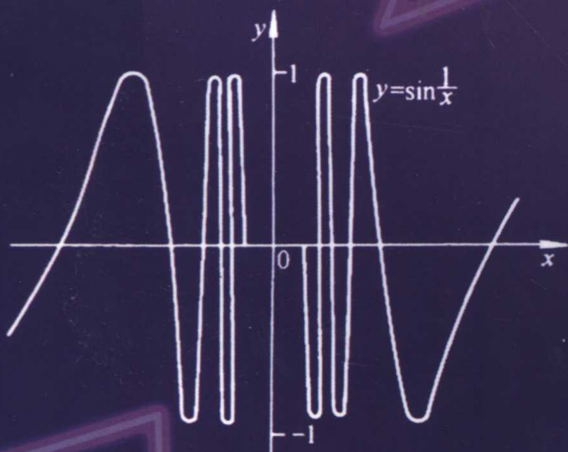
高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础学习与提高

霍桂利 主编

（上册）

YINGYONG SHUXUEJICHU XUEXIYUTIGAO



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

应用数学基础学习与提高

【上册】

高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础学习与提高

上 册

主　编　霍桂利
参　编　王庆云　朱维栩　秦　克
　　　　李　高　罗　平
主　审　刘进生

本书是机械工业出版社出版的高职高专基础课系列规划教材《应用数学基础 上册》的配套学习指导丛书。全书共六章，精选了不同类型的高等数学试题，内容与教材《应用数学基础 上册》相呼应。每章由内容提要、典型例题、习题选解、自测题及其参考答案组成。内容丰富，覆盖面广，反映不同的类型、不同层次的教学要求。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础学习与提高．上册/霍桂利主编．
—北京：机械工业出版社，2004.9
（高职高专基础课系列规划教材）
ISBN 7-111-15300-6

Ⅰ．应…　Ⅱ．霍…　Ⅲ．应用数学－高等学校：技术学校－教学参考资料　Ⅳ．029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 096772 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：郑　玫　宋学敏　版式设计：霍永明　责任校对：张莉娟
封面设计：张　静　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·9 印张·220 千字
定价：15.00 元

前　　言

本书依据国家教育部颁布的高职高专院校数学教学大纲的精神，为更好地贯彻“必需、够用、求实、创新”的教学改革思路，促进教学质量的提高，满足学生学习的需要，由长期从事数学教学工作的一线教师，结合高职高专院校数学教学实际和多年教学经验，有针对性地编写的。

在编写本书过程中，我们既注意到高职高专院校学生的特点，又注意到初学高等数学时容易产生的一些对基本概念理解不透而产生的错误，着重强调如何掌握基本概念和有关基本理论，着重强调怎样将一个实际问题抽象成数学模型来进行分析和解决，着重强调如何帮助和启发学生总结解题的规律，提高分析问题和解决实际的能力，从而进一步提高广大学生对高等数学的学习热情和积极性。

本书共六章，由霍桂利任主编，参加编写的人员还有王庆云、朱维栩、秦克、李高、罗平等。

感谢太原理工大学刘进生教授对本书进行全面、细致的审阅。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

第一章　函数与极限

内 容 提 要

1. 基本概念

(1) 区间、邻域

区间是用的较多的一类数集，它是介于某两个实数之间的全体实数，是不等式的另外一种表现形式. 邻域是为了讨论和描述极限的定义而引进的一个概念，实质上是以点 a 为中心、以无穷小正数 δ 为半径的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$.

(2) 函数的概念

1) 函数的定义：设 x 和 y 是两个变量，如果对于 x 的变化范围 D(实数集合)中的每一个 x 值，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$. 其中，x 叫做自变量，y 叫做因变量或者函数. 数集 D 称为函数的定义域，与定义域对应的 y 的取值范围称为函数的值域.

定义域和对应法则是确定函数的两个要素，即只有当两个函数的定义域和对应法则均相同时，才认为这两个函数是相同函数，否则不同. 函数概念的核心是对应规律，从实际问题建立函数，最重要的是寻求变量之间的对应规律.

函数 $y=f(x)$ 的图形，就是平面上所有坐标为 $(x,\ f(x))$ 的点的集合，一般是一条平面曲线.

