Famous Teachers

NO.1

同步学习方略

名师一号

中华1号学案 神州顶尖教辅

名师的视野
总比常人看得高远
一号的脚步
总比他人遥遥领先

刮涂层 输密码 辨真伪
河北考源书业有限公司

精品教辅

高一数学(下册)

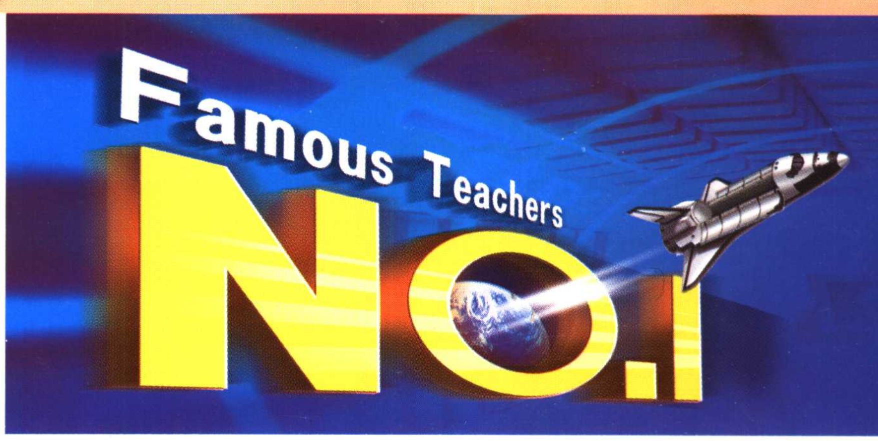
光明日报出版社

名师一号
Famous Teachers No.1

famous teachers NO.1

名师一号

策　　划：梁大鹏
主　　编：王俊杰
本册主编：刘锦贤　黄成刚　韦显杰
编　　委：李济坛　张亚宁　张景山
白顺元　徐小兰　康红梅
顾丁康　黄振祥　陆　韧
张志萍　张瑞风　常淑君



同步学习方略

精品教辅

高一数学（下册）

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

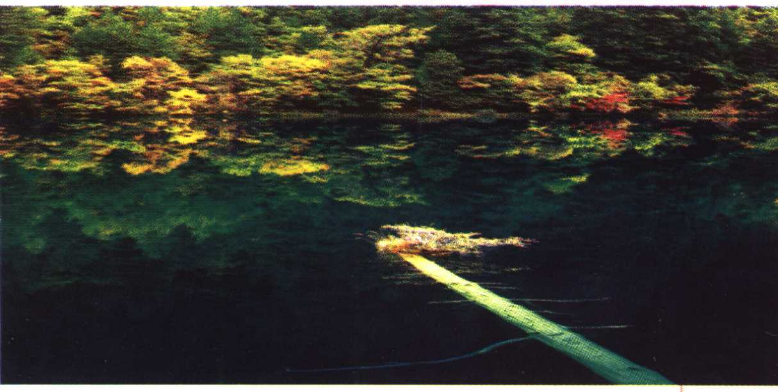
名师一号.高一年级.数学/王俊杰主编.—北京:光明日报出版社

(名师一号)

ISBN 7-80206-175-X

Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 142697 号



书 名:名师一号 高一年级 数学

著 者:梁大鹏 王俊杰

责任编辑:曹 杨

封面设计:考源文化 版式设计:梁大鹏

责任校对:田建林 责任印刷:李新宅

出版发行:光明日报出版社

地 址:北京市崇文区珠市口东大街 5 号,100062

电 话:010-67078243(咨询),67078945,67078235

传 真:010-67078227,67078233,67078255

网 址:http://book.gmw.cn

Email:gmcbs@gmw.cn

法律顾问:北京盈科律师事务所郝惠珍律师

总 经 销:新华书店总店

经 销:各地新华书店

印 刷:河北伦洋印业有限公司 印刷

版 次:2006 年 10 月第 2 版

印 次:2006 年 10 月第 2 次印刷

开 本:880×1230 1/16

印 数:1-30000

书 号:ISBN 7-80206-175-X

全套定价:226.00 元

名师一号

名师的视野 总比常人看的高远
一号的脚步 总比他人遥遥领先

Famous Teachers No.1

名师一号 好书好卷
凝聚大江南北教坛精英之课堂心血
丹心一颗 名校名师
成就长城内外莘莘学子之九天梦想

分享课堂上的每一份感动，
让自豪荡漾每一个春夏秋冬。
没有酸甜苦辣的体验，
一个人不会随随便便成功。
拥抱寒窗下的每一份真诚，
让骄傲诉说每一个灿烂星空。
没有风霜雪雨的磨练，
哪有你我那发自内心的笑容。

目录

有多少人通过读一本书而使生活翻开了新的一章。
—Henry David Thoreau(梭罗)

