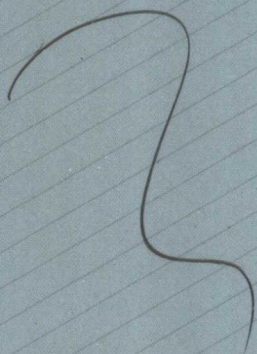


○ 胡克 著



Mathematics Studies

数 学 探 究

Mathematics Studies

解析不等式的若干问题

(第二版)



武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

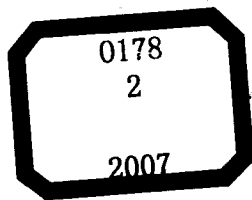
解斜不等式的若干问题

王 明 著



上海人民出版社

1980年11月



○ 胡克 著

Mathematics Studies
数 学 探 究



武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

解析不等式的若干问题

(第二版)

图书在版编目(CIP)数据

解析不等式的若干问题/胡克著. —2版. —武汉:武汉大学出版社,
2007.3

ISBN 978-7-307-05449-3

I. 解… II. 胡… III. 不等式—研究 IV. O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024275 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:王 建 版式设计:杜 枚

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉市楚风印刷有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:9.875 字数:170千字 插页:1

版次:2003年9月第1版 2007年3月第2版

2007年3月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-05449-3/O · 354

定价:17.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

第一版前言

本书源于著者在给数学专业高年级本科生和研究生开设的选修课中，为引发听者对数学研究的兴趣，而讲授的一系列不等式的创建和应用问题。在数学研究中大家要注意如下 10 个要点：从无到有，从易到难，由小到大，由浅入深，删繁就简，去粗取精，异中求同，同中察异，美满中察不足，不足中求美满。本书正是这十大要点的体现。

本书大部分内容为作者的科研成果，共分五章，扼要介绍如下：

第 1 章介绍基础关系式和 Hölder 不等式的发展中有关的经典不等式。

第 2 章建立了两个新的不等式，以弥补应用 Hölder 不等式之不足，并使得许多重要的不等式得以改进。

第 3 章阐述了某些重要不等式的性质，解决了长达 30 年之久的 Opial-华罗庚型积分不等式问题。

第 4 章是各种 Hilbert 类型不等式的改进和推广，显示了第 2 章所建的两个不等式的作用。

第 5 章介绍了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果。

本书中很少部分提到的有关复变函数的一些结果与定理，若读者不熟悉的话，可以视其为给定的条件来对待，这不会影响本书的阅读。

由于著者水平所限，错误在所难免，希望读者指正。

著 者

2003 年 6 月

第二版前言

本书是在 20 世纪为研究生撰写教材而逐年增加的科研成果基础上, 经不断充实编写而成的. 其中部分内容曾多次在为数学系高年级学生开“数学分析选讲”选修课中讲授, 引起学生提问题、想问题、研究问题的兴趣, 拓展了他们的思路, 深受学生的欢迎.

本书思路是“从研究单复变一些问题出发, 去研究基础不等式创建与改进, 所得结果返回来再用到单复变函数一些问题上来”, 本书内容重点放在研究基础不等式创建与改进上. 我们知道基础不等式对分析数学理论与应用的深化和发展起着非常重要的作用, 如著名的 Hölder 不等式:

