近代數學概觀

第一冊

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

（第一冊）

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯者 齊植椠

中華書局出版

第一版序

遠在二千餘年前，若干數學常識，已被視作受教育者所不可缺少之智力工具．時至今日，數學在教育上之傳統地位，業已發生嚴重之危機．不幸，職業數學者應分負其責．數學之敎導，已漸流於求解習題之空洞訓練，此固可發展形式上之能力，然未能導於眞正之了解或更深之自力思考．數學之研究，有過度專門及過度重視於抽象觀念之趨勢，對於實用及其與他種科學之關聯似已漸被忽視．雖然，此種情形，絲毫不能辯解，謂為一孤立之政策，並且相反地，凡覺悟智慧訓練之價值者，因此而發生一強烈之反感．敎師、學生以及受敎育之大衆，要求一建設性的改良，而不因些微阻力便出於放棄之一途．吾人之目標，在於純正領會數學為一有機之全體且為科學思考之基礎．

若干美妙之傳記及歷史以及若干活躍之通俗著述已激起潛伏之普遍興趣．但學問並非僅恃間接方法以求得者．若一人從未細心傾聽，僅恃最炫耀之新聞雜誌，以求音樂敎育，是不啻緣木求魚；對數學之了解，亦復如是，若僅作不吃苦之娛樂態度，終必毫無所得．對現行數學內容之確切接觸乃必要者．雖然，細別及末節，應予避免，數學之出現，應如常事之不必過度鄭重，一如避免可厭之武斷然，此種武斷，將阻礙顯露其主旨或目標，且對純正之努力為一不良之阻力．由最基本之元素，可能依捷徑進行，而達超越之點，由此，近代數學之實質及動力，卽可測出．

本書為依此方向之一種企圖．因僅需要預具優良之高中程度，故可視作大衆讀物．但此並非允許規避一切努力之危險傾向．讀者需要適當之成熟智慧以及自己思考之意趣．本書寫給初學以及學者、學生以及敎師、哲學家以及工程師、敎室以及圖書館．或謂此一企圖，未免希望過奢．在他種工作繁忙之下，經過若干年之準備，此書之印行，已採取若干折衷之處．批評及建議，將極表歡迎．

無論如何,著者希望本書可作爲獻給美國高等教育之有用禮品,以答謝有緣受聘來此之雅意. 關於本書設計及原理方面之責任由著者負之,任何奬飾,必須與Herbert Robins君共享之.自渠加入工作之後,渠盡心完成其本人之論題,且彼之合作,誠爲完成本書出版之決定因素.

若干友朋之相助,應致深切之謝忱. 承 Niels Bohr, Kurt Friedrichs, 及 Otto Neugebauer 諸君之指教,於哲學與歷史方面爲之生色; Edna Kramer 由教師之觀點,曾予以甚多建設性之批評; David Gilbarg 供給首次之講演筆記, 此乃本書之雛形; Ernest Courant, Norman Davids,Charles de Prima, Alfred Horn, Herbert Mintzer, Wolfgaug Wasow 諸君,累次傳抄原稿,且建議改善若干細節;Donald Flanders 對於排印,曾作若干可貴之建議,且對原稿作細心校對; John Knudsen, Hertha von Gumppenderg, Irving Ritter, 及 Otto Neugebauer 完成一切之作圖; H. Whitney 於附錄中,作習題之收集.本書之基礎,係根據於多次教程與講義之擴展,此曾得羅氏教育基金委員會之大量資助. 又對於 Waverly 印刷所,特別 Grover C. Orth 君之勝任工作,及牛津大學印刷所,特別 Philip Vaudrin 君與 W. Oman 君之贊助與合作,應致謝忱.

New Rochelle, N. Y, August 22,1941.

R. Courant.

第二、第三及第四版序

在過去數年中，由若干跡象，以見對數學之知識與訓練，發生更迫切之需要．今日，苟非學生與教師，試圖超出數學形式主義之外，以緊握數學之實質，則挫折與迷惑之危險，將有更甚者．此書卽爲此輩學生與教師所寫，而第一版之反應，鼓勵著者，敢希望本書，堪爲讀書之一助．

於新版中，因若干讀者之指敎，曾作甚多之修正與改進，第四版之增訂，得 Natascha Artin 君之協助不少，玆附致謝．

New Rochelle, N. Y., March 18, 1943.
October 10, 1945.
October 28, 1947.

