高职高专高等数学精品课程教材

高等数学学习指导

（经管类专业适用）

林　漪　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

高职高专高等数学精品课程教材

高等数学学习指导

（经管类专业适用）

林 漪 主编

高等教育出版社

内容提要

本书是与窦连江主编《高等数学(经管类专业适用)》相配套的学习指导书。全书共分十二章，主要内容有一元函数微积分、常微分方程、偏导数与全微分、线性代数、线性规划、概率论和数理统计等。各章均由“知识结构”、“教学基本要求和重点、难点”、“解题指导”、“综合练习题”及“答案与提示”五部分组成。本书针对基本概念、基本运算中的疑难内容，通过例题分析或一题多解的形式，使读者能掌握解题思路，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高职高专院校经管类专业高等数学课程的辅助教材，也可供相关科技人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/林漪主编. —北京：高等教育出版社，2006.9

经管类专业适用

ISBN 7-04-020107-0

Ⅰ.高... Ⅱ.林... Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第091466号

策划编辑 周先海 **责任编辑** 邓雁城 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 张 岚 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2006年9月第1版
印　　张	15	**印　　次**	2006年9月第1次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	19.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 20107-00

高职高专高等数学
精品课程教材编委会

序　言

高等职业教育是我国高等教育体系的重要组成部分，也是我国职业教育体系的重要组成部分。伴随着我国高等职业教育的迅猛发展，天津市的高等职业教育取得了长足进步。

近年来，对高等职业教育的研究与实践都取得了丰硕的成果，但高等职业教育课程改革仍是我国高等职业教育面临的重点与难点。高等职业教育的核心是培养学生的实践能力和创新精神。如何使接受高等职业教育的学生体现出高职教育的特性，以获得必备的素质与技能而获得用人单位与社会的认可，一直是我们长期研究的课题。数学教育在这个方面更为突出，高等职业教育数学教学课程改革，迫在眉睫，任重而道远。

数学是一门基础科学，许多科学技术成果、技术领域的重大突破，数学在其间都起到了重要的支撑作用。数学、数字无处不在。在数学课程教学过程中展现数学在科学技术中的巨大作用和数学无处不在的巨大魅力，应是教学的重要目标之一。在教学过程中，应围绕着教学目的具体实施教学，不断修正教学活动中的表现方式、推理形式、教学技术乃至教学内容，充分展现高职教育的特色和优势。

数学不仅仅在理工学科领域中占有重要地位，在经济、管理、金融、人文科学等各个领域得到广泛的应用。通过该课程的教学，不但使学生具备学习所需要的基本数学知识，而且还使学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到必要的训练和熏陶，使他们具有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物、认识和利用数形规律的初步能力。因此，高等数学教学不仅关系到学生在整个学习期间的学习质量，而且还关系到学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等科学和文化素养。高等数学教学既是科学的基础教育，又是文化基础教育，是素质教育的一个重要的方面。进入信息时代，数学日益渗透到经济生活的每一个领域，数学素质成为高技能人才的基本素质。

提高学生的实践能力和创新精神，对数学教学而言，就要培养学生具有较强的直觉思维能力和应用数学的意识。在 2004 年和 2005 年，天津工程职业技术学院和天津中德职业技术学院的“高等数学”课程先后被评为天津市高等职业教育精品课程，高等数学的教育教学与改革有了进一步的提高。本着“必须、够用为度”的原则，在这两门精品课程的基础上，此套教材得以出版。该套教材尽量考虑到了各专业的不同特点，教学中需要针对不同专业的需要作一定的取舍；同时，也积极探索了通过数学实验来提高学生的实践能力和综合素质。

创新是民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力。胡锦涛同志指出：“建设创新型国家，关键在人才。要完善培养体系，从教育这个源头抓起，根据我国经济社会发展特别是科学技术事业发展的要求，继续深化教育改革，加强素质教育，努力建设有利于创新型科技人才生成的教育培养体系。”随着天津作为国家职业教育改革试验区建设的不断深入，天津市的高职

