成人高等教育教材经济应用数学（一）

# 微积分

张家琦 主编

上册

首都师范大学出版社

成人高等教育教材经济应用数学(一)

# 微积分

上 册

张家琦 主编

首都师范大学出版社

（京）新 208 号

**图书在版编目（CIP）数据**

微积分/张家琦主编.—北京：首都师范大学出版社，1998.7
ISBN 7-81039-928-4

Ⅰ.微…　Ⅱ.张…　Ⅲ.微积分-成人教育：高等教育-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 09609 号

WEI JI FEN

**微　积　分**

上下册

**首都师范大学出版社**

（北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037）
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
1998 年 7 月第 1 版　1998 年 7 月第 1 次印刷
开本 850×1168　1/32　印张 27.125
字数 617 千　印数 00,001～14,000 册
ISBN 7-81039-928-4/G·776
定价 36.00 元

# 内容简介

全书共八章，分上、下两册. 上册包括函数，极限与连续，导数与微分，基本定理与导数的应用；下册包括不定积分，定积分，多元函数，无穷级数.

本书编写的基本指导思想是便于自学，因此编写时力求深入浅出，条理清楚，概念明确，重点突出. 每章后均附有学习要求和内容提要以及习题和部分习题解答，以便学员复习、掌握重点和作习题时参考.

本书是北京市教育委员会推荐的成人高校大专函授教材.

# 前　　言

本书是参照现行高等院校财经类本科学生学习的要求、考虑到成人高等教育教学的特点而编写的教材。

在编写的过程中，我们认真贯彻北京市教育委员会制定的成人高等院校财经类专业《微积分》教学大纲的精神，同时考虑到国家教育委员会1997年制订的全国各类成人高等学校专科起点本科班招生(非师范类)《高等数学(二)》复习考试大纲的要求。书中有些内容加了“※”号，选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

参加本书编写的有陈洪育、郑余梅、万重英、胡建国、刘长祥、刘艺菁、张泳、张家琦等同志，由张家琦任主编。

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

1998年1月

# 目　　录

# 第一章 函　数

初等数学中研究的对象主要是常量，而高等数学的研究对象是变量，即：高等数学是研究变量及其相互关系的一门数学. 变量之间的相互依赖关系即所谓函数关系，是微积分研究的对象，他是高等数学中最重要的基本概念之一，也是学好微积分的基础知识.

在中学的数学课程中，我们学习过函数，已熟悉了很多函数关系，对函数的概念有了初步的了解. 本章是在初等数学讨论的基础上，进行复习和补充，以进一步加深对函数概念的理解和认识.

## §1.1 函数的概念

在分析某一科学技术问题或某一经济问题时，会遇到两种不同的量. 一种称为常量，他是指在某个过程中数值保持不变的量；另一种称为变量，即在某个过程中数值变化的量.

通常用字母 $a$、$b$、$c$ 等表示常量，用字母 $x$、$y$、$z$、$t$、$u$、$w$ 等表示变量.

在同一过程或同一问题中，往往存在着几个变量，他们又往往不是孤立的，而是相互联系、相互依赖，遵循着一定的规律变化的. 所以我们在研究问题的时候，就要研究各个变量在变化过程中的相互依赖关系及其内部规律. 现在我们仅就两个变量的情况加以讨论（多个变量的情况在第七章中讨论）. 先看以下几个例子.

**例 1**　设圆的半径为 $r$，面积为 $A$；半径变化时，面积也随之变

化.在初等数学中已知他们之间有关系：

$$A=\pi r^2$$

当半径 $r$ 取某个正数时，面积 $A$ 就可按上面的公式求出一个确定的数值.

**例 2** 设某种商品的价格是每个 5 元，则卖出 $x$ 个商品的收入 $R$ 与 $x$ 之间有关系：

$$R=5x$$

当 $x$ 取某个正数时，收入 $R$ 就可按上式算出一个确定的数值.

上面两个例子虽然所包含的具体意义及变量之间关系的表现形式各不相同，但却有一个共同点，即在变化过程中，两个变量相互依赖而且当其中的一个变量取某个值时，另一个变量按照一定的规律总有一个确定的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系，就是函数概念的实质.

对于函数的概念，一般有以下的定义.

**定义：** 设在某个变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，变量 $y$ 随变量 $x$ 而变化，如果变量 $x$ 在实数集合 $D$ 中取某一数值时，变量 $y$ 依照某一规律 $f$ 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 $x$ 叫自变量，$y$ 叫因变量或函数.

在函数记号 $y=f(x)$ 中，$f$ 是英文"function"(即"函数")的第一个字母，他代表 $y$ 与 $x$ 之间的对应关系. $f(x)$ 是一个完整的记号，切不可误认为是 $f$ 乘以 $x$. $f(x)$ 又是一个抽象的记号，他可以代表 $x$ 的任何函数.至于他究竟代表什么样的函数关系，那就要看具体情况而定了.例如在上面的例 1 中，$f(x)$ 就代表 $\pi x^2$；在上面的例 2 中，$f(x)$ 就代表 $5x$.