目录 Mulu

第四章　三角函数

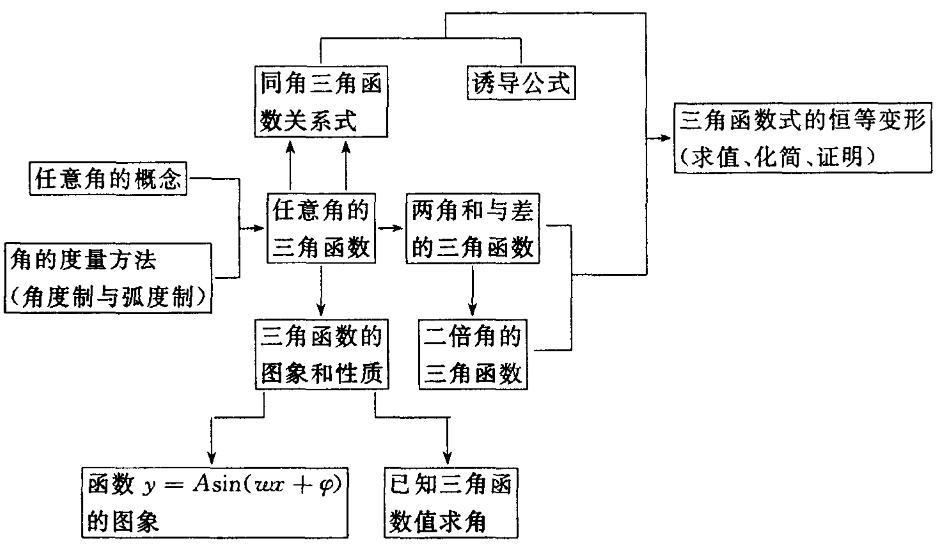
本章视点

课标导航

本章包括任意角的三角函数、两角和与差的三角函数、三角函数的图象和性质三部分内容.

第一部分主要是引进任意角的概念，通过弧度制，使得角和实数建立起一一对应关系，从而可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数. 接着又根据三角函数的定义推导出了同角三角函数关系式和诱导公式，它们是三角恒等变换的重要基础，在求值、化简三角函数式和证明三角恒等式等问题中经常用到. 第二部分主要研究和角公式、差角公式、倍角公式，这些公式的基础是两角和的余弦公式. 它们主要用于三角函数式的计算、化简与推导，在数学和其他许多学科中都有广泛的应用，要熟练、灵活地掌握. 第三部分首先以三角函数线为工具，作出了正弦函数和余弦函数的图象，介绍了“五点法”作其图象简图的方法，再从图象归纳出正、余弦函数的性质，进而研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\sin x$ 图象的关系，最后简要地介绍了正切函数的图象和性质，以及已知三角函数值如何求角，物理和工程技术的许多问题都要用三角函数的图象和性质予以解决.

本章主要知识网络：



重点难点

重点：任意角三角函数的定义、图象和性质、三角恒等变形；以及三角形中的边角关系（正弦定理、余弦定理）.

难点：灵活地运用本章公式进行三角恒等变形，周期函数的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换.

学法指点

三角函数是在已学过的平面几何和圆的知识的基础上，继指数函数、对数函数后，又一用集合和函数的知识系统研究的重要函数. 这一单元的知识主要有以下几个特点：

1. 公式多. 但公式间的联系非常密切，规模性强. 弄清公式间相互联系和推导体系，是记住这些公式的关键.

2. 思想方法丰富. 化归思想、数形结合思想贯穿于本章的始终，类比的思维方法在本章中也得到充分的应用.

怎样制订计划（一）

在学习一个新的章节前，应在了解这一章节大致内容的基础上，制订一个合理与科学的学习计划，使自己在这一阶段的学习更加有效，这也是决定我们数学学习成功的一个关键.

3. 变换灵活.有角的变换,三角函数名称的变换,三角函数次数的变换及三角函数表达形式的变换,并且有的变换技巧性较强.

4. 应用广泛.三角函数与数学中的其他知识的结合点非常多,且这部分知识在今后的学习和研究中起着十分重要的作用.比如在物理学、天文学、测量学等其他各门科学技术中都有广泛的应用.

针对以上特点学习本章时应注意如下问题:

1. 本章三角公式众多.对学过的公式做到真正理解、记准、记熟、用活;解决问题究竟使用那一个(或几个)公式,要抓住问题实质善于联想,需用公式顺手拈来.

2. 在熟练掌握概念、公式的基础上,要不断地总结解题的规律、变形的方法与技巧,努力提高活用知识解答问题的能力.

3. 掌握好正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质(定义域、值域、最大值、最小值、周期及单调性、奇偶性),它们是历年高考常考内容之一.

4. 化归思想、数形结合思想是本章应用的最基本、最重要的数学思想,贯穿本章内容的始终,要认真体会、理解,解题过程中注意灵活地加以应用.

高考趋向

由于高中教材内容的重大修订,对三角函数的整体要求已降低.在高考中则体现出明确不学的内容不考,应降低难度的内容在降低.通过分析近几年高考题,总结出三角试题的四大特点,供参考.

1. 考小题,重在基础

有关三角函数的小题,其考查的重点在于基础知识:解析式、图象及图象变换、两域(定义域、值域及最值)、四性(单调性、奇偶性、对称性、周期性)、反函数以及简单的三角变换(求值、化简及比较大小).

2. 考大题,难度明显降低

有关三角函数的大题即解答题,通过三角公式变形、转换来考查思维能力的题目已没有了,而是考查基本知识、基本技能和基本方法.

3. 考应用,融入三角形之中

这种题型既能考查解三角形的知识与方法,又能考查运用三角公式进行恒等变换的技能,故近年来备受命题者的青睐.主要解法是充分利用三角形的内角和定理、正(余)弦定理、面积公式等,并结合三角公式进行三角变换,从而获解.

4. 考综合,体现三角的工具作用

由于近年高考的命题突出以能力立意,加强对知识综合性和应用性的考查,故常常是在知识的交汇点出题.而三角知识是基础的基础,故考查与立几、解几、复数、参数内容等综合性问题时,就突出三角的工具性作用.

一、任意角的三角函数

§4.1　角的概念的推广

第一课时　角的概念的推广

Famous Teachers No·1 知识构建——名师精讲

知识要点扫描

1. 按________方向旋转所成的角叫做正角,按________方向旋转所成的角叫做负角,如果一条射线________,我们称它形成了一个零角.

2. 在直角坐标系中研究角时,如果角的顶点与________,角的始边与________,那么,角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.若角的终边落在坐标轴上,则称这个角为________.