$$\sum a_k b_k \leq (a_k^p)^{\frac{1}{p}} (b_k^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, 当且仅当 $a_k^p = t b_k^q$, $k = 1, 2, \dots$ 时等号成立. 在数学分析理论与应用的发展和深化过程中, 这确是一块不可缺少的基石. 但在应用时, 条件 $a_k^p = t b_k^q$ 对于所有 k 成立往往得不到满足, 有时与我们所要求达到的结果相去甚远. 1981 年著者创建了一个新的基础不等式, 以弥补其缺陷. 这个不等式发表后, 《美国数学评论》誉为是“一个杰出的、非凡的新的不等式”. 2001 年著者又创新了另一个基础不等式. 两个新创建的不等式导出一系列已推证的不等式和定理实质上的改进与推广或证明的简化. 例如 Hilbert 不等式、Hardy 不等式、Opial-华罗庚型积分不等式的推广等. 特别对 Fejer-Riesz 定理的推广与改进, Jenkins 定理的改进与证明的简化, 以及单叶函数偏差定理的改进, 指出了 H_p 函数和单叶函数中一些缺陷, 对其研究领域的深入和发展有重要作用. 本书只介绍专业知识较少的新结果. 对于单叶函数一些重要问题的解决与改进, 请参看著者撰写的《单叶函数的若干问题》一书.

在此非常感谢徐利治教授和高明哲教授将著者创新的两个基础不等式, 记入了他们合写“Hilbert 不等式的各种精华与拓广综述”一文中(英文版). 该文发表于《数学研究与评论》(25 卷第二期, 2005 年). 其中共收入了著者 8

个不等式. 还要感谢湖南师范大学匡继昌教授, 在《不等式研究通讯》, 2002 年第一期, 高度评价著者 1951 年《中国科学》第二期发表的“一个不等式及其若干应用”一文. 后来, 又在他的巨著《常用不等式》第三版再度言及, 并收入著者二十多个不等式. 其中有 6 个记为“胡克不等式”.

本书阐述了常用解析不等式几类重要的部分, 共分 6 章, 现对各章分别介绍如下:

第 1 章介绍三个基础不等式的概念及相关的著名定理, 如算术平均与几何平均定理, Hölder 不等式和 Minkowski 不等式. Hardy 等在其名著《不等式》中再三强调其极为重要.

第 2 章阐述著者创建的两个基础不等式, 并给出一系列著名不等式实质上的改进与推广. 特别对 Jenkins 定理的改进, 在此要提一下的是, Jenkins 于 1954 年用深刻的理论、较长的篇幅(27 个页面)证明了对 Bieberbach-Eilenberg 函数的一个重要定理, 后来夏道行于 1955 年用了 17 个页面再次证明. 但著者不到一个页面给出改进与证明. 美国数学评论(83m: 26019)称之为“杰出非凡的定理, 证明相对来说是初等的”.

第 3 章重点是利用著者所创建的两个不等式, 给予 Hilbert 型、Hardy 型各种不等式的推广与改进. 本章我们还介绍了徐利治教授有卓越远见的问题: Hilbert 型权系数估计. 还有匡继昌教授特种 Hilbert 型不等式. 对 Fejer-Riesz 定理的推广与改进, 指出了 H_p 函数理论的一个缺陷, 留给大家一个研究空间.

第 4 章阐述了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果.

第 5 章阐述一些重要不等式的单调性及其应用, 以及 Opial-华罗庚型积分不等式在微分方程和差分方程中的重要应用. 并在减轻原所设条件下对长达 30 年之久的 Opial-华罗庚型积分不等式问题给予解决.

第 6 章介绍单调函数或单调数列形式不等式及其应用, 如著名的 Tchebychef 不等式. 给出 Fejer 猜想的 Turan 的惊奇及简短的证明, 有关数列重排的著名 Polya 不等式改进的叙述, 以及 Hardy-Littlewood 极大值定理的证明等.

希望本书能给读者以启发, 从中获得研究问题的信心, 并在工作中取得有创造性的科研成果, 以推进和完善前人的业绩.