如果同时考虑几个不同的函数时，应分别用不同的符号如

$\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$等来表示他们，而不能用同一个符号来表示这些不同的函数.

在上述函数的定义中，很重要的一点是：自变量 $x$ 在 $D$ 上取每一数值时，函数 $y$ 都有一个确定的数值与之对应，此时我们称函数是有定义的.（如果对应于 $D$ 中的 $x$ 的每个值，$y$ 的值不止一个，在这样的情况下，我们称函数是多值的.一般高等数学中说到“函数”一词均指单值函数，多值函数不在我们讨论的范围.多值函数通常都拆成几个单值函数分别研究.）

**定义域：** 使函数 $f$ 有定义的自变量的取值范围 $D$，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

**值域：** 函数 $y$ 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

正确理解函数定义应当注意以下几点：

1. 定义域和对应规则是确定两个变量是否构成函数关系的两个要素，缺一不可.所以如果两个函数的定义域和对应规则完全相同，那么他们就是相同的函数；如果定义域和对应规则有一个不同，他们就是不同的函数.

2. 在函数的定义中，并没有要求当自变量变化时函数一定要变，而是要求 $x$ 取定一个值时，$y$ 有一个确定的对应值.因此，例如 $f(x)=3$ 也表示一个函数，这函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，$x$ 无论取什么实数值时，对应的函数值都等于 3.

3. 函数 $y=f(x)$ 中的“$f$”表示函数关系中的对应规则，而 $f(x)$ 就是指这个规则作用在 $x$ 上.如 $y=f(x)=2x^2+5$，这里 $f(x)$ 表示把 $x$ 代入表达式 $2(\quad)^2+5$ 的括号（ ）中进行运算，变量 $x$ 与 $y$ 之间的对应规则就是由这些运算确定的，即“$f$”表示这样的对应规则：与 $x$ 对应的函数值，是由括号内的 $x$ 值平方后乘以 2 再加上 5 而得到的.

当自变量 $x$ 取某一个定值 $a$ 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y|_{x=a}$.

例如　对于函数 $f(x)=2x^2+5$ 来说

$$f(0)=2\cdot 0^2+5=5$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)^2+5=7$$

$$f(a)=2a^2+5$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^2+5=\frac{2}{x^2}+5$$

$$f(x-1)=2(x-1)^2+5=2x^2-4x+7$$

下面举例求函数的定义域.

**例 3**　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}$

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

**解**　(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$,因为分式的分母不能为 0,所以当分母不为 0 时函数有定义,即有

$$x^2-2x=x(x-2)\neq 0$$

也就是 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 时,函数是有定义的.

所以函数的定义域为 $(-\infty,0),(0,2),(2,+\infty)$. 用不等式表示是: $-\infty<x<0,0<x<2,2<x<+\infty$.

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}$,应有 $\lg(2-x)\neq 0$, 又因为只有正数才有对数,且 1 的对数为 0,所以应有 $2-x>0$ 且 $2-x\neq 1$,即 $x<2$ 且 $x\neq 1$.

所以函数的定义域为 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$. 用不等式表示是: $-\infty<x<1,1<x<2$.

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$,因为函数式有两项, 所以其定义域是使两项都有定义的 $x$ 的取值范围.

对第一项 $\sqrt{\sin x}$，因为负数没有平方根，所以应有 $\sin x \geqslant 0$. 首先知道在 $[0,\pi]$ 上，$\sin x \geqslant 0$，由于 $\sin x$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，所以在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上，有 $\sin x \geqslant 0$.

对第二项 $\sqrt{16-x^2}$，同理应有 $16-x^2 \geqslant 0$，即 $x^2 \leqslant 16$，即 $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

则函数的定义域是上述两个定义域的公共部分，所以定义域为 $[-4,-\pi]$，$[0,\pi]$. 用不等式表示是：$-4 \leqslant x \leqslant -\pi$，$0 \leqslant x \leqslant \pi$.

**例 4** 求函数 $y=\lg \dfrac{x}{x-2}+\arcsin \dfrac{3x-1}{5}$ 的定义域.

**解** 设 $y_1=\lg \dfrac{x}{x-2}$，$y_2=\arcsin \dfrac{3x-1}{5}$

对于 $y_1$，要求 $\dfrac{x}{x-2}>0$，

解之得(1) $x>0$ 且 $x-2>0$

$\therefore \quad x>2$

或 (2) $x<0$ 且 $x-2<0$

$\therefore \quad x<0$

因此 $y_1$ 的定义域为 $x>2$ 或 $x<0$.

对于 $y_2$，由反正弦函数的定义知，应有

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right| \leqslant 1, \quad 即 \quad -1 \leqslant \frac{3x-1}{5} \leqslant 1$$

$$\therefore \quad -5 \leqslant 3x-1 \leqslant 5$$

解之得 $-\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$

因此 $y_2$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$.

