高等数学

（下册）

主　编　吴振远

副主编　何水明　李少华

中国地质大学出版社

高 等 数 学

（下册）

主　编　吴振远

副主编　何水明　李少华

中国地质大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/吴振远主编；何水明，李少华副主编. —武汉：中国地质大学出版社，2004.2

ISBN 7-5625-1871-8

Ⅰ. 高…

Ⅱ. ①吴…②何…③李…

Ⅲ. 数学-高校-教材

Ⅳ. O17

高等数学（下册）

主　编　吴振远

副主编　何水明　李少华

责任编辑：方　菊　　　责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社（武汉市洪山区鲁磨路 388 号）　邮编：430074

电话：(027)87482760　传真：87481537　E-mail：cbb@cug.edu.cn

开本：850 毫米×1168 毫米 1/32　　字数：210 千字　印张：8

版次：2004 年 2 月第 1 版　　印次：2004 年 2 月第 1 次印刷

印刷：中国地质大学出版社印刷厂　　印数：1—3 600 册

ISBN 7-5625-1871-8/O·63　　定价：14.00 元

前　言

本书是在《高等数学课程教学基本要求》的指导下，结合我校文科高等数学的特点编写的．适合工科院校文科各专业及高职院校作教材．众所周知，高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用．学好本课程不仅对学习后续课程是必不可少的，而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的．

本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识．全书以微积分学为核心内容，微分方程则作为微积分学的延伸和应用加以介绍．本书每节后有少量习题，在每一章的末尾，都配有总习题，以便读者易于抓住每章的重点并测试自己对基本内容的掌握程度．

本书由杜伯仁教授主审．杜伯仁教授在百忙之中仔细审阅了全稿．本书的完成得到了系、教研室领导及全体教师的大力支持．同时也得到了出版社的积极配合，在此一并致谢！由于作者水平有限，书中难免存在错误和不足之处，恳请读者批评指正．

编者

2004．2

目　录

第七章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题，空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章首先建立空间直角坐标系，再介绍在工程技术上有着广泛应用的向量，及向量的一些运算，进而讨论空间曲面和空间曲线的部分内容，并以向量为工具来研究空间的平面和直线，最后介绍二次曲面.

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系. 我们自然会想到用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现. 具体讨论如下：

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x(横轴)、y(纵轴)、z(竖轴)；统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右

手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-1，图中箭头的指向表示 x 轴、y 轴、z 轴的正向. 这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**. 点 O 叫做**坐标原点**(或原点).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，均在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(图 7-2).

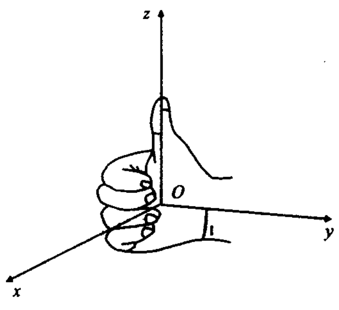

图 7-1

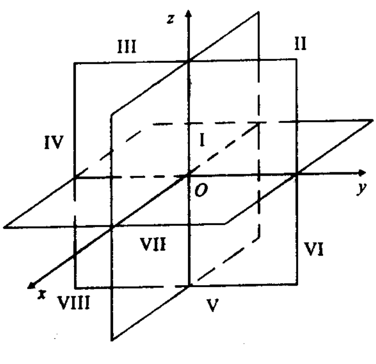

图 7-2

设 M 为空间一已知点，我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 7-3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是空间一点 M 就