著者

2006 年 12 月

目 录

第 1 章 三个基础不等式及其相关的定理	1
1.1 Cauchy-Schwarz 不等式	1
1.2 基础关系式和 Hölder 不等式	2
1.3 算术平均与几何平均不等式及 Hölder 不等式的推广	3
1.4 Jensen 不等式	4
1.5 Minkowski 不等式	5
1.6 Hölder 积分型不等式	8
1.7 Minkowski 积分不等式	10
1.8 Young 不等式	13
1.9 Cauchy-Schwarz 不等式的进一步性质	15
第 2 章 两个新的基础不等式的创建及其应用	18
2.1 一个新的基础不等式创建	18
2.2 第二个新的基础不等式创建	22
2.3 应用 1——Minkowski 不等式和 Drescher 不等式的改进	25
2.4 应用 2——Carlson, Laudan, Hardy, Nagy 等不等式的改进	28
2.5 应用 3——Beckenbach 不等式的改进	30
2.6 应用 4——Opial-Beesack 不等式的改进	32
2.7 应用 5——钟开莱不等式的推广与改进	36
2.8 应用 6——Ky Fan 不等式的改进	37
2.9 应用 7——Jenkins 不等式的改进与证明的简化	38
2.10 应用 8——单叶函数中 $ f $ 的偏差定理的改进	41
2.11 两个创建不等式的反向不等式及著名的 Aczel-Popoviciu-Vasic 不等式的改进	44

第3章 Hilbert, Hardy 型不等式及其各种类似不等式实质上

改进与推广	48
3.1 Hilbert, Hardy 各类型不等式的介绍	48
3.2 Ingham 不等式的改进	49
3.3 Hilbert B 型不等式和 Ingham 不等式统一优美公式 及其改进	50
3.4 特殊情形下 Ingham 不等式的精细改进	53
3.5 Hardy-Littlewood 之一不等式的改进	55
3.6 Polya, Szegő A' , B' 两型平方模和的优美不等式	56
3.7 两类特殊 Hilbert A, B 型不等式的估计	59
3.8 Hilbert C 型不等式的估计——徐利治问题	61
3.9 Hilbert 积分不等式的改进	66
3.10 Widder 不等式的改进	67
3.11 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第一种推广、 改进与应用	68
3.12 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第二种推广、 改进与应用	74
3.13 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的第三种推广、 改进与应用	77
3.14 Knopp 不等式的几种推广	80
3.15 有关 Hilbert 型积分不等式的另一种推广	82
3.16 有关 Hardy 之一不等式的推广与改进	84
3.17 H_p 函数中 Hardy 之一定理的改进	90
3.18 H_p 函数中 Fejer-Riesz 不等式的改进与推广	91
3.19 Hilbert B 型不等式又一种推广与改进	95
3.20 Hilbert A 型不等式匡继昌的一种推广	97

第4章 凸函数的若干不等式及其有关不等式 100

4.1 凸函数的概念及其基本性质	100
4.2 几何平均与算术平均构成函数的单调性	104
4.3 Jensen 不等式构成函数的单调性	105
4.4 Hardmard 不等式及其构成函数的单调性	106
4.5 凸函数的积分平均及其构成函数的单调性	107

4.6	Hardmard 不等式的推广及其简易证明	108
4.7	Steffensen 不等式构成函数的单增性与 Jensen 不等式 的改进	109
4.8	van der Corput 不等式	112
4.9	Carleman 不等式的改进	112
4.10	van der Corput 之一不等式的改进	114
4.11	有关凸函数的积分不等式	116
4.12	如何观察函数的凸性	117
第 5 章	几个重要不等式构成函数的单调性问题	119
5.1	单变量的不等式构成一个函数 $F(x) \geq 0$, $F(0)=0$, 并具有单调增加(或减少)问题, 因而提供解决问题 的机会	119
5.2	Hölder, Minkowski 不等式构成函数的单增性	120
5.3	第一个创建的基础不等式构成函数的单增性	121
5.4	改进后的 Beesack 不等式构成函数的单增性	124
5.5	Opial-华罗庚型不等式问题的解决且其构成函数具有 单增性	126
5.6	复合指数函数间的基础不等式	128
5.7	有关复合指数函数的单调性不等式	133
第 6 章	单调函数和单调数列有关不等式	135
6.1	单调数列和单调函数有关 Tchebychef 不等式	135
6.2	Schur 不等式	136
6.3	Fejer 猜想, Turan 惊奇及简短的证明	137
6.4	重排数列	138
6.5	Polya 定理的改进	139
6.6	重排函数和 Hardy-Littlewood 极大定理	140
附 录	Gram 不等式的证明	143
参考书目		145
参考文献		146