由于 $y=y_1+y_2$，所以函数 $y$ 的定义域是上述两个定义域的公共部分，即 $-\dfrac{4}{3} \leqslant x<0$.

所以函数的定义域为 $\left[-\dfrac{4}{3},0\right)$.

**例 5**　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域.

**解**　由于 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，因此求 $f(x+a)$ 的定义域的问题就变成了求 $x$ 的取值范围，使得 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$. 所以 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$.

**例 6**　设某工厂生产某种产品每月最多生产 1000 件，其生产总成本 $C$ 是产量 $x$ 的函数：

$$C=10+0.2x\text{（万元）}$$

求他的定义域.

**解**　当函数由一个表达式表示而又未特别指出其定义域时，其定义域就是使表达式有意义的一切实数. 而对于实际问题的函数，不能直接从公式求他的定义域，而要从对实际问题的分析中求他的定义域.

此题如果直接从公式上看，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

但从对实际问题的分析可以看出，产量 $x$ 不能为负值，且最大的月产量为 1000 件，所以函数的定义域应为 $[0,1000]$，且 $x$ 为整数.

求函数的定义域时，应注意以下几点：

1. 分式的分母不能为 0；
2. 偶次根的根底式应为非负数；
3. 对数号下的式子应为正数；
4. 正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；
5. 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；
6. 如果函数式由若干项组成，其定义域应是各项定义域的公共部分.

一个函数可以写成公式，这就是函数的公式表示法，以上的几

个例题都是这样的. 一个函数也可以画成图形成列成表格,即用图形法和表格法来表示. 在微积分的讨论中,我们感兴趣的主要是公式法. 有时为了直观起见,也要考察函数的图形.

最后要指出:有时还要考察这样的函数,对于其定义域内自变量 $x$ 的不同值,不能用一个统一的公式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示. 这类函数称为"分段函数".

例如 $y=|x|$,就是一个分段函数,因为他可以写成:

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,公式为 $y=-x$;当 $x\geqslant 0$ 时,用公式 $y=x$ 来表示(如图 1-1). 这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

又如 $$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数(如图 1-2). 这个函数的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$.

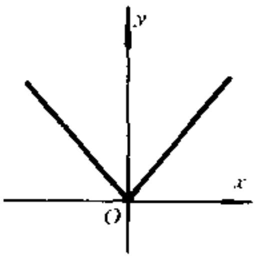


图 1-1

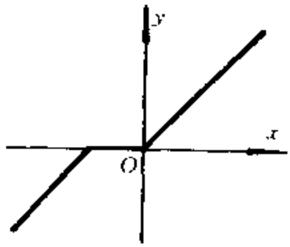


图 1-2

关于分段函数要注意以下几点:

1. 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示

几个函数；

2. 因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

3. 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求；

4. 分段函数的定义域是各项定义域的并集.

**例 7** 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ x, & 0<x<1\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$ 及其定义域.

**解** $f(-2)=\dfrac{1}{x-1}\Big|_{x=-2}=\dfrac{1}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$f(2)=2$

因为这个函数在 $x=0$ 时无定义，所以他的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2]$，用不等式表示是：$-\infty<x<0$，$0<x\leqslant 2$.

对于实际问题中的分段函数，可参看本章最后一节的例 5.

# §1.2 函数的几何特性

在分析讨论某一个函数的时候，我们往往要讨论这个函数的一些几何特性，这些性质是：奇偶性、周期性、单调增减性和有界性.

**一、函数的奇偶性**

**定义**： 如果 $f(x)$ 定义域关于原点对称，且满足关系式：$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果 $f(x)$ 定义域关于原点对称，且满足关系式：$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$x^2$，$\cos x$ 都是偶函数，而 $x^3$，$\sin x$，$\frac{1}{x}$ 都是奇函数.

偶函数的图形是对称于 $y$ 轴的（如图 1-3）. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点，则与他对称于 $y$ 轴的点 $P'(-x,f(x))$，也是曲线上的一个点.

奇函数的图形是对称于坐标原点的（如图 1-4）. 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $Q(x,f(x))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点，则与他对称于原点的点 $Q'(-x,-f(x))$，也是曲线上的一个点.

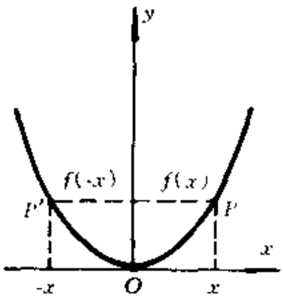


图 1-3

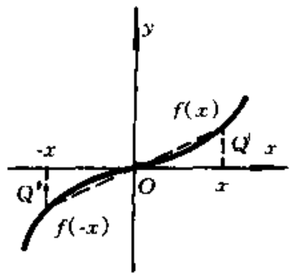


图 1-4

**例 1** 判定 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性

**解** 设 $f(x)=x^4-2x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$\because\quad f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$

所以 $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

**例 2** 判定 $y=x\cos x$ 的奇偶性