3. 所有与角 α________,连同角 α 在内,可构成一个集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成________.

4. $0°\sim270°$的读法是________,它表示的角的含义是________.

怎样制订计划(二)

在制订计划之前,首先应对自己将要学习的内容有一个大致的了解,因为每一部分的内容的差异,可能学习时所用的方法与时间安排等各不相同,因此需先了解它,再制订计划.

重点难点研究

1. 角的概念

角的概念在初中已经接触过，高中阶段又进行了推广，由 $0^\circ\sim360^\circ$ 的角推广到任意角，推广以后的角包括正角、负角和零角，并且规定：按逆时针方向旋转所成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所成的角叫做负角，如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个零角.

角的记法：为了简单起见，在不引起混淆的情况下，“角 α”或“$\angle\alpha$”可以简记为“α”.

2. 象限角和终边相同的角的问题

(1)在研究象限角时要注意以下几个问题

①象限角的前提条件是，角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

②角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角(或者说这个角属于第几象限).

③角的终边若落在坐标轴上，就说这个角不属于任何象限，称它为轴线角(或称为象限界角).

④要能熟练地写出各象限角的取值范围. 如：

第一象限角

$\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第二象限角

$\{\alpha|k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第三象限角

$\{\alpha|k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第四象限角

$\{\alpha|k\cdot360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)终边相同的角

①研究终边相同的角的前提条件是，角的顶点在坐标原点，角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

②所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

③明确以下几点：

a. k 为整数；

b. α 为任意角；

c. $k\cdot360^\circ$ 与 α 之间用“+”号连结，如 $k\cdot360^\circ-30^\circ$ 应看成是 $k\cdot360^\circ+(-30^\circ)$；

d. 终边相同的角不一定相等，但相等的角，终边一定相同；

e. 终边相同的角有无数多个，它们相差 360° 的整数倍.

Famous Teachers No·1 快乐课堂——师生互动

题型微观分析

题型1　“角”的概念的理解

角的概念推广后，现在的角与平面几何中的角有很大区别，可以从以下三个方面理解：

(1)动态的观点：平面几何中角的定义：“从一点出发的两条射线所组成的图形”. 推广后角的定义：“将一条射线绕其端点旋转到另一个位置就形成了角”.

(2)变化的观点：角的范围有了扩大，由过去的 $0^\circ\sim360^\circ$ 范围的角拓宽到任意角，但任何一个角都可以用 $0^\circ\sim360^\circ$ 范围内的一个角表示出来.

(3)发展的观点：如果把角放到直角坐标系中进行研究，即将角的顶点放在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，我们将得到象限角的概念.

象限角：当角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么角的终边(除端点外)落在第几象限，就说这个角是第几象限角. 如果角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任一象限.

典例　写出下列关于角的集合.

(1)锐角；(2)$0^\circ\sim90^\circ$的角；(3)第一象限角；(4)小于 90° 的角.

〔分析〕　首先要抓住这些概念之间的相同点与不同点. 如锐角一定是第一象限角，而第一象限角包含锐角及终边在第一象限的角；对于小于 90° 的角，它是由锐角、零角、负角组成的. 通过集合表示，更清楚地反映出它们之间的关系.

〔解〕　(1)$\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$；(2)$\{\alpha|0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ\}$；(3)$\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；(4)$\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$.

〔点拨〕　角的概念推广后，许多观念必须改变，如小于 90° 的角不一定是锐角，第二象限的角不一定是钝角等，而区分两个角一般用集合的方法.

【变式】　设 $M=\{$小于 90° 的角$\}$，$N=\{$第一象限的角$\}$，则 $M\cap N=$　　(　　)

A. {锐角}　　B. {小于 90° 的角}

C. {第一象限的角}　　D. 以上都不对

怎样制订计划(三)

其次制订的计划应包括学习时间上的安排，练习进度与强度的把握，学习后训练的安排等. 最后在制订计划后，应切实地按照计划进行学习，不能实际操作与计划脱节，使学习过程变得没有规划杂乱.

题型 2　终边相同的角的特征

任意一个角惟一地确定一条终边.但是,任意一条终边可以表示无数个角.一个角,每增加或减少 $360°$,终边又回到原来的位置,终边相同的角周而复始地出现,这正是三角函数"周期性"的根源.因此终边相同的角不一定相等,它们相差 $360°$ 的整数倍.即 α 与 β 终边相同时,则 $\beta=k\cdot 360°+\alpha$ $(k\in\mathbf{Z})$,由此可知,与 α 终边相同的角,连同 α 在内,可以构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

典例 写出与 $-30°$ 角终边相同的角的集合,并把该集合中适合不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的元素 β 写出来.

〔分析〕 根据终边相同的角的公式直接写出集合,再由不等式求出整数 k 的范围.然后求出具体的角.

〔解〕 与 $-30°$ 角终边相同的角的集合

$S=\{\beta|\beta=-30°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

依题意有 $-720°\leqslant-30°+k\cdot 360°<360°$,

$\therefore -\frac{23}{12}\leqslant k<\frac{13}{12}$

$\because k\in\mathbf{Z},\therefore k=-1,0,1$

$\therefore \beta=-390°,-30°,330°$.

〔点拨〕 解此题的关键是熟悉与角 α 终边相同的角的集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,同时注意求具体的角 β 时还可用赋值法.

【变式】 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合.

题型 3　角的终边的对称关系

对称是角与角的终边常见的一种关系,利用对称可沟通角之间的联系.

