解析不等式的若干问题

（第二版）

◎胡克 著

Mathematics Studies

Mathematics Studies

数学探究

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

解析不等式的若干问题

解析不等式的若干问题

（第二版）

胡克 著

Mathematics Studies
数 学 探 究

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

解析不等式的若干问题/胡克著．—2版．—武汉：武汉大学出版社，2007.3

ISBN 978-7-307-05449-3

Ⅰ.解…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.不等式—研究　Ⅳ.O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第024275号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：王　建　　版式设计：杜　枚

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：武汉市楚风印刷有限公司

开本：787×1092　1/16　印张：9.875　字数：170千字　插页：1

版次：2003年9月第1版　　2007年3月第2版

2007年3月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-05449-3/O·354　　定价：17.00元

第一版前言

本书源于著者在给数学专业高年级本科生和研究生开设的选修课中，为引发听者对数学研究的兴趣，而讲授的一系列不等式的创建和应用问题. 在数学研究中大家要注意如下 10 个要点：从无到有，从易到难，由小到大，由浅入深，删繁就简，去粗取精，异中求同，同中察异，美满中察不足，不足中求美满. 本书正是这十大要点的体现.

本书大部分内容为作者的科研成果. 共分五章，扼要介绍如下：

第 1 章介绍基础关系式和 Hölder 不等式的发展中有关的经典不等式.

第 2 章建立了两个新的不等式，以弥补应用 Hölder 不等式之不足，并使得许多重要的不等式得以改进.

第 3 章阐述了某些重要不等式的性质，解决了长达 30 年之久的 Opial-华罗庚型积分不等式问题.

第 4 章是各种 Hilbert 类型不等式的改进和推广，显示了第 2 章所建的两个不等式的作用.

第 5 章介绍了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果.

本书中很少部分提到的有关复变函数的一些结果与定理，若读者不熟悉的话，可以视其为给定的条件来对待，这不会影响本书的阅读.

由于著者水平所限，错误在所难免，希望读者指正.

著　者

2003 年 6 月

第二版前言

本书是在 20 世纪为研究生撰写教材而逐年增加的科研成果基础上，经不断充实编写而成的. 其中部分内容曾多次在为数学系高年级学生开“数学分析选讲”选修课中讲授，引起学生提问题、想问题、研究问题的兴趣，拓展了他们的思路，深受学生的欢迎.

本书思路是“从研究单复变一些问题出发，去研究基础不等式创建与改进，所得结果返回来再用到单复变函数一些问题上来”，本书内容重点放在研究基础不等式创建与改进上. 我们知道基础不等式对分析数学理论与应用的深化和发展起着非常重要的作用，如著名的 Hölder 不等式：

$$\sum a_k b_k \leqslant (a_k^p)^{\frac{1}{p}} (b_k^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p>1$，$q=\dfrac{p}{p-1}$，当且仅当 $a_k^p=tb_k^q$，$k=1,2,\cdots$时等号成立. 在数学分析理论与应用的发展和深化过程中，这确是一块不可缺少的基石. 但在应用时，条件 $a_k^p=tb_k^q$ 对于所有 k 成立往往得不到满足，有时与我们所要求达到的结果相去甚远. 1981 年著者创建了一个新的基础不等式，以弥补其缺陷. 这个不等式发表后，《美国数学评论》誉为是“一个杰出的、非凡的新的不等式”. 2001 年著者又创新了另一个基础不等式. 两个新创建的不等式导出一系列已推证的不等式和定理实质上的改进与推广或证明的简化. 例如Hilbert 不等式、Hardy 不等式、Opial-华罗庚型积分不等式的推广等. 特别对 Fejer-Riesz 定理的推广与改进，Jenkins 定理的改进与证明的简化，以及单叶函数偏差定理的改进，指出了 H_p 函数和单叶函数中一些缺陷，对其研究领域的深入和发展有重要作用. 本书只介绍专业知识较少的新结果. 对于单叶函数一些重要问题的解决与改进，请参看著者撰写的《单叶函数的若干问题》一书.

在此非常感谢徐利治教授和高明哲教授将著者创新的两个基础不等式，记入了他们合写“Hilbert 不等式的各种精华与拓广综述”一文中(英文版). 该文发表于《数学研究与评论》(25 卷第二期，2005 年). 其中共收入了著者 8

个不等式. 还要感谢湖南师范大学匡继昌教授，在《不等式研究通讯》，2002年第一期，高度评价著者1951年《中国科学》第二期发表的“一个不等式及其若干应用”一文. 后来，又在他的巨著《常用不等式》第三版再度言及，并收入著者二十多个不等式. 其中有6个记为“胡克不等式”.