第 1 章

三个基础不等式及其相关的定理

算术平均与几何平均定理、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式为分析中三个基础不等式. Hardy 等在所著《不等式》中强调了此三个基础不等式的重要性. 《不等式》前六章全用这三个不等式来论述, 并从许多不同的途径来证明它们. 在此我们给予简单的叙述, 并阐述与它们相关的一些重要定理.

我们知道, Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式在数学基础理论和应用上起着非常重大的作用, 而且 Hölder 不等式是 Cauchy-Schwarz 不等式的推广. 这些不等式源于一个简单的基础关系式:

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leqslant \alpha x + (1-\alpha)y, \quad x, y \geqslant 0, \alpha \in [0, 1]. \quad (*)$$

本章我们首先介绍这些经典不等式以及它们的推广和应用. 目的在于观察它们的发展、壮大、精妙和“美中不足”. 后几章将用事实说明, 我们如何发展、创新, 如何弥补一些著名定理、等式的“美中不足”.

1.1 Cauchy-Schwarz 不等式

下面给出 Cauchy-Schwarz 不等式的三个证明.

定理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 为实数列, 则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right), \quad (1.1.1)$$

当且仅当 $a_k = t b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 时等号成立.

证 1 设 A_k, B_k 为正实数. 由 $(A_k - B_k)^2 \geqslant 0$, 可知

$$A_k B_k \leqslant \frac{1}{2}(A_k^2 + B_k^2). \quad (1.1.2)$$

在(1.1.2)中, 对 k 求和, 得

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n A_k^2 + \sum_{k=1}^n B_k^2 \right). \quad (1.1.3)$$

取 $A_k = a_k / \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $B_k = b_k / \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 代入(1.1.3)式即得(1.1.1).

证2 (1.1.1)式也可直接由Lagrange恒等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,k=1}^n (a_r b_k - a_k b_r)^2 \geq 0 \quad (1.1.4)$$

得出.

证3 设 x 为实数. 因

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0,$$

所以

$$\Delta = \left(2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0.$$

因此(1.1.1)式成立.

若 $a_k = t b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, 从(1.1.4)式中很容易看出等号成立. $\square$

1.2 基础关系式和 Hölder 不等式

上节, 我们从简单的 $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 关系式推出了 Cauchy-Schwarz 不等式. 我们能否将此式作更进一步的推广呢?

定理 1.2.1 (基础关系式) 设 $A, B \geq 0$, 则

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leq \alpha A + (1-\alpha)B, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (1.2.1)$$

证 若 A, B 中有一个为 0, 则(1.2.1)式显然成立.

设 A, B 均不为零. 将(1.2.1)式两边同除以 B , 得

$$\left(\frac{A}{B} \right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{A}{B} \right) + (1-\alpha).$$

令 $\frac{A}{B} = x$, 则上式变为

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha). \quad (1.2.2)$$

所以我们只需证明(1.2.2)式成立就可以了.

记 $f(x) = \alpha x + (1-\alpha) - x^\alpha$. 则

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1}.$$

因此, 当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$; $f'(1) = 0$. 所以 $f(1)$ 为极小值, 且 $f(1) = 0$. 因此(1.2.2)式成立, 从而(1.2.1)式成立. $\square$

定理 1.2.2 (Hölder 不等式) 设 $a_k, b_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $p, q \geq 1$, 以及

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ 则}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2.3)$$

当且仅当 $a_k^p = t b_k^q$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 时等号成立.