(1)若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称,则 α 与 β 的关系为

$\alpha+\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$;

(2)若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,则 α 与 β 的关系为

$\alpha+\beta=(2k+1)\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$;

(3)若角 α 与角 β 的终边关于原点对称,则 α 与 β 的关系为

$\beta=\alpha+(2k+1)\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$;

(4)若角 α 与角 β 的终边在一条直线上,则 α 与 β 的关系为

$\alpha=\beta+k\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$.

典例 已知角 β 的终边与角 $-690°$ 的终边关于原点对称,求角 β 的集合,并求其中最大负角.

〔分析〕 先弄清 $-690°$ 终边所在的位置,找出 $[0°,360°)$ 内的一个对应角,后利用几何对称的角求 β 的集合.

〔解〕 $\because -690°=-2\times 360°+30°$,

$\therefore -690°$ 的终边与 $30°$ 的终边相同.

$\because 210°$ 的终边与 $30°$ 的终边关于原点对称.

$\therefore S=\{\beta|\beta=210°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

其中最大的负角为 $\beta=-150°$.

〔点拨〕 从特殊到一般的思想方法,是分析解决此类问题的常用手段.

【变式】 已知钝角 α 与它的 5 倍角 5α 的终边关于 y 轴对称,求 α.

题型 4　象限角

角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限的角.如果角的终边在坐标轴上,这样的角不属于任何象限,叫做轴线角.

典例 若 α 是第二象限角,则 $180°-\alpha$ 是　　(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

〔分析〕 $\because k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°$,

$\therefore -k\cdot 360°-180°<-\alpha<-k\cdot 360°-90°$,

$\therefore -k\cdot 360°<180°-\alpha<-k\cdot 360°+90°$.

$\therefore 180°-\alpha$ 是第一象限角.

〔答案〕 A

〔点拨〕 不能准确地写出象限角的范围是导致错误的主要原因,另 $180°-\alpha$ 与 α 的终边关于 y 轴对称.

【变式】 已知角 α 是第二象限的角,判断角 $\beta=2\alpha$ 是第几象限的角,或其终边的位置.

学习习惯(一)

"冰冻三尺,非一日之寒",数学学习成功并非一朝一夕,而是长期渐近的过程,在这一过程中,养成一个良好的学习习惯至关重要.怎样的学习习惯至关重要.怎样的学习习惯才是好的数学学习习惯?

对于数学来说,好的习惯应该包含了这些要素:勤思、善疑、多练、交流等.

12. α 是锐角，它的 10 倍角与 α 角的终边相同，求 α 角.

13. 如图 4－1－1，点 A 在半径为 1 且圆心在原点的圆上，且 $\angle AOx=45°$. 点 P 从点 A 出发，依逆时针方向等速地沿单位圆周旋转. 已知 P 在 1 秒钟内转过的角度为 $\theta(0°<\theta<180°)$，经过 2 秒钟到达第三象限，经过 14 秒钟后又回到出发点 A，求 θ.

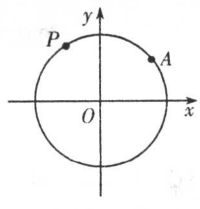


图 4－1－1

解题规律总结

1. 注意区分以下各角的不同.

(1)锐角 α：$0°<\alpha<90°$；

(2)小于 90°的角 α：$\alpha<90°$；

(3)第一象限的角 α：$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$；

(4)0°到 90°的角 α：$0°\leqslant\alpha<90°$.

2. 要注意区分象限角和区间角.

3. 相等的角，终边一定相同；反之，终边相同的角，不一定相等.

第二课时　角的概念及应用

No.1 知识构建——名师精讲

知识要点扫描

1. 终边在 x 轴非负半轴上角的集合是________；终边在 x 轴上角的集合是________，终边在第一象限的角的集合是________.

2. 在 0°到 360°范围内与－21°终边相同的角是________，在－360°到 720°范围内与－21°终边相同的角有________个；分别是________.

3. 写出终边在第二或第四象限的角平分线上的角的集合________________.

4. 若 α 为第二象限角，则－α 为第____象限角.

5. 若 α 为锐角，则角 α 终边在第________象限，角 180°＋α 终边在第______象限，角 180°－α 终边在第______象限，角 360°－α 终边在第______象限.

6. 若 θ 角的终边与 α 角的终边关于 x 轴对称，则 $\theta+\alpha$＝________.

7. 若 θ 角的终边与 α 角的终边关于 y 轴对称，则 $\theta+\alpha$＝________.

8. 若 θ 角的终边与 α 角的终边关于原点对称，则 $\theta-\alpha$＝________.

9. 若 θ 角的终边与 α 角的终边关于直线 $y=x$ 对称，则 $\theta+\alpha$＝________.

10. 若 θ 角的终边与 α 角的终边互相垂直，则 $\theta-\alpha$＝________.

11. 若 θ 角终边上有一点 $P(a,b)$，且 θ 角与 α 角的终边关于 $y=-x$ 对称，则 α 角的终边必过非原点的点 Q 的坐标是________.

重点难点研究

已知角 α 所在象限，求 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 所在象限问题

利用已知条件写出 α 的范围，由此确定 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的范围，再根据范围确定象限.

如已知 α 为第一象限角，求 2α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

因为 α 为第一象限角，则

(1)$k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}$.

怎样突破自己(一)

数学学习时间一长，我们容易走进一个个误区与怪圈，如有的类型的问题老是想不到正确思路；经常发生审题错误或者计算错误，如何解决这些问题，其根源是突破自己，突破自己的一些思维定势，审题习惯，计算与检验方式等.

$\therefore 2k\cdot 360^\circ<2\alpha<2k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore 2\alpha$ 是第一、第二象限角，以及终边在 y 轴非负半轴上的角.

(2)$k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180^\circ+45^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角；

当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角.