R. Courant

本書用法

本書依系統之秩序編著，但讀者可不必逐頁逐編順次閱讀．例如，研究歷史及哲學之導言，最好在其他部分熟讀之後．各編大致獨立而自成系統，始則淺近易解，循序漸進，至編末及補遺，依次加深．故讀者若僅需瞭解一般概念，而不精求特殊知識，於明瞭某章之內容後，便可滿足，不必求更詳盡之探討．

數學基礎稍差之學生，可於書中，作一選擇．凡具星號或小字之部分，表示初讀時可以略去，不致影響學習以後各節．又如讀者，僅擇其所最喜悅之各編各章而研究之，亦無不可．大部習題不具習見之性質；較困難者附以星號．苟讀者對此多不能解，亦不足怪．

高中教師，於教學其高材生時，從幾何作圖與極大極小二編，可得不少有益之材料．

本書可供大學一年生及有大學畢業程度者之用，即事業家而有科學興趣者，讀之亦頗適宜．又本書可作大學選修科中數學基本觀念之一種教程．第三、四、五諸編可用於幾何課程，而七及八兩編，微積分自成一系統，特注重於基礎之了解，與普通教本迥異．若教師因特殊需要內容更詳習題更多之材料，以作補充教材，則本書視爲入門之書可也．書中分佈之大量習題，以及書末之附加總習題，可在教室中作練習之用．

吾人甚希望學者對於書中若干細節以及某些初步討論，發生興趣，細細研討，緣此乃廣泛發展之種子也．

近代數學概觀第一冊

目　次

何謂數學?

數學爲人類心靈之一種表現,反映活潑之意志、沈思之理性、以及全美之願望.其基礎爲邏輯及直觀、分析與作圖、一般及各別性之研討.雖不同之傳統可注重不同方面之發展,然此不過異曲同工及綜和企圖之一相互作用,以作成數學科學之生機、致用、以及其至上的價值.

無疑的,一切數學之發展,有其心理的根據,多少具有實際的需要.但因應用上之需要而加以研究之後,則不免其本身取得一種動力,以致超越直接實用之範圍.此種由實用科學以進至理論科學之趨勢,恆見於古代歷史,一如工程師及物理學家對近代數學所作之種種供獻也.

有記錄之數學源於東方,約於公元前二千年,巴比倫人集合極豐富之資料,依今日之分類,應歸之於初等代數.然作爲一現代科學,數學實遲至公元前五、四世紀間,始出現於希臘.東方人與希臘人之逐漸接觸,始於波斯王朝,至亞利山大遠征之後乃達於極點,遂使希臘人熟知巴比倫數學及天文學之成就.不久之後,數學即受彼時希臘盛行之哲學研究之洗禮.故希臘思想家,能感覺數學觀念上最困難之諸點,如連續、運動、無限以及以已知單位量度任何一量之問題.在經過可欽佩之努力之後,便發生一種要求,而其結果,即得 Eudoxus 關於幾何連續之理論.此一成就,可與二千餘年後無理數之現代理論齊名.數學中此種公理演繹的趨向,起源於 Eudoxus 時代,而於 Euclid 之幾何原本,集其大成.

雖然,希臘數學之理論的及公理的趨勢,保持其重要之一種特質,且已發生重大之影響,但吾人不能太過重視,此事在古代數學中,對物理實體之應用及關聯所佔之地位;且敍述之方法,苟不若 Euclid 之嚴密,反常常更被採用.

關於"不可度"量之困難之早期發現,阻止希臘人對東方所成計數術之發展.彼等轉其方向,以進入純公理幾何之園地.以故科學史上,一可異之迂回肇始,而重大之機會或因此失去.因將近二千年間,希臘幾

何傳統之重負，妨礙數之觀念及代數方面之正常發展.此種發展後來便作成近代科學之基礎.