教育发展的形势越来越好，社会认同度越来越高，办学思路也越来越清晰。衷心地希望高职教育战线的教师，从实施人才强国战略高度，进一步认清面临的形势与任务，加快培养高素质高技能人才，抢抓机遇，为高等职业教育跨越式发展做出贡献。

龙德毅

2006年7月

前　言

本书是与窦连江主编《高等数学(经管类专业适用)》相配套的学习指导书。本书与主教材的知识结构顺序同步，以节为单位，按照章进行编写。各章的结构相同(除第12章)，主要包括“知识结构”、“教学基本要求和重点、难点”、“解题指导”、“综合练习题”、“答案与提示”等。

“知识结构”与“教学基本要求和重点、难点”是对每章的知识概况进行简要的介绍；“解题指导”中“典型例题”是针对基本概念、基本运算中的疑难内容，通过例题分析或一题多解，让读者掌握解题思路，提高分析问题和解决问题的能力。书中不仅有综合练习题，而且在每节内容后，也有相应的练习题。

本书力图帮助学生及时、准确地理解基本概念，掌握基本运算，并使学生得到技能的强化。本书注重数学在生产中的实际应用，为学生在专业课程和生产实践中使用数学做好准备。

本书由天津机电职业技术学院林漪担任主编，天津工程职业技术学院窦连江和天津电子信息职业技术学院陈凤英担任副主编。参加本书编写的人员有：天津电子信息职业技术学院孙晓晔(第1章)、陈凤英(第2章)；天津中德职业技术学院任晓华(第3、4章)、张雅琴(第6章)；天津工程职业技术学院窦连江(第5章)、贺静(第7章)、李英(第8章)；天津机电职业技术学院王仲翔(第9章)、林漪(第11章)；天津交通职业技术学院杜庆、陆玉新(第10章)；天津对外经济贸易职业学院黎雁(第12章)。全书的结构安排、统稿、定稿工作由林漪承担。

由于内容特点的限制，在本书的第12章中的“解题指导”部分，没有按节为单位进行编写，而是按章统一编写。

本书的编写是在天津市教委领导下，在各高职高专院校领导的支持下，各位参编教师通力协作的结果。天津市教委高职高专处叶庆、杨荣敏老师对本书的编写提出许多指导性意见并给予热情帮助。本书承蒙南开大学陈吉象教授主审，提出了诸多宝贵意见和修改建议。高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并致谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中可能会有不少缺误，请读者予以批评指正。