(3)$k\cdot 120^\circ<\frac{\alpha}{3}<k\cdot 120^\circ+30^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{3}$ 在第一象限；

当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{3}$ 在第二象限；

当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{3}$ 在第三象限.

所以 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一、第二、第三象限角.

对于 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的判定还有另外一种方法——八卦图法

(1)$\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的判断方法：

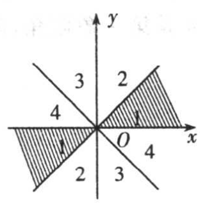


图 4—1—2

第一步：画出直角坐标系. 如图 4—1—2，将每一象限二等分；

第二步：标号. 从靠近 x 轴非负半轴的第一象限内区域开始，按逆时针方向，在图中依次标上 1，2，3，4，1，2，3，4；

第三步：选号. 因为 α 为第一象限角，在图中将数字 1 的范围画出. 可用阴影表示；

第四步：定象限. 阴影部分在哪一象限，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边就落在哪一象限.

由以上步骤可知，若 α 为第一象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角.

(2)$\frac{\alpha}{3}$ 所在象限的判断方法：

第一步：画出直角坐标系. 如图 4—1—3，将每一象限三等分；

第二步：标号. 从靠近 x 轴非负半轴的第一象限内区域开始，按逆时针方向，在图中依次标上 1，2，3，4，1，2，3，4，1，2，3，4；

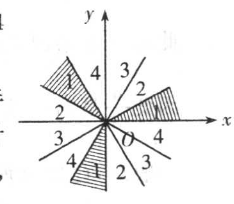


图 4—1—3

第三步：选号. 因为 α 为第一象限角，在图中将数字 1 的所在的区域用阴影画出；

第四步：定象限. 阴影部分在哪一象限，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边就落在哪一象限.

由以上步骤可知：当 α 为第一象限角时，$\frac{\alpha}{3}$ 为第一、二、三象限角.

No·1 快乐课堂——师生互动

题型微观分析

题型 5　如何分析一个角的终边所在区域

我们知道，当 α 是钝角时，$\frac{\alpha}{2}$ 一定是锐角，那么当 α 是第二象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$ 一定在第一象限吗？下面来讨论这个问题.

$\because \alpha$ 是第二象限的角. $\therefore 90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore 45^\circ+k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+k\cdot 180^\circ(k\in\mathbf{Z})$

(1)当 k 为偶数时，即 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$

$45^\circ+360^\circ\cdot n<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+n\cdot 360^\circ(n\in\mathbf{Z})$

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角；

(2)当 k 为奇数时，即 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时

$225^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ+n\cdot 360^\circ(n\in\mathbf{Z})$，$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

综上所知，当 α 为第二象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限的角.

在上述条件下，我们还可以得到 2α 及 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

$\because 180^\circ+2k\cdot 360^\circ<2\alpha<360^\circ+2k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore 2\alpha$ 为第三或第四象限的角.

怎样突破自己（二）

当你一旦发现自己在某方面总做得不好，需要改进时，就应该以极大的毅力对待它，时时提醒自己注意与改进，在坚持一些时间后，新的习惯与方式就确立起来了，你也实现了自己的一次突破.

同理　$30°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<60°+k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)当 $k=3m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$30°+m\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<60°+m\cdot360°(m\in\mathbf{Z})$

此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角.

(2)当 $k=3m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$150°+m\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<180°+m\cdot360°(m\in\mathbf{Z})$

此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限的角.

(3)当 $k=3m+2(m\in\mathbf{Z})$ 时，$270°+m\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<300°+m\cdot360°(m\in\mathbf{Z})$

此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限的角

因此 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一、第二或第四象限的角.

一般地，已知 α 所在的象限，则 $2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限如下表所示.

α	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
2α	Ⅰ、Ⅱ	Ⅲ、Ⅳ	Ⅰ、Ⅱ	Ⅲ、Ⅳ
$\frac{\alpha}{2}$	Ⅰ、Ⅲ	Ⅰ、Ⅲ	Ⅱ、Ⅳ	Ⅱ、Ⅳ
$\frac{\alpha}{3}$	Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ	Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ	Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ	Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ

典例　已知 α 是第三象限角，则 $\frac{\alpha}{3}$ 是　　（　　）

A. 第一象限角

B. 第一，二，三象限角

C. 第二，三，四象限角

D. 第一，三，四象限角

〔解〕　解法一：∵α 是第三象限的角，

∴$180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

∴$60°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$

仿照上述方法得到 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一，三，四象限角.

解法二：由解一知 $60°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$

如图 4－1－4，当 $k=0$ 时，$60°<\frac{\alpha}{3}<90°$，即 $\frac{\alpha}{3}$ 落在图中 $\angle pOy$ 的区域内，将 $\angle pOy$ 绕原点 O 旋转 $k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$，可得到阴影部分的三个区域，可见 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边只能落在这三个区域内，所以 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一，三，四象限的角，选 D.

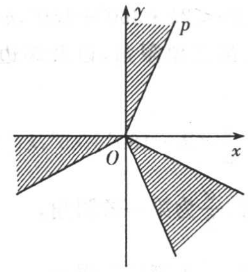


图 4－1－4

〔点拨〕　本题常见的两种错误解法

误解一：由 $180°<\alpha<270°$ 得 $60°<\frac{\alpha}{3}<90°$，则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角.

误解二：由 $180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 得

$60°+k\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角.

显然，误解一犯了以偏概全的错误. 混淆了象限角与区间角的概念.

误解二违背了不等式的等价性.