在一迂緩準備之後，至十七世紀，數學與科學之革新，因解析幾何及微積分之發明，表現其強大之局面.雖希臘幾何仍保持其重要之地位，關於希臘公理的結晶及綜合的演繹之理想，至十八、十九世紀間漸漸消滅.邏輯上具明顯之理由，由清晰定義，及非矛盾的"顯然"的公理作出發點，在新數學之開拓上，似已不關重要.直觀之猜想，以及無意識之神祕，或形式步驟之超人能力之盲目自信，所交織之有力的理由，均能開拓極豐富之數學園地.依此成就之鼓勵，漸漸導入批評的克己之精神.因法國大革命之激發，至十九世紀，對於高等研究之推廣，穩定基礎之內在的需要及其更安全之願望，難免返回新數學基礎之改善，特別對於微積分及極限之基本概念.故十九世紀不但爲新發展之時代，且對精確嚴密證明之古典的理想，具有成功之回溯探討.在此方面，甚至勝過希臘科學之典型.此卽再度趨向於邏輯純粹及抽象理論一方面.時至今日，吾人可仍視爲一時代，雖於批評改造之時或爲不可免者，然吾人希望純數學及其主要應用間之不幸的歧點，將來必可逐漸接近.此復得之內在力以及依更清晰之理解作基礎所得之極大簡化情形，使今日可能把握數學理論而不忽略其應用.吾人再度作成純粹及應用科學間之固有的聯繫以及抽象的一般性及文飾的各別性間之良好的平衡，將爲此後數學工作之最高目標.

此處不宜詳論數學之哲學的及心理的分析.僅有數點今將特予說明.現在流行之過度重視數學之公理的演繹性，似乎非常危險.自然，依作圖之發明，以及導引與推動的直觀，甚易避免簡單之哲學陳述；但仍保存任一數學成就之中心部分，卽對最抽象之場合亦然.苟精鍊之演繹形式爲最終目的，則直觀與作圖至少爲其原動力.科學生命之一嚴重威脅包含下之觀點，謂數學者，不過定義及公理所得之一組結論而已，此定義及公理應具一致性，但可由數學家之自由意志所創造.若此種說法

爲正確,則數學將不爲任一智慧之人所注意.如此,數學不過定義、法則及三段論法之一種遊戲,不具動機或目的.謂智慧依此妄想,可創造一有意義之公理的系統,實一種欺騙的似是而非的眞理.僅於負責解決有機的全體之訓練下,僅於眞實的需要引導之下,自由意志,始可達成具有科學價值之結果.

邏輯分析之沈思的趨向既不能代表數學之一切,故漸引入對於數學事實及其相互關係之一更深刻之了解,以及對數學觀念之更淸晰的領會.由此,遂展開數學之現代的觀點,而爲一般科學態度之典型.

無論哲學觀點如何,科學觀察之一切目標,在於詳細討論一事物對於所察得材料之一切可能之關係.自然,只靠知覺,不能作成知識.必應與某種基本實體,卽"本體"("thing in itself")相契合,相印證,而本體非由直接物理觀察所得者,乃屬於玄學.雖然,科學步驟,重在排除一切玄學性之元素,而觀察可見之事實,常爲觀念及構思之最終根源.拋棄"本體"之領悟,"最終眞理之認識",以及世界最終本質之解釋,可能爲樸質的熱心家之心理的艱辛工作,但事實上,此乃近代思潮上一最有益的轉變.

因勇於排除玄學之原理,遂使物理上得有若干極大之成就.緣Einstein 試將"異地同時出現之事間"之觀念,均化爲可見之現象;而對此觀念必有一科學意義之信念,彼又指出,乃一玄學的偏見,因此彼遂得相對論之線索. Niels Bohr 及其生徒分析一事實:任一物理觀測,必附帶對觀測對象之觀測儀器所生之效果,依此,顯然可知,一質點位置及速度之精密的同時固定,非爲物理意義之認爲可能,此種發明之遠大後果,組成量子力學之現代理論,而爲今日任一物理學家所熟知者.十九世紀流行之概念,謂空間質點之力學的力與運動爲其自身之事,而電、光及磁歸入或"解釋"爲力學之現象,一如對熱所作之解釋然."以太"之發現,初認爲一假想的媒介物,然亦不能完全對光或電,作力學運動之解釋.以後漸漸實現,知以太爲不可觀測者,屬於玄學而不屬於物理.有

些人感覺煩惱，有些人則感慰藉，然關於光與電之力學解釋以及以太，終於完全被取消.