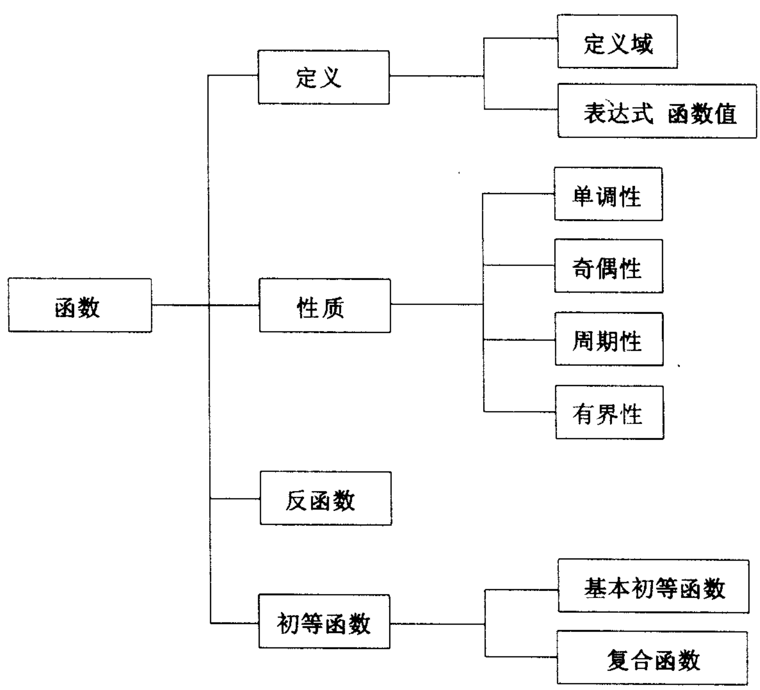
编者

2006年6月

目　录

1 函数

二、知识结构



二、教学基本要求和重点、难点

1. 教学基本要求

(1) 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值；

(2) 会求分段函数的定义域和函数值，并会作出简单分段函数的图形；

(3) 理解函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性的概念，会判断所给函数的奇偶性；

(4) 了解函数与其反函数之间的关系(定义域、值域、图像)，会求单调函数的反函数；

(5) 掌握基本初等函数的简单性质及其图形，掌握复合函数的复合过程；

(6) 了解初等函数的概念.

2. 教学重点与难点

(1) 重点

函数的概念及其简单性质，复合函数的概念，函数定义域的确定，基本初等函数的性质及图形.

(2) 难点

函数概念的理解，分段函数的意义，反函数的求法，复合函数的概念，函数的应用.

三、解题指导

1.1 函数及其性质

(一) 典型例题

例 1 求函数 $y=\dfrac{2}{|x|-x}+\sqrt{\ln(3+x)}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义，必须

$$\begin{cases}|x|-x\neq 0, & (1)\\ \ln(3+x)\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $$|x|\neq x,$$

显然，当 $x\geqslant 0$ 时，$|x|=x$；因此，使 $|x|\neq x$ 的 x 是 $x<0$，

由(2)得 $$3+x\geqslant 1，即\ x\geqslant -2,$$

又该函数的定义域应取 $(-\infty,0)$ 与 $[-2,+\infty)$ 的交集，故所求定义域为 $[-2,0)$.

例 2 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & |x|\leqslant 2,\\ x^2-1, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(3)$，$f(-4)$，$f(a-1)$.

解 $f(0)=3\times 0+2=2$； $f(-1)=3\times(-1)+2=-1$；

$f(3)=3^2-1=8$； $f(-4)=(-4)^2-1=15$；

$$f(a-1)=\begin{cases}3a-1, & -1\leqslant a\leqslant 3,\\ a^2-2a, & a<-1 \text{ 或 } a>3.\end{cases}$$

例 3　将函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$ 写成分段函数，并作出该函数的图形.

解　因为
$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}\text{和 } x\neq 0,$$
所以，当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{-x}{x^2}=-\dfrac{1}{x}$，

故
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ -\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$$
$f(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

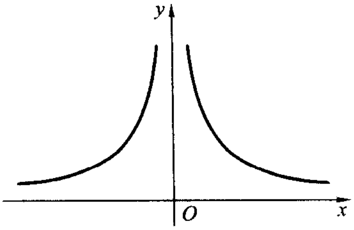


图 1-1

例 4　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

解　将所给函数写成指数式，再解出 x.

因为
$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$
即
$$e^y-x=\sqrt{x^2+1},$$
两边平方，得
$$(e^y)^2-2xe^y+x^2=x^2+1$$
$$2xe^y=e^{2y}-1,$$
解之得
$$x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$
故所求反函数为
$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 5　设 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-1$，求在 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解　利用奇函数的定义 $f(-x)=-f(x)$ 和已知条件：$x>0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

当 $x<0$ 时，
$$-x>0,$$
因此
$$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1,$$
而
$$f(x)=-f(-x)=-(x^2-1)=-x^2+1,$$
故 $x<0$ 时，
$$f(x)=-x^2+1.$$

例 6　判断下列函数是否为周期函数，如果是周期函数，求其周期.

(1) $f(x)=\sin(2x+3)$；　　(2) $f(x)=\sin^2 x$；

(3) $f(x)=x\cos x$；　　(4) $f(x)=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$.