证 在(1.2.1)式中取 $\alpha = \frac{1}{p}$, $A = A_k^p$, $B = B_k^q$, 则(1.2.1)式变为

$$A_k B_k \leq \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q. \quad (1.2.4)$$

将上式两边对 k 求和, 便得

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n A_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n B_k^q. \quad (1.2.5)$$

令 $A_k = a_k / \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $B_k = b_k / \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$, 代入上式即知(1.2.3)式成立. $\square$

1.3 算术平均与几何平均不等式 及 Hölder 不等式的推广

算术平均与几何平均不等式有如下的推广:

定理 1.3.1 设 $A_k \geq 0$, $t_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 及 $\sum_{k=1}^n t_k = T_n$, 则

$$\left(\prod_{k=1}^n A_k^{t_k} \right)^{\frac{1}{T_n}} \leq \frac{1}{T_n} \sum_{k=1}^n t_k A_k, \quad (1.3.1)$$

当且仅当 $A_n = c$, $k = 1, 2, \dots, n$ 时等号成立.

证 由定理 1.2.1, 可知

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{k=1}^n A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_n}} &= \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}}\right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}} \cdot A_n^{t_n/T_n} \\
 &\leq \frac{T_{n-1}}{T_n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} + \frac{t_n}{T_n} A_n.
 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

再由归纳法即证得定理. $\square$

下面定理是 Hölder 不等式的推广.

定理 1.3.2 设 $A_k^{(i)} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 及 $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $\sum_{k=1}^n a_k = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n A_k^{(i)} \leq \prod_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m (A_k^{(i)})^{\frac{1}{a_k}} \right]^{a_k}. \quad (1.3.3)$$

若以 $(B_k^{(i)})^{a_k}$ 代 $A_k^{(i)}$, 则

$$\sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (B_k^{(i)})^{a_k} \leq \prod_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m B_k^{(i)} \right)^{a_k}. \quad (1.3.4)$$

证 仅证明(1.3.3)式. 令 $T_n = \sum_{i=1}^n a_i$. 由 Hölder 不等式, 可得(注意 $T_n = 1$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n A_k^{(i)} &= \sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)} \cdot A_n^{(i)} \right) \\
 &\leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)} \right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} \right]^{T_{n-1}} \left[\sum_{i=1}^m (A_n^{(i)})^{\frac{1}{a_n}} \right]^{a_n} \\
 &\leq \left[\sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n-2} A_k^{(i)} \right)^{\frac{1}{T_{n-2}}} \right]^{T_{n-2}} \left[\sum_{i=1}^m (A_{n-1}^{(i)})^{\frac{1}{a_{n-1}}} \right]^{a_{n-1}} \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{i=1}^m (A_n^{(i)})^{\frac{1}{a_n}} \right]^{a_n} \\
 &\leq \dots.
 \end{aligned}$$

再由归纳法, 即可证得(1.3.3). $\square$

1.4 Jensen 不等式

定理 1.4.1 (Jensen) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为正数. 若 $0 < r < s$, 则有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^s\right)^{\frac{1}{s}} < \left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}. \quad (1.4.1)$$

证 由 $0 < r < s$, 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k^s\right)^{\frac{1}{s}} / \left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left[\sum_{k=1}^n a_k^s / \left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} = \left[\sum_{k=1}^n \left(a_k^r / \sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &< \left[\sum_{k=1}^n \left(a_k^r / \sum_{k=1}^n a_k^r\right)\right]^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^r / \sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以(1.4.1)式成立. $\square$

定理 1.4.2 设 $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha > 1$ 及 $B_k^{(i)} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$. 则有

$$\sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (B_k^{(i)})^{\alpha_k} < \prod_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m B_k^{(i)}\right)^{\alpha_k}. \quad (1.4.2)$$

证 由假设, $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha} = 1$. 在(1.3.4)中以 $(B_k^{(i)})^\alpha$ 代 $B_k^{(i)}$, 以 $\frac{\alpha_k}{\alpha}$ 代 α_k , 有

$$\sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (B_k^{(i)})^{\alpha_k} \leq \prod_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m (B_k^{(i)})^\alpha\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha}}. \quad (1.4.3)$$

