21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数值分析

第四版

全程导学及习题全解

主编 杨蕤
副主编 周寻 陈剑
主审 李红裔

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数值分析

第四版

全程导学及习题全解

主编 杨薐

副主编 周寻 陈剑

主审 李红裔

↗知识归纳 梳理主线重点难点

↗习题详解 精确解答教材习题

↗提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

数值分析全程导学及习题全解/杨蕤主编．—北京：中国时代经济出版社，2007．2

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 978－7－80221－245－9

Ⅰ．数…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．数值计算－高等学校－教学参考资料

Ⅳ．O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第148871号

数值分析全程导学及习题全解

杨蕤　主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京市优美印刷有限责任公司
开本	880×1230　1/32
版次	2007年2月第1版
印次	2007年2月第1次印刷
印张	6.625
字数	120千字
印数	1～5000册
定价	8.00元
书号	ISBN 978－7－80221－245－9

内容简介

本书是根据清华大学出版社出版的由李庆扬、王能超、易大义编写的《数值分析》教材的配套学习辅导和习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进的帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《数值分析》教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业研究生《数值分析》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考博强化复习的指导书。也可以作为《数值分析》课程教师的教学参考书。

前　言

《数值分析》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业博士研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《数值分析》课程的理论精髓和解题方法，根据清华大学出版社出版的由李庆扬、王能超、易大义编写的《数值分析》教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据《数值分析》教材中第一章～～第九章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本教材由杨蕤、周寻、陈剑等同志编写，全书由李红裔老师主审。李红裔老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此深表感谢。本书编写过程中得到赵迪、谢婧、任卉等同志的帮助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的支持和帮助，在此表示忠心的感谢！对《数值分析》教材作者李庆扬、王能超、易大义教授，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2007 年 1 月

目　录

第一章　绪　论

本章知识要点及思想方法

1. 数值计算的误差来源与分类

(1)截断误差(方法误差)

数学模型不能得到精确解时,用数值方法求得的近似解与精确解之间的误差.

(2)舍入误差

用计算机做数值计算时,由于计算机的字长有限,原始数据在表示和计算过程中产生的误差.

两种误差的来源不同,处理方式也不尽相同.截断误差由建立的模型完全决定,应结合具体算法进行分析;而舍入误差主要由计算机性能及算法过程所决定.

2. 误差与有效数字

(1)绝对误差(误差)

若 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,则称 $e^*=x^*-x$ 为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差.

(2)绝对误差限

绝对误差绝对值的上界,记为 ε^*.

(3)相对误差

近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}.$$

称为近似值 x^* 的相对误差,记为 ε_r^*.

(4)相对误差限

相对误差的绝对值上界,记为 ε_r^*.

$$\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}.$$

(5)有效数字

①定义

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共 n 位,就说 x^* 有 n 位有效数字.

②有效数字与相对误差限的关系

设近似值 x^* 表示为

$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_l\times 10^{-(l-1)})$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是 0 到 9 中的一个数字,$a_1\neq 0$,m 为整数,若 x^* 具有 n 位有效数字,则其相对误差限为

$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$,

反之,若 x^* 的相对误差限

$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$,

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

(6)数值运算的误差估计准则

$\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)$.

$\varepsilon(x_1^*x_2^*)=|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)$.

$\varepsilon(x_1^*/x_2^*)\approx\frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}$.

$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$.

$\varepsilon(f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*))\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*)$.

3. **避免误差危害的若干原则**

(1)避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法

(2)避免相近数的减法

(3)避免大数“吃”小数

(4)减化计算步骤,减少运算次数

典型例题分析与讲解

例 1 下列各数都是通过四舍五入得到的近似值,试指出它们各有几位有效数字.

$x_1^*=0.10, x_2^*=0.00356, x_3^*=3\times10^3$

解

$x_1^*=0.10$ 两位有效数字

$x_2^*=0.00356$ 三位有效数字

$x_3^*=3\times10^3$ 一位有效数字

例 2 设 x 的相对误差界为 δ,求 x^n 的相对误差界.

解

设 δx 是与 x 的相对误差限 δ 对应的绝对误差限,即有

$$\frac{\delta x}{|x|}=\delta$$

若 $f(x)=x^n$,

则

$$\delta_r f(x)\leqslant\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta x$$

$$\therefore \delta_r x^n\leqslant\left|\frac{x\cdot n x^{n-1}}{x^n}\right|\delta=n\delta$$

$\therefore n\delta$ 是函数 x^n 的相对误差限.

习题全解

1. 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差.

解

近似值 x^* 的相对误差为

$\delta=e_r^*=\frac{e^*}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$

而 $\ln x^*$ 的误差为

$e(\ln x^*)=\ln x^*-\ln x\approx\frac{1}{x^*}e^*$

进而有

$\varepsilon(\ln x^*)\approx\delta$

2. 设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差.

解

设 $f(x)=x^n$，则函数的条件数为

$C_p=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$

又 $\because f'(x)=n\,x^{n-1}$

$\therefore C_p=\left|\frac{x\cdot n\,x^{n-1}}{x^n}\right|=n$

又 $\because \varepsilon_r((x^*)n)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(x^*)$，

且 $\varepsilon_r(x^*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x^*)^n)\approx 0.02n$

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：

$x_1^*=1.1021$，　$x_2^*=0.031$，　$x_3^*=385.6$，

$x_4^*=56.430$，　$x_5^*=7\times1.0$.