在數學中，有一同樣情況存在，或更爲著重.多年中，數學家恆視其所研究對象，如數、點等等，其本身爲實體之事. 因此種實體，常阻礙適當解釋之企求，十九世紀之數學家漸漸憬悟，此種對象作爲實體之意義之問題，在數學之內，不能予以解決. 關於此種對象之適切說法不能涉及實體之實現；僅說明數學中"無定義對象"，與對此種對象之運算法則間相互之關係.點、線、數"確切"爲何物不能亦不需在數學中討論之.兩點定一直線，數依某種法則結合以得其他之數等等，對"可驗明"之事實，其內容及對應，不過爲構圖與關係之說明而已. 初等數學觀念不能證實之必要性之清晰的認識，已爲近代公理發展上一最重要最豐富之一結果.

幸虧創造之意志，遺忘武斷的哲學信念，無論何時凡附著於此信念，必將阻礙建設性之成就. 對學者同樣對外行，非哲學但爲數學本身之活潑的經驗，始能答覆此問題：何謂數學？

近代數學概觀第一册

第一編　自然數

引　言

數爲近代數學之基礎,然則何爲數?所謂$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$及$(-1)(-1)=1$,其意果如何?吾人於中小學時,卽知如何把握分數及負數,但欲眞正瞭解數系之意義,吾人須返至更單純之元素.昔希臘人選點與線之幾何觀念,作爲數學之基礎;而"所有之數學命題,最終必可化爲自然數 1,2,3, · · · 之命題",則變爲近代之指導原理矣.

人類的智慧,創造出如何數各種集合中之個體,所數得之數,自與所數得之個體的特性無關.數字"六"乃由所有包含六個事物之集體之一抽象的觀念;無關於此類事物之任何特性,以及所用之符號.兒童對於數字,常常與有形的物體保持連繫,例如手指及算珠等.對於各種不同型事物,分別予以各組數字,在原始的語言中,已啓示一種具體的數字之意義.

幸虧數學家不須探討"由具體事物之集體,到抽象的數之概念之過程"之哲學的性質.吾人接受自然數視爲已知,益以其加法及乘法之兩種運算,而將自然數復可組合之.

第一章　整數之計算

第一節　算術之定律

自然數或**正整數**之數學的理論卽所謂**算術**.算術根據於下之事實,

卽整數之加法與乘法,爲若干定律所支配.爲說明此種定律之普遍性,吾人不能用符號如 1,2,3 等,此不過代表特殊之數.下式

$$1+2=2+1$$

僅爲"二整數相加,與其秩序無關"之定律之一特別舉例而已.因此,若於整數之某種關係內,與所含特殊整數之價值無關,則吾人應以字母a, b, c, $\cdots$代表整數.依此規定,吾人可說明算術中五個基本定律,爲讀者所熟知者:

1) $a+b=b+a$, 2) $ab=ba$,

3) $a+(b+c)=(a+b)+c$, 4) $a(bc)=(ab)c$,

5) $a(b+c)=ab+ac$.

首二者爲加法及乘法之**交換律**,說明於加法及乘法中,可互換所含之元素.第三爲加法之**結合律**,說明三數相加,以第二、第三兩數之和加入第一數或以第三數加入第一、第二兩數之和,結果相同.第四爲乘法之結合律.最後爲**分配律**,說明以一整數乘諸數之和,等於此整數乘和中各項,再加各乘積.

算術中之定律非常簡單,可視爲當然.但除對整數外,對其他事物未必能適用.設 a 及 b 非表整數之二符號,而表二種化學物質,則所謂"加法",其交換律未必常適合.例如以硫酸加入水內卽得稀硫酸,然以水加入濃硫酸內則每對實驗者發生不幸之結果.同理,可說明對此種化學的"加法",結合律與分配律亦常不能成立.因此,吾人可以想像有一種算術,上述之 1)——5) 定律,可以不完全成立.在近世數學中,此類系統,確曾精密探討之矣.

對於抽象整數觀之一種具體的模型,可明示定律 1)——5) 所依之直觀的基礎.不用通常數之符號 1,2,3, 等等,對於一種組合(例如一株樹上之蘋果是)內物體之個數,今以矩形箱中之一組點表之,每一點表一物.對此種箱之組合,吾人可藉以研究整數算術之定律.將二整數 a 及 b 相加,可將相當之箱,二面相聯而去其間之界.