，中长期天气预报等）迎刃而解；建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术，以其快速、经济、方便等优势，大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段．

2）在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具．

无论是发展通讯、航天、微电子、自动化等高新技术本身，还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品，计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段．数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件，已经被固化于产品中，在许多高新技术领域起着核心作用，被认为是高新技术的特征之一．在这个意义上，数学不再仅仅作为一门科学，而是许多技术的基础，并且直接走向了技术的前台．国际上一位学者就提出了“高技术本质上是一种数学技术”的观点．

3）数学迅速进入一些新领域，为数学建模开拓了许多新的处女地．

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透，一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生．这里一般地说不存在作为支配关系的物理定律，当用数学方法研究这些领域中的定量关系时，数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础．在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大，为数学建模提供了广阔的新天地．马克思说过“**一门科学只有成功的运用数学时，才算达到了完善的地步**”．展望 21 世纪，数学必将大踏步的进入所有学科，数学建模将迎来蓬勃发展的新时期．

今天，在国民经济和社会活动的以下诸多方面，数学建模都有着非常具体的应用．

分析与设计 例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效；建立跨音速流和激波的数学模型，用数值模拟设计新的飞机翼型．

预报与决策 生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报等等，都要有预报模型；使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案等，是决策模型的例子．

控制与优化 电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化，要以数学模型为前提．建立大系统控制与优化的数学模型，是迫切需要和十分棘手的课题．

规划与管理 生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度，以及排队策略、物资管理等，都可以用数学规划模型解决．

数学建模与计算机技术的关系密不可分．一方面，像新型飞机设计、石油勘探数据处理中数学模型的求解当然离不开巨型计算机，而微型电脑的普及更使数学建模逐步进入人们的日常活动．比如当一位公司经理根据客户提出的产品数量、质量、交货期等要求，用手提电脑与客户进行价格谈判时，您不会怀疑他的电脑中贮存了由公司的各种资源、产品工艺流程及客户需求等数据研制的数学模型——快速报价系统和生产计划系统．另一方面，以数字化为特征的信息正以爆炸之势涌入计算机，去伪存真、归纳整理、分析现象、显示结果……，计算机需要人们给它以思维的能力，这些当然要求助于数学模型．所以**把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比作为如虎添翼，是恰如其分的．**

美国科学院一位院士总结了将数学科学转化为生产力过程中的成功和失败，得出了“数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术”的结论，认为数学“由研究到工业领域的技术转化，对加强经济竞争力具有重要意义”．而“**计算和建模重新成为中心课题，它们是**

数学科学技术转化的主要途径”.

1.3 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的问题是多种多样的，建模的目的不同，分析方法不同，采用的数学工具不同，所得的模型的类型也不同，我们不能指望归纳出若干条准则，适用于一切实际问题的数学方法．下面所谓基本方法不是针对具体问题而是从方法论意义上讲的．

数学建模的基本方法 一般来说建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种．机理分析是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，建立的模型有明确的物理和现实意义．测试分析将研究对象看作一个黑箱系统，通过系统输入，输出数据的测量和统计分析，按照一定准则找出与数据拟合的最好的模型．

面对一个实际问题用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的．如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内在特性的物理意义，建模就应以机理分析为主．而如果对象的内部规律基本上不清楚，模型不需要反映内部特性，那么就可用测试分析．

对于许多实际问题还常常将两种方法同时使用，即用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数．3.2 的人口模型就是这种情况．机理分析当然要针对具体问题来做，不可能有统一的方法，因为主要是通过实例分析来学习．测试分析有一套完整的数学方法，第十章统计线性回归是其中一小部分．以动态系统为主的测试分析称为系统辨识，是一门专门的学科．本书以后所说的数学建模主要是机理分析．

数学建模一般步骤 建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与问题性质，建模目的等有关．下面介绍的是机理分析方法建模的一般过程，如图 1-1 所示．