解

$x_1^*=1.1021$ 是五位有效数字；

$x_2^* = 0.031$ 是二位有效数字；

$x_3^* = 385.6$ 是四位有效数字；

$x_4^* = 56.430$ 是五位有效数字；

$x_5^* = 7 \times 1.0$ 是二位有效数字.

4. 利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限：

(ⅰ) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$，　(ⅱ) $x_1^* x_2^* x_3^*$，　(ⅲ) x_2^* / x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数.

解

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

$$\varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1},$$

$$\varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

$$\varepsilon(x_5^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}.$$

(ⅰ) $\varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*)$

$= \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*)$

$= \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

$= 1.05 \times 10^{-3}$

(ⅱ) $\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*)$

$= |x_1^* x_2^*| \varepsilon(x_3^*) + |x_2^* x_3^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^* x_3^*| \varepsilon(x_2^*)$

$= |1.1021 \times 0.031| \times \frac{1}{2} \times 10^{-1} + |0.031 \times 385.6| \times \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

$\quad + |1.1021 \times 385.6| \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

≈ 0.215

(ⅲ) $\varepsilon(x_2^* / x_4^*)$

$$\approx\frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*)+|x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2}$$

$$=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}$$

$$\approx10^{-5}$$

5. 计算球体积要使相对误差限为 1 ,问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少?

解

球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则体积函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\cdot V'}{V}\right|=\left|\frac{R\cdot 4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

$\therefore\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$

又$\because\varepsilon_r(V^*)=1$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为

$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times1\quad\approx0.33$

6. 设 $Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100}. 若取 $\sqrt{783}\approx27.982$(5 位有效数字),试问计算 Y_{100}将有多大误差?

解

$\because Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$\therefore Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

……

$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

依次代入后，有

$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$

即 $Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$

若取 $\sqrt{783}\approx27.982$

$\therefore Y_{100}^*=Y_0-27.982$

$\varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)$

$=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\therefore Y_{100}$ 的误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）.

解

$\because x^2-56x+1=0$

故方程的根应为

$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故

$x_1=28+\sqrt{783}\approx28+27.982=55.982$

$\therefore x_1$ 具有 5 位有效数字

$x_2=28-\sqrt{783}$

$=\frac{1}{28+\sqrt{783}}$

$\approx\frac{1}{28+27.982}$

$$=\frac{1}{55.982}$$

$$\approx 0.017863$$

$\therefore x_2$ 具有五位有效数字.

8. 当 N 充分大时,怎样求 $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

解

$$\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan(N+1)-\arctan N$$

设 $\alpha=\arctan(N+1)$,$\beta=\arctan N$,

则 $\tan\alpha=N+1$,$\tan\beta=N$,

$$\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\alpha-\beta$$

$$=\arctan(\tan(\alpha-\beta))$$

$$=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}$$

$$=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}$$

9. 正方形的边长大约为 100cm,应怎样测量才能使其面积误差不超过 $1\mathrm{cm}^2$?

解

正方形的面积函数为

$$A(x)=x^2$$

$$\therefore \varepsilon(A^*)=2x^*\cdot\varepsilon(x^*)$$

当 $x^*=100$ 时,

若 $\varepsilon(A^*)\leqslant 1$,

则

$\varepsilon(x^*)\leq\frac{1}{2}\times10^{-2}$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时，才能使其面积误差不超过 1cm^2.

10. 设 $S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

解

$\because S=\frac{1}{2}gt^2, t>0$

$\therefore \varepsilon(S^*)=gt^*\cdot\varepsilon(t^*)$

$\therefore$ 当 t^* 增加时，S^* 的绝对误差增加

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(S^*)&=\frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|}\\&=\frac{gt^*\cdot\varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}\\&=2\,\frac{\varepsilon(t^*)}{t^*}\end{aligned}$$

当 t^* 增加时，$\varepsilon(t^*)$ 保持不变，则 S^* 的相对误差减少.

11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1\qquad(n=1,2,\cdots),$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解

$\because y_0=\sqrt{2}\approx1.41$

$\therefore \varepsilon(y_0^*)=\frac{1}{2}\times10^{-2}$

又 $\because y_n=10y_{n-1}-1$

$\therefore y_1=10y_0-1$

$\therefore \varepsilon(y_1^*)=10\varepsilon(y_0^*)$

又$\because y_2=10y_1-1$

$\therefore \varepsilon(y_2^*)=10\varepsilon(y_1^*)$

$\therefore \varepsilon(y_2^*)=10^2\varepsilon(y_0^*)$

……

$$\begin{aligned}\therefore \varepsilon(y_{10}^*)&=10^{10}\varepsilon(y_0^*)\\&=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}\\&=\frac{1}{2}\times10^8\end{aligned}$$

$\therefore$计算到y_{10}时误差为$\frac{1}{2}\times10^8$,这个计算过程不稳定.

12. 计算$f=(\sqrt{2}-1)^6$,取$\sqrt{2}\approx1.4$,利用下列等式计算,哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\qquad (3-2\sqrt{2})^3,$$

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\qquad 99-70\sqrt{2}.$$

解

设$y=(x-1)^6$,

若$x=\sqrt{2}$,$x^*=1.4$,

则$\varepsilon(x^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$

若通过$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$计算y值,则

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*)&=\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\cdot\varepsilon(x^*)\\&=\frac{6}{(x^*+1)}y^*\varepsilon(x^*)\\&=2.5y^*\varepsilon(x^*)\end{aligned}$$