解　由定义来判断一个函数是否为周期函数是较复杂的，但我们可以根据一些已知函数的周期来判断，并利用这些已知函数的周期求未知函数的周期.

(1) 由正弦型函数的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ $(\omega>0)$，得函数 $f(x)=\sin(2x+3)$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，又 $\cos 2x$ 的周期为 π，$\dfrac{1}{2}$ 是常数，其周期为任意实数，

所以$f(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$的周期仍是$\pi$，即$f(x)=\sin^2 x$的周期为$\pi$.

(3) $f(x)=x\cos x$不是周期函数.

由于$y=x$不是周期函数，因此要使$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$，必须$T=0$，由此可判断$f(x)=x\cos x$不是周期函数.

(4) $f(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$是周期函数.

因为$\sin x$的周期是$T_1=2\pi$，$\cos\frac{x}{2}$的周期是$T_2=4\pi$；$f(x)$的周期应为T_1和T_2的最小公倍数，故$f(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$的周期是$T=4\pi$.

例7 某厂生产某种产品1 600 t，定价为150元/吨，销售量在不超过800 t时，按原价出售，超过800 t时，超过部分按八折出售，试求销售收入R与销售量x之间的函数关系.

解 当$0\leqslant x\leqslant 800$时，$R=150x$，

当$800<x\leqslant 1\,600$时，$R=150\times 800+150\times 0.8(x-800)=24\,000+120x$，

于是R与x之间的函数关系为

$$R=\begin{cases}150x, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 24\,000+120x, & 800<x\leqslant 1\,600.\end{cases}$$

(二) 练习题

1. 选择题.

(1) 下列各组函数中表示相同函数的一组是(　　).

A. $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=3\ln x$ 和 $y=\ln x^3$

C. $y=x+1$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$　　D. $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$

(2) 将函数$f(x)=1+|x-1|$表示为分段函数时$f(x)=$(　　).

A. $\begin{cases}2-x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x, & x\geqslant 1,\\ 2-x, & x<1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2-x, & x\geqslant 1,\\ x, & x<1\end{cases}$

(3) 下列函数中偶函数是(　　).

A. $y=x^3e^{-x^2}$　　B. $y=\cos x+x$　　C. $y=\ln(x^2+1)$　　D. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(4) 下列函数在其定义域内不是单调函数的是(　　).

A. $y=x^2+1$　　B. $y=2^x$　　C. $y=2-\ln(x+1)$　　D. $y=\arctan x$

2. 填空题.

(1) 函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$的定义域是________.

(2) 函数$y=3^x+2$的反函数是________.

(3) 函数$y=|\sin x|$的周期是________.

（4）已知$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，若当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\log_3(1+x)$，则$f(-2)=$______.

3. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$；　　（2）$y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；

（3）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}$；　　（4）$y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$.

4. 作出下列分段函数的图形.

（1）$y=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 2-x^2, & |x|>1;\end{cases}$　　（2）$y=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$

5. 设$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ 1+x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求$f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{e}\right)$，$f(-e)$，$f(1+a)$.

6. 用长为l的铁丝弯成下部为矩形上部为半圆形的框架（如图 1－2 所示），若矩形底边长为$2x$，求此框架围成的面积y与x的函数关系，并求出其定义域.

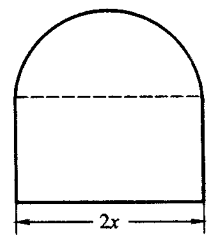


图 1－2

1.2 初等函数

（一）典型例题

例 1 讨论下列函数可否复合成复合函数，若可以，求出复合函数及其定义域.

（1）$y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=\arcsin x$；

（2）$y=f(u)=\sqrt{u-1}$，$u=\varphi(x)=\ln\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 两个函数复合构成一个复合函数实质上是将一个函数代入另一个函数得到一个新的函数，这时，要注意构成复合函数的条件，即$D_f\cap M_\varphi\neq\varnothing$（其中$D_f$为$f(u)$的定义域，$M_\varphi$为$\varphi(x)$的值域）.