2) 反函数：已知函数 $y=f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数. 二者图形相同.

一般，称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，此时二者图形关于直线 $y=x$ 对称.

反函数概念是函数中的一个难点，它是建立在逆对应基础上的，而逆对应又是建立在一一对应基础上的. 因此要理解和搞清反函数的概念必须先很好地掌握一一对应的概念.

3) 复合函数：设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全体或部分在 $f(u)$ 定义域内，那么 y 也是 x 的函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 这个函数称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. 其中，u 是中间变量.

必须注意，函数的复合是有条件的，不是任何两个函数都能复合成一个函数. 复合函数的分解一定要注意从外层函数逐次向里，不能遗漏.

4) 初等函数：由常数及基本初等函数经过有限次四则运算或有限次地复合所构成的可以用一个式子表示的函数，叫做初等函数。

例如，$y=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$ 是一个分段函数，它不是初等函数；而 $y=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geqslant 0 \end{cases}$ 也是分段函数，但它可以用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示，因此这个分段函数是初等函数.

(3) 极限的基本概念

1）数列极限的定义：如果对于任意给定的正数 ε，总存在着一个正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 为数列 x_n 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注意】 ①定义中的 $\varepsilon>0$ 是任意给定的.②定义中正整数 N 的存在性，是 x_n 与 a 是否无限接近的关键.N 是随 ε 的确定而确定的，一般 ε 越小，N 会越大.③当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 表明从 N 项以后数列的所有点都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内.

2）函数极限的定义：

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限：

如果对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为**当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【注意】 ①不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 是 x_0 的去心邻域，它表明 x 充分接近 x_0 但 $x\neq x_0$，所以当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有无极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关.②定义中的 δ 不是任意给定的正数，而是与 $\varepsilon>0$ 有关的一个正数.也就是说，δ 随 ε 确定而确定，ε 且越小，δ 也越小.③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且相等.

当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限：

如果对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，当 $|x|>X$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为**当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【注意】 ① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 与数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 非常类似，区别在于 n 的取值是离散的，而 x 的取值却是连续的.由于 n 为自然数，$n\to\infty$ 实质上是 $n\to+\infty$；而 x 可取正、负实数，因此 $x\to\infty$ 包括 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情况，即 $|x|$ 无限增大.②定义中 $|x|>X$ 等价于 $x>X$，$x<-X$.如果只有 $x>X$ 或 $x<-X$ 便会分别得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.同样应注意理解极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，三者之间的关系.这里，$\varepsilon$ 与 X 的关系是 ε 越小，X 越大.

（4）无穷大与无穷小

无穷大与无穷小是两种具有特殊变化趋势的函数.它是表达量的变化趋势，而不是表达量的大小，这一点必须理解.

（5）函数连续性的概念

1）函数在某一点连续的三种等价说法

$$f(x)\text{在 }x_0\text{ 点连续}\begin{cases}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\\ \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\\ \Leftrightarrow \text{任给 }\varepsilon>0\text{，存在 }\delta>0\text{，当 }|x-x_0|<\delta\text{ 时，}\\ \quad\ \text{恒有 }|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{cases}$$

2）函数在某区间上连续，即函数在这一区间上每一点都连续.

3）若函数在点 x_0 不连续，则 x_0 称为间断点，它至少满足下列条件之一

① $f(x_0)$ 无意义.② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

2. 基本性质和重要结论

- 基本性质和重要结论
  - 基本性质
    - 函数的四种特性
      - 函数的单调性
      - 函数的周期性
      - 函数的奇偶性
      - 函数的有界性
    - 无穷小的运算性质
      - 有限个无穷小的和是无穷小
      - 有限个无穷小的乘积是无穷小
      - 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最大值、最小值性质
      - 介值性质
  - 重要结论
    - 如果函数在某区间上单值、单调且连续，那么它的反函数在相应的区间上也是单值单调且连续
    - 一切初等函数在其定义域区间内都是连续的
    - $f(x)$在 x_0 点极限存在的充要条件是它在 x_0 点的左极限、右极限分别存在而且相等
    - 具有极限的函数可以表示为其极限值与一个无穷小之和，如果函数可表示为常数与无穷小之和，则该常数就是函数的极限