本书阐述了常用解析不等式几类重要的部分，共分6章，现对各章分别介绍如下：

第1章介绍三个基础不等式的概念及相关的著名定理，如算术平均与几何平均定理，Hölder不等式和Minkowski不等式. Hardy等在其名著《不等式》中再三强调其极为重要.

第2章阐述著者创建的两个基础不等式，并给出一系列著名不等式实质上的改进与推广. 特别对Jenkins定理的改进，在此要提一下的是，Jenking于1954年用深刻的理论、较长的篇幅(27个页面)证明了对Bieberbah-Eilenberg函数的一个重要定理，后来夏道行于1955年用了17个页面再次证明. 但著者不到一个页面给出改进与证明. 美国数学评论(83m：26019)称之为“杰出非凡的定理，证明相对来说是初等的”.

第3章重点是利用著者所创建的两个不等式，给予Hilbert型、Hardy型各种不等式的推广与改进. 本章我们还介绍了徐利治教授有卓越远见的问题：Hilbert型权系数估计. 还有匡继昌教授特种Hilbert型不等式. 对Fejer-Riesz定理的推广与改进，指出了H_p函数理论的一个缺陷，留给大家一个研究空间.

第4章阐述了凸函数的经典结果及近年来有关的新成果.

第5章阐述一些重要不等式的单调性及其应用，以及Opial-华罗庚型积分不等式在微分方程和差分方程中的重要应用. 并在减轻原所设条件下对长达30年之久的Opial-华罗庚型积分不等式问题给予解决.

第6章介绍单调函数或单调数列形式不等式及其应用，如著名的Tchebychef不等式. 给出Fejer猜想的Turan的惊奇及简短的证明，有关数列重排的著名Polya不等式改进的叙述，以及Hardy-Littlewood极大值定理的证明等.

希望本书能给读者以启发，从中获得研究问题的信心，并在工作中取得有创造性的科研成果，以推进和完善前人的业绩.

著 者

2006年12月

目　录

第 1 章

三个基础不等式及其相关的定理

算术平均与几何平均定理、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式为分析中三个基础不等式. Hardy 等在所著《不等式》中强调了此三个基础不等式的重要性.《不等式》前六章全用这三个不等式来论述，并从许多不同的途径来证明它们. 在此我们给予简单的叙述，并阐述与它们相关的一些重要定理.

我们知道，Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式在数学基础理论和应用上起着非常重大的作用，而且 Hölder 不等式是 Cauchy-Schwarz 不等式的推广. 这些不等式源于一个简单的基础关系式：

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha}\leqslant \alpha x+(1-\alpha)y,\quad x,y\geqslant 0,\ \alpha\in[0,1]. \tag{$*$}$$

本章我们首先介绍这些经典不等式以及它们的推广和应用. 目的在于观察它们的发展、壮大、精妙和“美中不足”. 后几章将用事实说明，我们如何发展、创新，如何弥补一些著名定理、等式的“美中不足”.

1.1 Cauchy-Schwarz 不等式

下面给出 Cauchy-Schwarz 不等式的三个证明.

定理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 $a_k, b_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 为实数列，则

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big), \tag{1.1.1}$$

当且仅当 $a_k=tb_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

证 1 设 A_k, B_k 为正实数. 由 $(A_k-B_k)^2\geqslant 0$，可知

$$A_kB_k\leqslant\frac{1}{2}(A_k^2+B_k^2). \tag{1.1.2}$$

在(1.1.2)中，对 k 求和，得

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \sum_{k=1}^{n} B_k^2\right). \tag{1.1.3}$$

取 $A_k = a_k \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $B_k = b_k \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 代入(1.1.3) 式即得(1.1.1).

证 2　(1.1.1) 式也可直接由 Lagrange 恒等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{r,k=1}^{n}(a_r b_k - a_k b_r)^2 \geqslant 0 \tag{1.1.4}$$

得出.

证 3　设 x 为实数. 因

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 = x^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant 0,$$

所以

$$\Delta = \left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0.$$

因此(1.1.1) 式成立.

若 $a_k = tb_k$, $k = 1,2,\cdots,n$, 从(1.1.4) 式中很容易看出等号成立. □

1.2　基础关系式和 Hölder 不等式

上节, 我们从简单的 $AB \leqslant \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 关系式推出了 Cauchy-Schwarz 不等式. 我们能否将此式作更进一步的推广呢?