（1）因为$y=f(u)=e^u$的定义域为$D_f=(-\infty,+\infty)$，

$$u=\varphi(x)=\arcsin x \text{ 的值域 } M_\varphi=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

由于$D_f\cap M_\varphi\neq\varnothing$，

所以$f(u)=e^u$与$u=\arcsin x$可以复合成复合函数，其表达式为$y=e^{\arcsin x}$，定义域为$x\in[-1,1]$.

（2）因为$y=f(u)=\sqrt{u-1}$的定义域为$D_f=[1,+\infty)$，

$$u=\varphi(x)=\ln\frac{1}{1+x^2}\text{的值域 } M_\varphi=(-\infty,0],$$

由于$D_f\cap M_\varphi=\varnothing$，

所以$f(u)=\sqrt{u-1}$与$u=\ln\dfrac{1}{1+x^2}$不能复合成复合函数$f[\varphi(x)]$.

例 2 设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$f[1+f(x)]$.

解 求复合函数$f[1+f(x)]$的方法是在$f(x)$的表达式中，用$1+f(x)$代替x，

$$f[1+f(x)]=\frac{1-[1+f(x)]}{1+[1+f(x)]}=\frac{-f(x)}{2+f(x)}=\frac{-\dfrac{1-x}{1+x}}{2+\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{x-1}{x+3}.$$

例 3 已知$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3-x}{x^4+1}$ $(x\neq 0)$，求$f(x)$.

解 由$f[\varphi(x)]$的表达式求$f(x)$有两种方法，①令$u=\varphi(x)$，解出x后，代入$f[\varphi(x)]$中；②将$f[\varphi(x)]$表达式的右边变形成为含有$\varphi(x)$的式子，再用x代替$\varphi(x)$即可．此题利用方法二比较简捷.

因为
$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{x-\dfrac{1}{x}}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2},$$

所以
$$f(x)=\frac{x}{x^2+2}.$$

例 4 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2-1)}}$；　　　　(2) $y=x^{x+1}$.

解 (1) 函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2-1)}}$是由$y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$，$u=\ln v$，$v=x^2-1$复合成的.

(2) 先将函数$y=x^{x+1}$变形为$y=e^{(x+1)\ln x}$，

由函数$y=e^{(x+1)\ln x}$的复合过程可求得函数$y=x^{x+1}$是由$y=e^u$和$u=(x+1)\ln x$复合成的.

例 5 某企业原来每月耗水1 000单位，采用某些技术革新措施，使耗水量以平均每月下降10%的速度减少，试建立耗水量y与经过月份数x的函数关系．四个月后，耗水量能降到原来的百分之几？

解 由题意知，下一个月的耗水量是上一个月耗水量的$1-10\%$，因此x个月后的耗水量是

$$y=1\,000(1-10\%)^x.$$

当$x=4$时，$y=1\,000(1-10\%)^4\approx 656.1$，故四个月后，耗水量能降到原来的65.61%.

(二) 练习题

1. 选择题.

(1) 已知$f(x)=\log_3 x$，则$f(x)+f(y)=($　　$)$.

A. $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$　　B. $f(x+y)$　　C. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)$　　D. $f(xy)$

(2) 下列函数中基本初等函数是(　　).

A. $y=x-\tan x$　　B. $y=|x|$　　C. $y=x^{-\frac{2}{3}}$　　D. $y=\log_2(x+1)$

(3) 设 $F(x)=\ln x$，$f(x)=1-x^2$，则函数 $g(x)=F[f(x)]$ 的定义域是(　　).

A. $\{x\mid x>0\}$　　B. $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$　　C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\{x\mid x\neq\pm 1\}$

(4) 如果 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 (x\neq 0)$，则 $f(x)=$(　　).

A. $(1+x)^2$　　B. $(1-x)^2$　　C. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 (x\neq -1)$　　D. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是________.

(2) 函数 $y=\arctan x$ 的值域是________.