【变式】　已知 α 是第一象限角，问 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？2α 呢？

题型 6　如何合并角的集合

课本中将终边在 y 轴正半轴上的角的集合 $S_1=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$ 与终边在 y 轴负半轴上的角的集合 $S_2=\{\beta|\beta=90°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$ 合并成集合 $S=S_1\cup S_2=\{\beta|\beta=90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$. 即表示终边在 y 轴上的角的集合. 这里是将 S_1、S_2 中条件式写成相同形式. 只是一个为 180°的偶数倍. 另一个为 180°的奇数倍，从而得到 180°的整数倍. 用同样的方法可写出终边在 x 轴上的角的集合 $M=M_1\cup M_2=\{\alpha|\alpha=2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

典例　写出终边在直线 $|y|=|x|$ 上的角的集合.

〔分析〕　直线 $|y|=|x|$ 就是各象限角的平分线，可先分别写出以象限角的平分线为终边的角的集合. 并把它们中的限制条件化为同一种形式. 然后将其合并.

怎样学会让学自己——

我们的学习不应是被动的，只是等着别人将知识与方法递给自己. 我们只有学会怎样学习，怎样索取知识，才能达到成功的顶峰. 在学习时，首先要以一种积极主动的态度对待，做好预习，做好复习，走在学习进度的前沿，而不能被学习进度拖着走；

〔解〕 ∵45°，135°，225°，315°的终边分别是第一，二，三，四象限角的平分线，与它们终边分别相同的角的集合分别是

$P_1=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+4k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

$P_2=\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+(4k+1)\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

$P_3=\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+(4k+2)\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

$P_4=\{\alpha|\alpha=315°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+(4k+3)\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

∴终边在直线$|y|=|x|$上的角的集合 $P=P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

〔点拨〕 若 n 条射线将坐标平面周角平分，其中一个角为 α，则终边在这 n 条射线上的角所组成的集合可合并成$\{x|x=\alpha+k\cdot\frac{360°}{n},k\in\mathbf{Z}\}$.

【变式】 集合 $A=\{\alpha|\alpha=\frac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|\beta=\frac{2n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\}$. 则 A 和 B 的关系如何？

题型 7　如何求两个角的集合的交集

求两个集合的交集通常利用几何图形，在直角坐标平面内分别找出两个集合的终边所在的区域，只需取其公共部分即可.

典例 设集合 $P=\{\alpha|30°+k\cdot 180°<\alpha<90°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{\beta|-45°+k\cdot 360°<\beta<45°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$. 求 $P\cap Q$.

〔解〕 对于集合 P 中的 k 应分奇数和偶数两种情况讨论.

$k=2n(n\in\mathbf{Z})$时，$30°+n\cdot 360°<\alpha<90°+n\cdot 360°,n\in\mathbf{Z}$，此时 α 在第一象限

$k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$210°+n\cdot 360°<\alpha<270°+n\cdot 360°,n\in\mathbf{Z}$，此时 α 在第三象限.

所以集合 P 包含两个区域Ⅰ(如图 4－1－5)，而集合 Q 就是图中的阴影部分Ⅱ

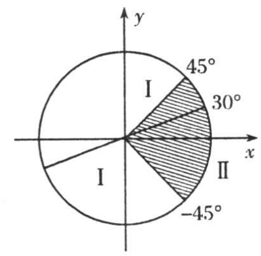


图 4－1－5

∴$P\cap Q=\{\alpha|30°+k\cdot 360°<\alpha<45°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

〔点拨〕 借助于数学式子所反映的几何意义，利用图形的直观性来解决问题. 即数形结合思想是解答数学问题常用的方法.

【变式】 如图 4－1－6 写出终边落在阴影处(包括边界)的角的集合.

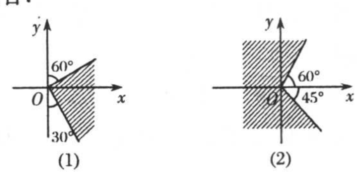


图 4－1－6

题型 8　角的应用

本节知识不仅应用于物理等学科(如圆周运动问题)，而且常应用于日常生活中(如钟表问题).

典例 若将时钟拨慢 5 分钟，则时针和分针各转了多少度？

〔分析〕 把实际问题抽象为数学模型是解应用问题的关键，该实际问题对应的数学模型是任意角的概念.

〔解〕 时钟拨慢 5 分钟，相当于分针逆转$\frac{1}{12}$周，而分针逆转一周 360°，所以分针转了$\frac{1}{12}\times 360°=30°$；分针转一周时，时针转$\frac{1}{12}$周，所以时针转了$\frac{1}{12}\times 30°=2.5°$.

〔点拨〕 此题应特别注意正角、负角的概念以及时针、分针转过的周数之间的换算关系.

【变式】 今天是星期一.

(1)$7k(k\in\mathbf{Z})$天后的那一天是星期几？

$7k(k\in\mathbf{Z})$天前的那一天是星期几？

其次要善于对所学过的知识，所做过的题目进行归纳与小结，不断积累提高；最后要注意学习应该是开放式的学习，不能只是一个人闭门造车，埋头苦干，要多与其他同学、朋友、老师进行交流与探讨.

(2)158 天后的那一天是星期几？

课解诊断治疗

典例　若将时钟拨快 10 分钟，则分针旋转了________度，时针旋转了________度.

〔误解〕　因为，表盘被 12 等分，分针走一周为 60 分钟，时针走一周为 12 小时，表针每走过一格，相应旋转角的度数为$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$，而拨快 10 分钟需要把分针拨两格，所以，分针应旋转了 $2\times30^\circ=60^\circ$，时针应旋转 $60^\circ\times\frac{1}{12}=5^\circ$，故填入答案为 60、5.

〔诊断〕　误解中对用旋转量来定义角有一定的正确认识. 在数量关系的分析、列式、计算中思维也比较清晰、准确，但此解的误因有两个：(1)初中角的知识的负迁移，忽视了角的正负性；(2)对旋转量的旋转方向与所成角的正负性认识不到位.