定理 1.2.1 (基础关系式)　设 $A, B \geqslant 0$, 则

$$A^{\alpha} B^{1-\alpha} \leqslant \alpha A + (1-\alpha)B, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{1.2.1}$$

证　若 A, B 中有一个为 0, 则(1.2.1) 式显然成立.

设 A, B 均不为零. 将(1.2.1) 式两边同除以 B, 得

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha\left(\frac{A}{B}\right) + (1-\alpha).$$

令 $\frac{A}{B} = x$, 则上式变为

$$x^{\alpha} \leqslant \alpha x + (1-\alpha). \tag{1.2.2}$$

所以我们只需证明(1.2.2) 式成立就可以了.

记 $f(x) = \alpha x + (1-\alpha) - x^{\alpha}$. 则

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1}.$$

因此，当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时 $f'(x)<0$；$f'(1)=0$. 所以 $f(1)$ 为极小值，且 $f(1)=0$. 因此(1.2.2)式成立，从而(1.2.1)式成立.

□

定理 1.2.2 (Hölder 不等式)　设 $a_k, b_k \geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n)$，$p,q \geqslant 1$，以及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2.3}$$

当且仅当 $a_k^p = t b_k^q\ (k=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

证　在(1.2.1)式中取 $\alpha=\frac{1}{p}$，$A=A_k^p$，$B=B_k^q$，则(1.2.1)式变为

$$A_k B_k \leqslant \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q. \tag{1.2.4}$$

将上式两边对 k 求和，便得

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} A_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} B_k^q. \tag{1.2.5}$$

令 $A_k = a_k\Big/\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}$，$B_k = b_k\Big/\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$，代入上式即知(1.2.3)式成立.

□

1.3　算术平均与几何平均不等式及 Hölder 不等式的推广

算术平均与几何平均不等式有如下的推广：

定理 1.3.1　设 $A_k \geqslant 0$，$t_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$ 及 $\sum_{k=1}^{n} t_k = T_n$，则

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} A_k^{t_k}\Big)^{\frac{1}{T_n}} \leqslant \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{n} t_k A_k, \tag{1.3.1}$$

当且仅当 $A_n = c$，$k=1,2,\cdots,n$ 时等号成立.

证　由定理 1.2.1，可知

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^{n} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_n}} &= \left[\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}}\right]^{\frac{T_{n-1}}{T_n}} \cdot A_n^{t_n/T_n} \\
&\leqslant \frac{T_{n-1}}{T_n}\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{t_k}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}} + \frac{t_n}{T_n} A_n. \qquad (1.3.2)
\end{aligned}
$$

再由归纳法即证得定理. □

下面定理是 Hölder 不等式的推广.

定理 1.3.2 设 $A_k^{(i)} \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 及 $\alpha_k \geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$，则

$$
\sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} A_k^{(i)} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} (A_k^{(i)})^{\frac{1}{\alpha_k}}\right]^{\alpha_k}. \qquad (1.3.3)
$$

若以 $(B_k^{(i)})^{\alpha_k}$ 代 $A_k^{(i)}$，则

$$
\sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (B_k^{(i)})^{\alpha_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} B_k^{(i)}\right)^{\alpha_k}. \qquad (1.3.4)
$$

证 仅证明(1.3.3)式. 令 $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. 由 Hölder 不等式，可得(注意 $T_n = 1$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} A_k^{(i)} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)} \cdot A_n^{(i)}\right) \\
&\leqslant \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k^{(i)}\right)^{\frac{1}{T_{n-1}}}\right]^{T_{n-1}} \left[\sum_{i=1}^{m} (A_n^{(i)})^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{\alpha_n} \\
&\leqslant \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n-2} A_k^{(i)}\right)^{\frac{1}{T_{n-2}}}\right]^{T_{n-2}} \left[\sum_{i=1}^{m} (A_{n-1}^{(i)})^{\frac{1}{\alpha_{n-1}}}\right]^{\alpha_{n-1}} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} (A_n^{(i)})^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{\alpha_n} \\
&\leqslant \cdots.
\end{aligned}
$$

再由归纳法，即可证得(1.3.3). □

1.4 Jensen 不等式

定理 1.4.1 (Jensen) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数. 若 $0 < r < s$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{\frac{1}{s}} < \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.4.1}$$

证　由 $0 < r < s$，有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{\frac{1}{s}} \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^s \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k^r \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &< \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k^r \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)\right]^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= 1,\end{aligned}$$

所以(1.4.1)式成立. □

定理 1.4.2　设 $\alpha_k > 0$，$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha > 1$ 及 $B_k^{(i)} > 0$，$i = 1,2,\cdots,m$，$k = 1,2,\cdots,n$. 则有

$$\sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (B_k^{(i)})^{\alpha_k} < \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} B_k^{(i)}\right)^{\alpha_k}. \tag{1.4.2}$$