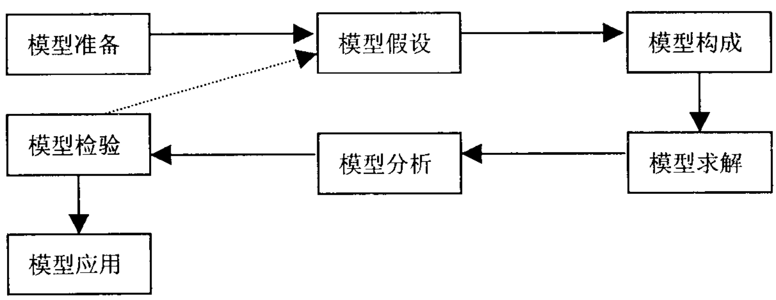

图 1-1 数学建模步骤示意图

模型准备 了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集必要的信息如现象、数据等，尽量弄清对象的主要特征，形成一个比较清晰的问题，由此初步确定用哪一类模型．情况明才能方法对．在模型准备阶段要深入调查研究，虚心向实际工作者请教，尽量掌握第一手资料．

模型假设 根据对象的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出合理的、必要的简化假设．对于建模的成败这是非常重要和困难的一步．假设作得不合理或太简单，会导致错误或无用的模型；假设做得过于详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑

进去，会使你很难或无法进行下一步的工作. 常常需要在合理与简化之间做出恰当的折衷. 通常，作为假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来源于对现象数据的分析，以及二者的综合. 想象力，洞察力，判断力，以及经验，在模型假设中起着重要作用.

模型构成 根据所作的假设，用数学的语言和符号描述对象的内在规律，建立包括常量、变量等的数学模型，如优化模型，微分方程模型，差分方程模型，图的模型等. 这里除了需要一些相关学科的专门知识外，还常需要较为广阔的应用数学知识. 要善于发挥想象力，注意使用类比法，分析对象与熟悉的其它对象的共性，借用已有的模型. 建模时还应遵循的一个原则是：尽量采用简单的数学工具，因为你的模型总是希望更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏.

模型求解 可以采用解方程，画图形，优化方法，数值计算，统计分析等各种数学方法，特别是数学软件和计算机技术.

模型分析 对求解结果进行数学上的分析，如对结果的误差分析，统计分析，模型对数据的灵敏性进行分析，对假设的强健性进行分析等.

模型检验 把求解和分析的结果翻译回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适应性. 如果结果与实际不符，问题常常出在模型假设上，应该修改，补充假设，重新建模. 这对模型是否真的有用非常关键，要以严肃认真的态度对待，有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果达到某种程度上的满意.

模型应用 应用的方式与问题的性质、建模目的有关，一般不属于本书讨论的范围.

应当指出，并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不是那么分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班，要活学活用建模的全过程.

从前面几个建模实例以及一般步骤的分析，可以将建模的过程分为表述，求解，解释，验证几个阶段，并且通过这些阶段完成从现实对象到数学建模，再从模型回到现实对象的循环，如图 1-2 所示.

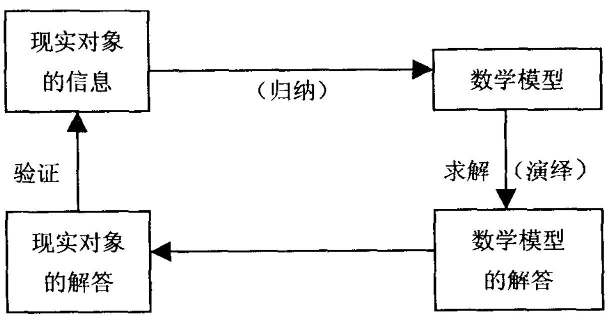

图 1-2 数学建模的全过程

表述是将现实问题翻译成抽象的数学问题，属于归纳法. 数学模型的求解则属于演绎法. 归纳是依据个别现象推出一般规律，演绎是按照普通原理考察特定对象，导出结论. 因为任何事情的本质都要通过现象来反映，必然要透过偶然来表露，所以正确的归纳不是主观盲目的，而是有客观基础的，但也往往是不精细的，带感性的，不易检验其正确性. 演绎法利用严格的逻辑推理，对解释现象，做出科学预见具有重要意义，但是它要以归纳的