典型例题

1. 函数定义域的求法

- 求函数定义域的方法
  - 分式的分母不能为 0
  - 偶次根号下应大于或等于 0
  - 对数式的真数应大于 0
  - 若函数的表达式由几项组成，则它的定义域是各项定义域的交集
  - 分段函数的定义域是各段定义域的并集

求初等函数的定义域是以基本初等函数的定义域为基础的，所以，基本初等函数的定义域要熟记.求复合函数的定义域时，一般是从外层向里层逐步求.例如，已知 $f(x)$的定义域为$[a, b]$，那么 $f[\varphi(x)]$的定义域应从不等式 $a<\varphi(x)<b$ 中解出x 的范围即可.

例 1　设 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}+\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$，求其定义域.

【分析】　根据题意先分别求出$\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$和 $\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域，然后求它们的交集.

解　对于$\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$，有$\begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}>0\\ \lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\end{cases}$，即$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$

由此解得

$$1\leqslant x\leqslant 4$$

所以，$\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$的定义域为[1，4].

对于 $\arcsin\frac{2x-1}{3}$，有 $-1\leqslant\frac{2x-1}{3}\leqslant1$

即
$$-1\leqslant x\leqslant2$$

所以，$\arcsin\frac{2x-1}{3}$的定义域为[-1，2].

因此，函数 $f(x)$的定义域为[1，4]和[-1，2]的交集为[1，2].

例 2 设 $f(x)$的定义域是[0，1]，试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域($a>0$).

解 由 $f(x)$的定义域是[0，1]，得 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1\\0\leqslant x-a\leqslant1\end{cases}$

即
$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant1-a\\a\leqslant x\leqslant1+a\end{cases}$$

故
$$a\leqslant x\leqslant1-a$$

从而当 $a=1-a$ 即 $a=\frac{1}{2}$时，函数仅在 $x=\frac{1}{2}$点有定义；当 $0<a<\frac{1}{2}$时，函数的定义域为$[a，1-a]$，当 $a>\frac{1}{2}$时，无解，即定义域为空集.

例 3 函数 $f(x)$的定义域为 $0<x<1$，求函数 $f(\sin2x)$的定义域.

解 由 $0<\sin2x<1$，得

$$2k\pi<2x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad 或\quad 2k\pi+\frac{\pi}{2}<2x<2k\pi+\pi$$

故所求定义域为$\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0，\pm1，\pm2，\cdots)$.

【注意】 当 $0<\sin2x<1$ 时，$2x$ 只能所属区间是$\left(2k\pi，2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$或$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\pi\right)$，而不是$(2k\pi，2k\pi+\pi)$.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\geqslant0\\-e^x & x<0\end{cases}$，$\varphi(x)=\ln x$.

1) 求 $f[\varphi(x)]$及其定义域.

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$的函数吗?

【分析】 两个函数是否可以构成复合函数，应根据复合函数的法则，分别考虑这两个函数的定义域及值域.即，复合函数中，内层函数的值域与外层函数的定义域交集必须是非空集合.

解 1) 因为 $\varphi(x)$的定义域是$(0，+\infty)$，值域是$(-\infty，+\infty)$，而 $f(x)$的定义域是$(-\infty，+\infty)$，因此 $\varphi(x)$的值域与 $f(x)$的定义域交集非空，故 $f[\varphi(x)]$有意义，因而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x) & \varphi(x)\geqslant0\\-e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<0\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2x & x\geqslant1\\-x & 0<x<1\end{cases}$$

从上式可以看出，$f[\varphi(x)]$的定义域是$(0,\ +\infty)$.

2) 由于$f(x)$的值域是$(-\infty,\ 0]$，而$\varphi(x)$的定义域是$(0,\ +\infty)$，它们无公共部分，所以不能复合成形如$\varphi[f(x)]$的函数.