(3) 已知 $f(x^6)=\log_2 x$，则 $f(8)=$________.

(4) 由 $y=\sqrt{u}$，$u=2+v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的复合函数是________.

3. 已知 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=3-\cos x$，求 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

5. 写出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=(1+\ln x)^5$；　　(2) $y=\cos^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(3) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$；　　(4) $y=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)^2$.

6. 某服务部门原来每月营业额 1 万元，由于改善了管理工作，营业额平均以每月增长 20% 的速度增加，试建立营业额 y 与经过月份数 x 的函数关系式，并求出半年后此部门的月营业额能够达到多少？

1.3 应用与实践

(一) 典型例题

例 1 某商品在市场上的日需求量 Q(件)与单价 p(元/件)有关系式 $Q=54-3p$，试求销售收入 R 与 p 的函数关系；p 取何值时销售收入 R 达到最大值？此时的需求量是多少？销售收入又是多少？

解 销售收入 R 与单价 p 的函数关系是

$$R=pQ=54p-3p^2,$$

即

$$R=-3(p-9)^2+243.$$

因此，当 $p=9$ 元时，销售收入最高，此时的需求量为

$$Q=54-3\times 9=27(\text{件}),$$

销售收入 $R=243$(元).

例 2 某工厂生产某产品 x 吨所需的费用为 C 元，而卖出 x 吨的价格为每吨 p 元，已知 $C=1\,000+5x+\dfrac{1}{10}x^2$，$p=45-\dfrac{x}{30}$，若生产出的产品都能卖掉，试将利润表示为 x 的函数，并求出利润最大时每吨的价格.

解 设卖出 x 吨的利润为 $L(x)$，则

$$L(x)=px-C=\left(45-\frac{x}{30}\right)x-\left(1\ 000+5x+\frac{1}{10}x^2\right)$$

即

$$L(x)=-\frac{2}{15}x^2+40x-1\ 000\ (x>0).$$

利用二次函数的性质可求出，当 $x=150$ 时，$L(x)$ 最大，

这时每吨的价格为

$$p=45-\frac{150}{30}=40(元).$$

例 3 一工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某产品分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件，为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产量为依据，用一个函数模拟产品的月产量 y 与月份数 x 的关系，模拟函数选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$（其中 a,b,c 为常数），已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件，问用以上哪个函数作模拟函数较好？并说明理由.

解 设 $f(x)=mx^2+nx+p\ (m\neq 0)$，依题意知

$$\begin{cases}f(1)=m+n+p=1,\\ f(2)=4m+2n+p=1.2,\\ f(3)=9m+3n+p=1.3.\end{cases}$$

解上面方程组，得

$$\begin{cases}m=-0.05,\\ n=0.35,\\ p=0.7.\end{cases}$$

所以

$$f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7,$$

这时

$$f(4)=1.3.$$

再设 $g(x)=ab^x+c$，则

$$\begin{cases}g(1)=ab+c=1,\\ g(2)=ab^2+c=1.2,\\ g(3)=ab^3+c=1.3.\end{cases}$$

解上面方程组，得

$$\begin{cases}a=-0.8,\\ b=0.5,\\ c=1.4.\end{cases}$$

所以

$$g(x)=-0.8\times(0.5)^x+1.4,$$

这时

$$g(4)=1.35.$$

显然，$g(4)$ 的值比 $f(4)$ 的值更接近于 4 月份的产量 1.37 万件，故应选函数 $y=-0.8\times(0.5)^x+1.4$ 作模拟函数较好.

例 4 某机器现价值 50 万元，每年的折旧率是 10%，问 10 年后它的残值（即剩下的价值）是多少？

解 依题意，机器下一年的残值是上一年的 $(1-10\%)$ 倍，因此 x 年后机器的残值是

$$y=50(1-10\%)^x\quad x\in\mathbf{N}^*.$$

当 $x=10$ 时，有

$$y=50(1-10\%)^{10}\approx 17.43\ 万元.$$