结论作为公理化形式的前提，只能在这个前提下保证其正确性．因此，归纳和演绎是辩证统一的过程：归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导，解释是把数学模型的解答翻译回到现实对象，给出分析，预报，决策或者控制的结果．最后，作为这个过程的重要一环，这些结果需要用实际的信息验证．

上图也揭示了现实对象和数学模型的关系．一方面，数学模型是将现象加以归纳，抽象的产物，它源于现实，又高于现实．另一方面，只有当数学建模的结果经受住现实现象的检验时，才可以用来指导实际，完成实践——理论——实践这一循环．

1.4　数学模型的特点和分类

数学建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段，得到的模型有很多优点，也有一些弱点，下面归纳出数学模型的若干特点，读者在学习过程中可以逐步领会．

数学模型的特点

模型的逼真性和可行性　一般来说总是希望模型尽可能逼近研究对象，但是一个非常逼真的模型在数学上常常难于处理，因为不容易达到通过建模对现实的对象进行分析，预报，决策或控制的目的，即实用上不可行．另一方面，越逼真的模型越复杂，既使数学上能处理，这样的模型应用时的费用也相当高，而高费用不一定与模型取得的效益相匹配．所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性，费用与效益之间做出折衷和选择．

模型的渐进性　稍微复杂的实际问题建模时通常不可能一次成功，要经过上一节描述的建模过程的反复迭代，包括由繁到简，也包括删繁就简，以获得越来越满意的模型．在科学发展过程中随着人们认识和实践能力的提高，各门学科中的数学模型也存在着一个不断完善或者推陈出新的过程．从 19 世纪力学、热学、电学等许多学科由牛顿力学的模型主宰，到 20 世纪爱因斯坦相对论模型的建立，是模型渐进性的明显例证．

模型的强健性　模型的结构和参数常常是由模型假设和对象的信息如观测数据确定的，而假设不可能太准确，观测数据也是可以有误差的，一个好的模型应该具备下述意义的强健性：当模型假设改变时，可以导出模型结构的相应变化；当观测数据有微小改变时，模型数据也只有相应的微小变化．

模型的可移植性　模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到另外的领域．在生态，经济社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型．模型的这种性质显示了它应用的广泛性．

模型的非预制性　虽然已经发展了许多应用广泛的模型，但是实际问题是各种各样，变化万千的，不可能要求把各种模型做成预制品供你在建模时使用．模型的这种非预制性使得建模本身常常是事先没有答案的问题．在建立新的模型的过程中甚至会伴随着新的数学方法或数学概念的产生．

模型的条理性　从建模的角度考虑问题可以促使人们对现实对象的分析更全面，更深入，更具有条理性，这样既使建立的模型由于种种原因尚未达到使用的程度，对于问题的研究也是有价值的．

模型的技艺性　建模的方法与其它一些数学方法如方程解法，规划解法等是不同的，无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧．有人说，建模目前与其说是一门技术，不如说是一门艺术，是技艺性很强的技巧．经验，想象力，洞察力，判断力以及直觉，灵感

等在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识更大.

模型的局限性 这里有几个方面的含义. 第一，由数学建模得到的结论虽然具有通用性和精确性，但是因为模型是现实对象简化，理想化的结果，所以一旦将模型的结论应用于实际问题，就回到现实世界，那些被忽略简化的因素必须考虑，于是结论的通用性和精确性只是相对的、近似的. 第二，由于人们认识能力和科学技术包括数学本身发展的限制，还有不少实际问题很难得到有着实用价值的数学模型. 如一些内部机理复杂，影响因素多，测量手段不够完善，技艺性较强的生产过程，如生铁冶炼过程，常常需要开发专家系统，与建立数学模型相结合才能获得较满意的应用效果. 专家系统是一种计算机系统，它总结专家的知识和经验，模拟人类的逻辑思维过程，建立若干规则和推理途径，主要是定性分析各种实际现象并做出判断. 专家系统看作是计算机模拟的新发展. 第三，还有些领域中的问题今天尚未发展到由建模方法寻求数量关系的阶段，如中医诊断过程，目前所谓计算机辅助诊断也是属于总结著名中医的丰富临床经验的专家系统.