证　由假设，$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha} = 1$. 在(1.3.4)中以 $(B_k^{(i)})^{\alpha}$ 代 $B_k^{(i)}$，以 $\frac{\alpha_k}{\alpha}$ 代 α_k，有

$$\sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (B_k^{(i)})^{\alpha_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} (B_k^{(i)})^{\alpha}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha}}. \tag{1.4.3}$$

再由(1.4.1)，令 $s = \alpha > 1$，$r = 1$，可知

$$\left[\sum_{i=1}^{m} (B_k^{(i)})^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} < \sum_{i=1}^{m} B_k^{(i)}. \tag{1.4.4}$$

将(1.4.4)代入(1.4.3)即得(1.4.2). □

1.5　Minkowski 不等式

定理 1.5.1 (Minkowski)　设 $a_i, b_i \geqslant 0$. 若 $p > 1$，则有

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.5.1}$$

当且仅当 $a_i = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 时上式等号成立. 若 $0 < p < 1$，则有反向不等式：

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5.2}$$

证 若 $p>1$，设 $x_i\geqslant 0$，则由 Hölder 不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}x_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\Big]^{1-\frac{1}{p}}.$$

取 $x_i=a_i,b_i$，两式相加，即有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\leqslant\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\Big]^{1-\frac{1}{p}}.$$

因此(1.5.1) 式成立.

当 $0<p<1$ 时，由 Hölder 不等式(定理 1.3.2 中(1.3.3) 式)，有

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}&=\sum_{i=1}^{n}\Big[a_i^p\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}-1}\Big]+\sum_{i=1}^{n}\Big[b_i^p\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}-1}\Big]\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i^pA_n^{1/p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i^pB_n^{1/p-1}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p(A_n^{1/p}+B_n^{1/p})^{1-p}.\end{aligned}$$

所以当 $0<p<1$ 时(1.5.2) 式成立. □

定理 1.5.2 (Dresher) 设 $0<r<1<p$ 及 $a_k,b_k\geqslant 0$. 则

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}\leqslant\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}{\sum_{k=1}^{n}a_k^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}+\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k^p}{\sum_{k=1}^{n}b_k^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}.\tag{1.5.3}$$

证 由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\Big[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\Big]^{\frac{1}{p-r}}&\leqslant\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^{\frac{p}{p-r}}\\&=\left[\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}{\sum_{k=1}^{n}a_k^r}\right]^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\Big)^{\frac{1}{p}}+\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k^p}{\sum_{k=1}^{n}b_k^r}\right]^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\Big)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{p-r}}\\&\leqslant\left[\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}{\sum_{k=1}^{n}a_k^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}+\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k^p}{\sum_{k=1}^{n}b_k^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}\right]\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\Big)^{\frac{1}{r}}+\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big]^{\frac{r}{p-r}}.\end{aligned}\tag{1.5.4}$$

再由 Minkowski 反向不等式(1.5.2)，有

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]^r \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r. \tag{1.5.5}$$

由(1.5.4)和(1.5.5)即得(1.5.3). □

一般地，用同样的方法和证明，我们有(以下 $a_k, b_k, \cdots, l_k$ 均为正数)

定理 1.5.3 (Minkowski)　设 r 为有限数且不等于 0 和 1. 则当 $r>1$ 时，有

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right]^{\frac{1}{r}} < \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} l_k^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.5.6}$$

当 $0<r<1$ 时，有反向不等式：

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right]^{\frac{1}{r}} > \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} l_k^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.5.7}$$

定理 1.5.4　设 $0<r<1<p$. 则有

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^p}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r}\right)^{\frac{1}{p-r}} \leqslant \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}+\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^p}{\sum_{k=1}^{n} b_k^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}+\cdots+\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} l_k^p}{\sum_{k=1}^{n} l_k^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}. \tag{1.5.8}$$

关于(1.5.6),(1.5.7)的伴随不等式有如下定理：

定理 1.5.5　若 $r>0$ 且不等于 1，则当 $r>1$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r > \sum_{k=1}^{n} a_k^r+\sum_{k=1}^{n} b_k^r+\cdots+\sum_{k=1}^{n} l_k^r; \tag{1.5.9}$$

当 $0<r<1$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r < \sum_{k=1}^{n} a_k^r+\sum_{k=1}^{n} b_k^r+\cdots+\sum_{k=1}^{n} l_k^r. \tag{1.5.10}$$