2. 函数极限的求法

求极限的方法
- 利用极限的四则运算法则
- 利用函数的连续性
- 消去零因子法
- 利用两个重要极限
- 利用有界函数与无穷小的乘积为无穷小
- 利用等价无穷小替换

极限的计算可以利用极限的四则运算法则，利用函数的连续性，但大多数遇到的还是一些形如“$\frac{0}{0}$”，“$\frac{\infty}{\infty}$”，“$\infty-\infty$”，“1^{∞}”的极限，这些极限可能存在，也可能不存在. 对于这些极限可以分别利用以下方法处理：

(1) 形如“$\frac{0}{0}$”型极限

对于形如“$\frac{0}{0}$”的极限，可以通过：①分解因式或分子分母有理化消去零因子的方法. ②利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$求解的方法. ③利用变量替换或等价无穷小替换. ④其他方法. 随着学习的深入，还会得到新的方法，如罗必塔法则等.

例 5　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$($m$，$n$为正整数).

【分析】　当$x\to1$时，极限为“$\frac{0}{0}$”型，分解因式，消去零因子.

解
$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\frac{m}{n}$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$.

【分析】　当$x\to5$时，极限为“$\frac{0}{0}$”型，应首先通过有理化分子，消去零因子.

解
$$\lim_{x\to5}\frac{5-x}{(x-5)(1+\sqrt{x-4})}=\lim_{x\to5}-\frac{1}{(1+\sqrt{x-4})}=-\frac{1}{2}$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x(1-\cos x)}{x\sin x^2}$.

【解】　当$x\to0$时，极限为“$\frac{0}{0}$”型. 利用重要极限求得
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x(1-\cos x)}{x\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x}{2x}\frac{x^2}{\sin x^2}\frac{1-\cos x}{x^2}=1$$

例 8　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$.

解　用等价无穷小替换求得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x)^2\right]^2}{x^4}=2$$

【注意】　此题连续两次用到了等价无穷小替换，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 可以看出，利用等价无穷小替换，在解题时确实很方便，为了使用这种方法，必须熟悉一些常见的等价无穷小. 例如，当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 但必须注意的是，用等价无穷小替换一定要符合替换原则，即分子或分母必须整体替换；或者当分子或分母为几个因子之积时，则可将其中某个或某些因子以等价无穷小替换. 只有因子可以作等价无穷小替换，否则会导致错误结果.

(2) 形如“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限

对于形如“$\dfrac{\infty}{\infty}$”的极限，可先将分子分母同除以分子分母的最高次幂，然后再求极限. 其中，如果分子分母均为多项式函数时，可直接利用

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ \infty & m>n\\ 0 & m<n\end{cases}\quad(\text{其中，}a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$$

写出结果.

例 9　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x+1}$.

【分析】　这是一个“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限，在极限趋向是无穷时，首先确定分子、分母中 x 的最高次以及最高次的系数，然后可以直接写出极限结果.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x+1}=8$

例 10　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}$.

解　这是一个“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限，分子分母同除以$\sqrt{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\sqrt{5}$$

例 11　求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

【分析】 有理化分子或分母是求极限常用的一种方法.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) 形如"1^{∞}"型极限

对于"1^{∞}"型极限，其函数特点是幂指数函数，指数趋于无穷，底趋于 1. 主要利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$求极限.

例 12 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6$

例 13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{x}{x-1}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^x\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-(x+1)(-1)-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1+1}\\&=\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}=1\end{aligned}$$

(4) 形如"$\infty-\infty$"型极限

对于"$\infty-\infty$"型极限,一般是先通分化简,然后再求极限.

例 14 求$\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}\right)$.

【分析】 这是一个"$\infty-\infty$"型极限，应首先通分化简.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1\end{aligned}$$

对于分段函数 $f(x)$在分段点处的极限，一般是先求函数在分段点处的左极限、右极限，然后根据极限存在的充要条件，确定函数在分段点处的极限. 如果 $f(x)$不是分段函数，单侧极限可能不同，也应先求左极限和右极限. 例如$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 等都需要考虑其左极限和右极限.

例 15 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 注意到和式中每项的分母是等差数列的部分和,因此从求和公式入手进行分解.

解 因为 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

又因为$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以有

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\\&=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2$$

例 16 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a、b 是常数，求 a、b 的值.

【分析】 利用已知极限求值的问题，要根据极限的具体情况灵活处理.