数学模型的分类

数学模型可以按照不同方式分类，下面介绍几种.

1. 按模型应用领域分. 如人口模型，交通模型，环境模型，生态模型，污染模型等. 范畴更大一些则形成许多边缘学科如生物数学，医学数学，数学社会学等.

2. 按建立模型的数学方法分. 如初等模型，几何模型，微分方程模型，统计回归模型，线性规划模型等.

3. 按模型的表现特性又有几种分法:

确定性模型和随机性模型 取决于是否考虑随机因素的影响. 近年来随着数学的发展，又有所谓突变性模型和模糊性模型.

静态模型和动态模型 取决于是否考虑时间因素引起的变化.

线性模型和非线性模型 取决于模型的基本关系，如微分方程是否为线性的.

离散模型和连续模型 指模型中的变量取为离散还是连续的.

虽然从本质上讲大多数实际问题是随机的，动态的，非线性的，但是由于确定性，静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，所以建模时常先考虑确定性、静态、线性模型. 连续模型便于利用微积分方法求解析解，作理论分析，而离散模型便于在计算机上作数值计算，所以用哪种模型要看具体问题而定. 在具体建模过程中将连续模型离散化，或将离散变量视为连续的，也是常采用的方法.

4. 按**建模目的**分. 有描述模型，预报模型，优化模型，决策模型，控制模型等.

5. 按对建模对象的**了解程度**分. 有所谓**白箱**模型，**灰箱**模型，**黑箱**模型. 这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关，要通过建模来揭示它的秘密. 白箱主要包括力学，电学，热学等一些机理相当清楚的学科，描述现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多已基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题. 灰箱主要指生态，气象，经济，交通等领域中机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有很多工作要做. 至于黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理很不清楚的现象. 有些工程技术问题虽然主要基于物理化学原理，但由于因素众多，关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱来处理. 当然，他们之间没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的颜色必然是由暗变亮的.

1.5　数学建模能力的培养

在详细分析了建立数学模型的全过程和数学模型的特点以后，我们看到了用建模方法解决实际问题，首先是用数学语言表述问题及构建模型，其次才是用数学工具求解构成的模型．绝大多数数学课程如微积分，线性代数，概率论，计算方法等都是讲授某一门知识和培养数学运算，逻辑推理能力的，这些数学技巧主要用来求解数学模型．用数学语言表述问题，包括模型假设，模型构造等，除了要有广博的知识和足够的经验外，特别需要丰富的想象力和敏锐的洞察力．

想象力　指人们在原有知识的基础上，将新感知的形象与记忆中的形象相互比较，重新组合，加工处理，创造出新的形象，是一种形象思维活动．

洞察力　指人们在充分占有资料的基础上，经过初步分析能迅速抓住主要矛盾，舍弃次要因素，简化问题的层次，对可以用哪些方法解决面临的问题，以及不同的方法的优劣做出判断．

类比方法和理想化方法是建模中的常用方法，他们的运用与想象力和洞察力有密切关系．**类比法**注意到研究对象与已熟悉的对象具有某些共性，比较两者的相似之处以获得对研究对象的新认识．选择什么对象进行类比，比较哪些相似的属性，在一定程度上是靠想象进行的．**理想化方法**是从观察和经验中通过想象和逻辑思维，把对象简化，纯化，使其升华到理想状态，以期更本质地揭示对象的固有规律．在一定条件下把物体看作质点，把实际位置看作数学上的点、线等都是理想化的结果．