凡求角的度数问题，首先考虑旋转方向确定正负，然后再求其绝对值的大小. 本题中的分针和时针按顺时针方向旋转，按定义应取负值.

〔答案〕　-60　-5

【变式】　已知 α 是第二象限角，试判断$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

〔误解〕　误解一：因为，α 是第二象限角，所以，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

误解二：因为，α 是第二象限角，所以，$90^\circ<\alpha<180^\circ$，所以，$45^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ$，所以，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

Famous Teachers No·1 展示自我——收获成功

课堂针对训练

一、选择题

1. “α 是第一象限角”是“2α 是第二象限角”的　　(　　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充分必要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称，则　　(　　)
   A. $\alpha+\beta=90^\circ$
   B. $\alpha+\beta=(2k+\frac{1}{2})\cdot180^\circ$　$(k\in\mathbf{Z})$
   C. $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ$　$(k\in\mathbf{Z})$
   D. $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180^\circ$　$(k\in\mathbf{Z})$
3. 已知集合 $M=\{x|x=k\cdot45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　$N=\{x|x=k\cdot90^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　$P=\{x|x=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，那么　　(　　)
   A. $P\subsetneqq N\subsetneqq M$　　B. $P=N\subsetneqq M$
   C. $P\subsetneqq N=M$　　D. $P=N=M$
4. 在直角坐标系中，若 α 与 β 的终边互相垂直，那么(　　)
   A. $\beta=\alpha+90^\circ$
   B. $\beta=\alpha\pm90^\circ$
   C. $\beta=\alpha+90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$
   D. $\beta=\alpha\pm90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$
5. 若点 $P(a,b)$与点 $Q(-b,a)$分别是角 α,β 的终边上的一点，其中 $ab\neq0$，那么角 α 与 β 的关系是　　(　　)
   A. $\beta-\alpha=k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$
   B. $\beta-\alpha=k\cdot360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$
   C. $\beta+\alpha=k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$
   D. $\beta+\alpha=k\cdot360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$

二、填空题

6. 如果集合 $A=\{\alpha|k\cdot360^\circ+30^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+150^\circ,k\in$

确数态
定学一
科学一
学习一
的心

一个好的数学学习心态，归结起来就是“沉着应对，锲而不舍”. 在面对新的知识时，要以平和的心态对待，不能因为该内容比较简单，就骄傲大意，因为该内容比较难，心里就惴惴不安，总担心自己学不好.

$\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|k\cdot360°-90°<\beta<k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$　那么 $A\cup B=$________；$A\cap B=$________.

7. 若角 α 与角 $x+45°$ 具有同一条终边，角 β 与角 $x-45°$ 具有同一条终边，则 α 与 β 之间的关系为________.

8. 已知角 β 的终边在图 4－1－7 中阴影所表示的范围内(不包括边界)，那么 $\beta\in$________.

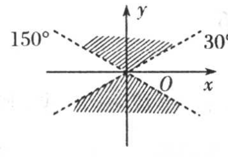


图 4－1－7

9. 将钟表上的时针作为角的始边，分针作为终边，那么当钟表上显示 8 点 5 分时，时针与分针构成的角度是________.

10. 下列有 6 个命题：
(1)时间经过 5 小时，时针转 150°角；
(2)若 α 为锐角，则其终边落在第一象限；
(3)终边在第一象限的角为锐角；
(4)小于 180°的角是钝角、直角或锐角；
(5)终边相同的角必相等；
(6)不相等的角的终边位置必不相同.
其中正确命题的序号为________.

三、解答题

11. (1)试写出终边在坐标轴上的角的集合.
(2)集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{x|x=\frac{k}{4}\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$那么集合 M 与 N 的关系是什么？

12. (1)把 4－1－8(1)中终边落在阴影部分的角的集合表示出来(包括边界).
(2)把集合$\{\alpha|k\cdot120°<\alpha<k\cdot120°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$表示在图 4－1－8(2)的直角坐标系中.

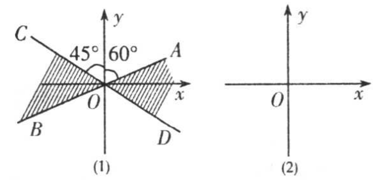


图 4－1－8

13. (探究题)已知 $f(x)=5°\cdot x+20°$，$g(x)=6°\cdot x+30°$. 是否存在整数 T，使得对于任意的 x 的值，都有 $f(x+T)$ 与 $f(x)$、$g(x+T)$ 与 $g(x)$ 均表示终边相同的角？若存在，求出 T 的值；若不存在，则说明理由.

解题规律总结

(1)使角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边若在第几象限则称 α 为第几象限角，终边落在坐标轴上的角称为象限界角.

(2)$\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$的象限的确定. 已知 α 是第几象限，要确定$\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$所在象限的常用方法有二：一是分类讨论；二是几何法，即先把各象限均分 n 等份，再从 x 轴的正向的上方起，依次将各区域标上Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，则 α 原来是第几象限对应的标号即为$\frac{\alpha}{n}$终边所落在的区域.

(3)分清终边在一条射线上和终边在一条直线上的角表示方法的不同.

(4)一般地，按逆时针方向表示阴影部分的范围.

(5)对称是角与角终边常见的一种关系. 利用对称可沟通角与角的联系，将终边对称的两个角化成终边相同的两个角来处理.

确定数学学习的心态(二)　其实不管所学习的知识难易与否，都应以一种平和的心态应对，“不以物喜，不以己悲”，就是这样的道理. 数学学习过程中总会遇到这样或者那样的困难与问题，也许不能一下就解决它，但我们不能轻言放弃，只要你愿意想办法，总是能够解决的.