解 由题意得$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-ax}{x+1}=b$$

由上式可判定分子(x^2-ax^2-ax)为一次多项式，因此有

$$1-a=0$$

得
$$a=1$$

则
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1$$

【注意】 解这个题的关键是由题意确定$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$，然后由$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-ax}{x+1}=b$ 可知 $1-a=0$，最后得出结果.

例 17 设 $x\to0$ 时，ax^b 与$(\tan x-\sin x)$为等价无穷小，求 a 和 b.

解 由等价无穷小的概念可知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{ax^b}=1$，因此有

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{ax^b}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\,\frac{1-\cos x}{\cos x}}{xax^{b-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{ax^{b-1}\cos x}=1$$

所以 $b-1=2$，求得 $a=\frac{1}{2}$，$b=3$.

3. 函数间断点及连续区间的确定

$$\text{求函数的连续区间和间断点}\begin{cases}\text{若 } y=f(x)\text{ 是初等函数，连续区间就是函数的定义域，}\\\quad\text{间断点就是没有定义的点}\\\text{若 } y=f(x)\text{ 是分段函数，需先考查分段点处是否连续，}\\\quad\text{从而确定函数的连续区间}\end{cases}$$

函数的间断点主要出现在:分母为零的点;函数无定义的点(这里所指的是 $f(x)$在 x_0 点

无定义，但 $f(x)$在 $U(\hat{x}_0,\ \delta)$内有定义)以及分段函数的分段点.

如果点 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么只可能是 $f(x)$在点 x_0 没有定义，或是 $f(x)$在点 x_0 有定义，但极限值不等于该点的函数值.这时，可以补充或改变函数在该点的定义，使函数在该点连续.这时也称点 x_0 为可去间断点(第一类间断点).

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在，但是不相等，那么点 x_0 称为跳跃间断点(第一类间断点).

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个不存在，那么点 x_0 称为第二类间断点.

例 18　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，在点 $x=0$ 的连续性.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

因此函数 $y=f(x)$在点 $x=0$ 不连续.

【注意】　$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$

例 19　求下列函数的间断点，并讨论其类型，若属于可去间断点，则补充定义或改变定义使它连续.

1) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & |x|\leqslant 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$

解　1) 显然 $x=0$ 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$，所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点.

2) $x=0$ 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，所以 $x=0$ 是函数的第一类可去间断点.

事实上，只要补充定义 $f(0)=0$，就能使函数在点 $x=0$ 连续.

3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & x>1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$

函数的分段点为 $x=-1$ 与 $x=1$.所以 $x=-1$ 和 $x=1$ 可能是函数的间断点.

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0 \qquad \lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$，所以 $x=-1$ 为函数的跳跃间断点(第一类间断点).

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$，所以函数在 $x=1$ 是连续的.

例 20 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0\\ x+\pi & x>0\end{cases}$，试证明函数 $f[g(x)]$在点 $x=0$ 连续；$g(x)$在点 $x=0$ 不连续.

解 $f[g(x)]=\sin g(x)=\begin{cases}\sin(x-\pi) & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x & x\leqslant 0\\ -\sin x & x>0\end{cases}$，即

$$f[g(x)]=-\sin x$$

故 $f[g(x)]$在一切 x 值均连续，则在点 $x=0$ 也连续.

对于 $g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0\\ x+\pi & x>0\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-\pi)=-\pi$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\pi)=\pi$

显然，$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$，所以 $g(x)$在点 $x=0$ 不连续.

例 21 求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$的间断点，并指出其类型.

解 由 $\ln|x|$的定义域可知$x\neq 0$，又由 $x^2-3x+2\neq 0$ 得 $x\neq 1$、$x\neq 2$，故 $f(x)$的间断点为 $x=0$、$x=1$、$x=2$.

因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 和 $x=2$ 均为第二类间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$的第一类可去间断点.若补充 $f(1)=-1$，这时 $f(x)$在 $x=1$ 处连续.

【注意】 当 $x\to 1$ 时，$\ln x\sim x-1$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)(x-2)}=-1$

例 22 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x & x<0\\ k(\text{常数}) & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1 & x>0\end{cases}$，问当 k 为何值时，函数 $f(x)$在其定义域内连续？为什么？

【分析】 $f(x)$是一个分段函数，它的定义域为全体实数，$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是初等函数，所以是连续的，要使 $f(x)$在其定义域内连续，只要 $f(x)$在点 $x=0$ 连续.