建模过程是一种创造性思维过程，除了想象，洞察，判断这些属于形象思维、逻辑思维范畴的能力之外，直觉和灵感往往也起着不可忽略的作用．**直觉**是人们对新事物本质的极敏锐的领悟、理解或推断．**灵感**指在人们有意识或下意识思考过程中迸发出来的猜测、思路或判断．二者都具有突发性，且思维者本身往往说不清它的来路和道理．当由于各种限制利用已有知识难以对研究对象做出有效的推理和判断时，凭借相似、类比、猜测外推等思维方式及不完整、不连续、不严密的带启发性的直觉和灵感，去战略性地认识对象，是人类创造性思维的特点之一，也是人脑比按程序逻辑工作的计算机、机器人的高明之处．历史上不乏在科学家的直觉和灵感的火花中诞生假说，论证和定律．当然，直觉和灵感不是凭空产生的，他要求人们具有丰富的背景知识，对问题进行反复思考和艰苦的探索，对各种思维方法运用娴熟．相互讨论和思想交锋，特别是不同专业的成员之间探讨，是激发灵感和直觉的重要因素．所以有各种专门人才组成的所谓团体工作方式越来越受到重视．

前面说过，建模可以看作是一门艺术．艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的．一名出色的艺术家需要大量的观察和前辈的指教，更需要亲身的实践．类似地，掌握建模这门艺术，培养想象力和洞察力，不外乎认真做好这样两条：第一，学习、分析、评价、改造别人做过的模型．首先是弄懂它，分析为什么这么做，然后找出它的优缺点，并尝试改进的方法．第二，要亲自动手，踏实地做几个实际题目．为了这个目的，本书采用了**实例研究**的方法，一方面给出了在各个应用领域不同数学方法建模的大量实例，另一方面通过习题提供若干实际题目让读者自己练习．实例研究方法虽不能按照严密的逻辑思维结构去讨论问题，不能划定这些方法的实用范围，其得到的结果也并非无可置疑，但它却是我们学习建模以解决实际问题的一种生动，有效的方法．

第二篇 初等模型

第二章 初等数学建模

数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程．在科学领域中，数学因为其众所周知的准确而成为研究者们最广泛用于交流的语言，人们常对实际事物建立种种数学模型，通过对该模型的考察来描述、解释、预计或分析出与实际事物相关的规律．本章主要介绍三种常见的数学模型：数列模型、函数模型、几何与三角模型．

2.1 数列模型

例 1 某单位用分期付款的方式为职工购买 40 套住房，共需 1150 万元．购买当天先付 150 万元，以后每月这天都交付 50 万元，并加付欠款利息，月利率为 1%．若交付 150 万元后的第一个月开始算分期付款的第一个月，问到分期付款第 10 个月应该付多少钱？全部贷款付清后买这 40 套住房实际花了多少钱？

分析：这是一个非等额分期付款问题，是数列模型的应用题．每月还 50 万元，欠款虽然在减少，但剩余欠款的欠款时间在增加．

解：由题意可知，需 $\dfrac{(1150-150)}{50}=20$ 个月还清．

分期付款的第一个月应该付款 $a_1=50+(1150-150)\times1\%=60$（万元）

第二个月应该付款 $a_2=50+(1000-50\times1)\times1\%=59.5$（万元）

第三个月应该付款 $a_3=50+(1000-50\times2)\times1\%=59$（万元）

……

第 20 个月应该付款 $a_{20}=50+(1000-50\times19)\times1\%=50.5$（万元）

一共付款 $S=150+60+59.5+\cdots+50.5=150+(60+50.5)\times\dfrac{20}{2}=1255$（万元）

$$a_{10}=50+(1000-50\times9)\times1\%=55.5\text{（万元）}$$

或 $a_{10}=60+(-0.5)\times(10-1)=55.5$（万元）

即第十个月应该付款 55.5 万元，一共花了 1255 万元．

回顾：这是一个等差数列模型，第 i 个月需还款

$$a_i=50+[1000-50\times(i-1)]\times1\%$$