Famous Teachers No·1 专题突破——名师解惑

专题 钟表中的角的问题

有关时针的问题是一种有趣的数学问题，时钟的时针和分针分分秒秒都在“马不停蹄”地奔走着，它们的相对位置时刻都在变化，因而其蕴涵的数量关系也在时刻变化，并且较为隐蔽. 能不能挖掘该问题动态变化所对应的数量关系，运用数学模型来解决呢？我们就下面的问题做些研究.

问题 1：设时钟的时针在 2 点和 3 点之间：

(1)时针和分针什么时候会重合？

(2)何时两针在互为反向延长线上？

(3)何时两针成一直角？

解决这类问题一般可以从以下几种途径思考：

1. 从时针和分针转动的角度“差”分析

(1)设在 2 点 x 分两针重合，此时分针转过 $6x$ 度，而时针转过 $(2+\frac{x}{60})\cdot 30°$度，据此题意得

$6x-0=(2+\frac{x}{60})\cdot 30$，解得 $x=10\frac{10}{11}$.

(2)设在 2 点 y 分两针成一直线(互为反向)，

列方程有 $6y-180=(2+\frac{y}{60})\cdot 30$，解得 $y=43\frac{7}{11}$.

(3)设在 2 点 z 分两针成一直角，列方程有 $6z-90=(2+\frac{z}{60})\cdot 30$，解得 $z=27\frac{3}{11}$.

一般地，设时针和分针在 m 点 x 分成某一角度 α(其中 $0\leqslant m<12$，m 是整数)，则列方程为 $6x\pm\alpha=(m+\frac{x}{60})\cdot 30$(如果解为负数，则舍去).

2. 从时针、分针的转速与行走路程间的关系去分析

(1)设分针转过 2 字 x 格，则分针走的路程为 $(10+x)$ 格，时针所走的路程为 x 格，于是 $\frac{10+x}{x}=12$，解得 $x=\frac{10}{11}$，此时为 2 点 $(10+\frac{10}{11})$分.

(2)设分针超过 8 字 y 格，则时针超过 2 字 y 格，列方程有 $\frac{40+y}{y}=12$，解得 $y=3\frac{7}{11}$，此时为 2 点 $(40+3\frac{7}{11})$分.

(3)设分针超过 5 字 z 格，则分针走的路程为 $(25+z)$ 格，时针走的路程为 z 格，故有 $\frac{25+z}{z}=12$，解得 $z=2\frac{3}{11}$，此时为 2 点 $(25+2\frac{3}{11})$分.

一般地，在 m 点和 $(m+1)$ 点之间，设分针超过 m 字 x 格时两针重合，则一般列方程为 $\frac{5m+x}{x}=12$；设分针超过 $(m+6)$ 字 y 格，两针成一直线，则一般列方程为 $\frac{(5m+30)+y}{y}=12$；设分针超过 $(m+3)$ 或 $(m+9)$ 字 z 格两针成一直角，当 $0\leqslant m<3$ 时有 $\frac{(5m+15)+z}{z}=12$ 或 $\frac{(5m+45)+z}{z}=12$，当 $3\leqslant m<9$ 时有 $\frac{(5m\pm 15)+z}{z}=12$，当 $9\leqslant m<12$ 时有 $\frac{5(m-9)+z}{z}=12$ 或 $\frac{5(m-9)+30+z}{z}=12$.

此类问题还可视其为圆周上的行程问题，请读者试解之.

注：钟面上，相邻两个数字之间有 5 个小格，每个小格表示 1 分钟，如与角度联系起来，每个小格对应 6 度，即分针每分钟转过 6 度.

问题 2：自上午 8 时整上学到中午 11 点 40 分放学，时钟的时针和分针各转了多少度？上午 8 点整和中午 11 点 40 分两针所成的最小正角各是多少度？

分析：时针每 12 小时转一圈，分针每小时转一圈，可以先算出时针、分针每小时转了多少度，再求解，同时考虑到时针、分针均按顺时针方向旋转. 计算两针所成的最小正角时，应借助图形计算可避免错误.

解：∵时针每小时转 $-360°\div 12=-30°$

又上午 8 时整到中午 11 点 40 分经过了 3 小时 40 分，而 3 小时 40 分 $=3\frac{2}{3}$小时.

∴时针转过的角度数为 $-30°\times 3\frac{2}{3}=-110°$

分针转过的角度数为 $-360°\times 3\frac{2}{3}=-1320°$.

若以时钟指在 12 时整时为角的始边，则 8 时整时，时针与分针各指在“8”字和“12”字上，此时，时针与其成 $-240°$角，分针与其成 $0°$角.

故 8 时整时，两针所成的最小正角为 $120°$.

经过 $3\frac{2}{3}$小时后，时针与其成的角度为

$-240°-110°=-350°$

经过 $3\frac{2}{3}$小时后，分针与其成的角度为

$0°-1320°=-1320°$

两针所成的角度为

$-1320°-(-350°)=-970°=110°-3\times 360°$

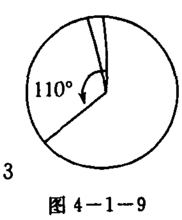


图 4-1-9

故在 11 时 40 分时，两针所成的最小正角为 $110°$(如图 4-1-9).

科学的练习与训练方式

在数学学习过程中，不断地练习与训练是必不可少，也是每天我们都要面对的，怎样科学地训练与练习，是决定我们学习效率的一个重要因素，也是我们数学学习成功的一个重要因素. 科学的练习与训练，应以“效率”作为其根本. 没有效率地练习与训练.