解 显然 $f(x)$在点 $x=0$ 有定义，且 $f(0)=k$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+1\right)=1$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

因此，只有当 $k=1$ 时，$f(x)$在点 $x=0$ 连续，这时 $f(x)$在其定义域内是连续的.

例 23 证明方程 $x=a\sin x+b$(其中 $a>0$，$b>0$)至少有一个正根且不超过 $a+b$.

【证明】 只需证明方程 $x=a\sin x+b$ 在区间$[0, a+b]$内至少有一个根.

设 $f(x)=x-a\sin x-b$，显然 $f(x)$在$[0,a+b]$上连续，且 $f(0)=-b<0$.

$$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant0$$

由介值定理的推论可知，$f(x)$在$[0, a+b]$内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即

$$\xi-a\sin\xi-b=0$$

这就证明了方程 $x=a\sin x+b$(其中 $a>0$，$b>0$)在$[0, a+b]$内至少有一个根.显然是正根，且不超过 $a+b$.

例 24 函数 $f(x)$在(a,b)内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明在(a,b)内存在点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

【证明】 因为 $f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续，可设 $M=\max\limits_{x_1<x<x_n}f(x)$，$m=\min\limits_{x_1<x<x_n}f(x)$，则有

$$nm\leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nM$$

即

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$

由连续函数的性质知，在$[x_1, x_2]$内(当然也在(a, b)内)存在 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

【注意】

(1) 函数与反函数的关系

函数与反函数最重要的区别在于对应规律 f^{-1}与 f 不同(仅当条件 $f[f(x)]=x$ 满足时，f^{-1}与 f 相同).函数的定义域是反函数的值域.函数与反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 极限与连续的关系

$f(x)$在点 x_0 的极限存在，不能说明它在点 x_0 连续.如果 $f(x)$在点 x_0 连续，则它在点 x_0 的极限一定存在，且等于 $f(x_0)$.

(3) 函数值与极限值的关系

函数值与极限值是两个不同的概念，当 $f(x)$在点 x_0 连续时，函数值 $f(x_0)$与极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$相等.

(4) 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小.反之，如果 $f(x)$为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

(5) 具有极限的函数与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和，反之，如果函数可以表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

习题选解[1]

习题 1-1

2. 求定义域.

(2) $y=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

解 要使$\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$有意义，应有$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases}$.

要使$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$有意义，应有$\begin{cases}1+x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 0\end{cases}$.

由此得函数的定义域为$[-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1, 2)\cup(2, +\infty)$.

(3) 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$，求 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域，其中 $0\leqslant a\leqslant 1$.

解 由 $f(x)$ 的定义域为$[-1, 1]$，得$\begin{cases}-1\leqslant x+a\leqslant 1\\ -1\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，即$\begin{cases}-1-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ -1+a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$.

所以，所求函数的定义域为$[a-1, 1-a]$.

6. 某地出租汽车按下列标准收费，x 表示里程，y 表示收费金额，当 $0<x\leqslant 4$ 时，收费 7 元；当 $4<x\leqslant 10$ 时，每公里收费 0.5 元；当 $x>10$ 时，每公里收费 1 元. 请写出里程数与收费之间的函数关系，并求出 $f(5)$，$f(12)$，$f(2)$.

解 $y=\begin{cases}7 & 0<x\leqslant 4\\ 7+(x-4)\times 0.5 & 4<x\leqslant 10\\ 7+(10-4)\times 0.5+(x-10)\times 1 & x>10\end{cases}$

这个函数的定义域为$(0, A)$，A 是某个充分大的正数。

7. 作出分段函数 $y=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (x-2)^2 & 1<x<3\\ \ln(x-2) & x\geqslant 3\end{cases}$ 的图形.

解 作出分段函数的图形，如图 1-1 所示。

8. 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ x^2-1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域，并作出它的图形.

解 分段函数的定义域为$[-2, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, 2]$，其图形如图 1-2 所示。

[1] 本书“习题选解”中的习题（黑楷字体）均选自主教材《应用数学基础（上册）》（王庆云、秦克主编），题号均相对应，余同.