再由(1.4.1), 令 $s = \alpha > 1$, $r = 1$, 可知

$$\left[\sum_{i=1}^m (B_k^{(i)})^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} < \sum_{i=1}^m B_k^{(i)}. \quad (1.4.4)$$

将(1.4.4)代入(1.4.3)即得(1.4.2). $\square$

1.5 Minkowski 不等式

定理 1.5.1 (Minkowski) 设 $a_i, b_i \geq 0$. 若 $p > 1$, 则有

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.5.1)$$

当且仅当 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时上式等号成立. 若 $0 < p < 1$, 则有反向不等式:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5.2)$$

证 若 $p > 1$, 设 $x_i \geq 0$, 则由 Hölder 不等式, 有

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{p-1} x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{1-\frac{1}{p}}.$$

取 $x_i = a_i, b_i$, 两式相加, 即有

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{1-\frac{1}{p}}.$$

因此(1.5.1)式成立.

当 $0 < p < 1$ 时, 由 Hölder 不等式(定理 1.3.2 中(1.3.3)式), 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sum_{i=1}^n \left[a_i^p \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \right] + \sum_{i=1}^n \left[b_i^p \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^p A_n^{1/p-1} + \sum_{i=1}^n b_i^p B_n^{1/p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p (A_n^{1/p} + B_n^{1/p})^{1-p}. \end{aligned}$$

所以当 $0 < p < 1$ 时(1.5.2)式成立. □

定理 1.5.2 (Dresher) 设 $0 < r < 1 < p$ 及 $a_k, b_k \geq 0$. 则

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p}{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r} \right]^{\frac{1}{p-r}} \leq \left[\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^r} \right]^{\frac{1}{p-r}} + \left[\frac{\sum_{k=1}^n b_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^r} \right]^{\frac{1}{p-r}}. \quad (1.5.3)$$

证 由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p-r}} &\leq \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p-r}} \\ &= \left[\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^r} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\sum_{k=1}^n b_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^r} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p-r}} \\ &\leq \left[\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^r} \right)^{\frac{1}{p-r}} + \left(\frac{\sum_{k=1}^n b_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^r} \right)^{\frac{1}{p-r}} \right] \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{\frac{r}{p-r}}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

再由 Minkowski 反向不等式(1.5.2), 有

$$\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]^r \leq \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^r. \quad (1.5.5)$$

由(1.5.4)和(1.5.5)即得(1.5.3). $\square$

一般地, 用同样的方法和证明, 我们有(以下 $a_k, b_k, \dots, l_k$ 均为正数)

定理 1.5.3 (Minkowski) 设 r 为有限数且不等于 0 和 1. 则当 $r > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\ & < \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n l_k^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

当 $0 < r < 1$ 时, 有反向不等式:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\ & > \left(\sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n l_k^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

定理 1.5.4 设 $0 < r < 1 < p$. 则有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^p}{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^r} \right]^{\frac{1}{p-r}} \\ & \leq \left[\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^r} \right]^{\frac{1}{p-r}} + \left[\frac{\sum_{k=1}^n b_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^r} \right]^{\frac{1}{p-r}} + \dots + \left[\frac{\sum_{k=1}^n l_k^p}{\sum_{k=1}^n l_k^r} \right]^{\frac{1}{p-r}}. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

关于(1.5.6), (1.5.7)的伴随不等式有如下定理:

定理 1.5.5 若 $r > 0$ 且不等于 1, 则当 $r > 1$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^r > \sum_{k=1}^n a_k^r + \sum_{k=1}^n b_k^r + \dots + \sum_{k=1}^n l_k^r; \quad (1.5.9)$$

当 $0 < r < 1$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + \dots + l_k)^r < \sum_{k=1}^n a_k^r + \sum_{k=1}^n b_k^r + \dots + \sum_{k=1}^n l_k^r. \quad (1.5.10)$$