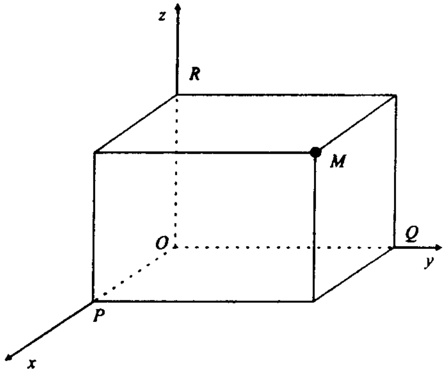

图 7-3

唯一确定了一个有序数组 x,y,z;反过来，已知一有序数组 x,y,z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P、Q 与 R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x,y,z 所确定的唯一的点. 这样,就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系. 这组数 x,y,z 就叫做点 M 的坐标,并依次称 x,y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征. 例如:如果点 M 在 yOz 面上,则 $x=0$;同样,在 zOx 面上的点,$y=0$;在 xOy 面上的点,$z=0$. 如果点 M 在 x 轴上,则 $y=z=0$;同样,在 y 轴上的点,有 $z=x=0$;在 z 轴上的点,有 $x=y=0$. 如点 M 为原点,则 $x=y=z=0$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中任意两点. 为了用两点

的坐标来表达它们间的距离 d,我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 7-4).

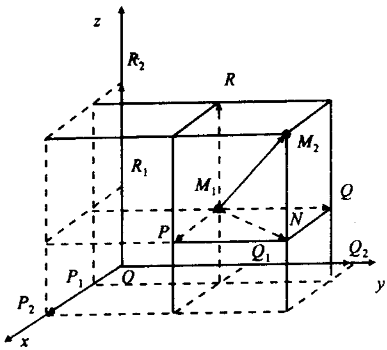

图 7-4

由于 $\angle M_1NM_2$ 为直角,$\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形,所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形,且 $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$,所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|PN| = |Q_1 - Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|.$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间中任意两点间的距离公式.

特殊地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点

的三角形是一等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$,即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 2 在 z 轴上求与 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上,所以设该点为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边去根号,解得

$$z=\frac{14}{9}.$$

所以,所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 7-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?
$A(1,-2,3)$;$B(2,3,-4)$;$C(2,-3,-4)$;$D(-2,-3,-1)$.
2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:
$A(3,4,0)$;$B(0,4,3)$;$C(3,0,0)$;$D(0,-1,0)$.
3. 求点 (a,b,c) 关于:(1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.
4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂

足点的坐标.

5. 一边长为 a 的立方体放置在平面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等等，这一类量叫做向量.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7-5). 有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母表示向量. 例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等等.

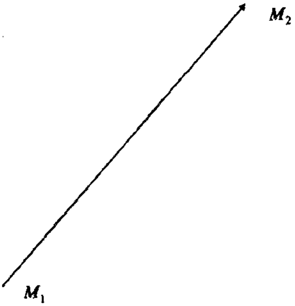

图 7-5

以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫做点 M 对于点 O 的向径，常用黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量(以后简称为向量)，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方. 当遇到与起点有关的向量时(例如，谈到某一质点的运动速度时，这速

度就是与所考虑的那一质点的位置有关的向量)，可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的大小相等，且方向相同，我们就说向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是相等的，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的模依次记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$. 模等于1的向量叫做**单位向量**. 模等于零的向量叫做**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$或$\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量**平行**. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

二、向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接$AC$(图7-6)，那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**.

力学上有求合力的平行四边形法则，仿此，我们也有向量相加的**平行四边形法则**. 这就是：当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以$AB$、$AD$为边作一个平行四边形$ABCD$，连接对角线$AC$(图7-7)，显然向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定(三角形法则)，从图7-7可见：

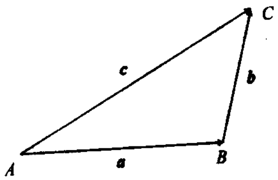

图 7-6

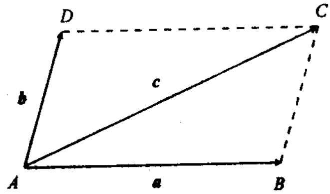

图 7-7

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}\ ;$$
$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}\ .$$

所以符合交换律. 又如图 7-8 所示,先作$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,在加上$\boldsymbol{c}$,即得和$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$,如以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$相加,则得同一结果,所以符合结合律.

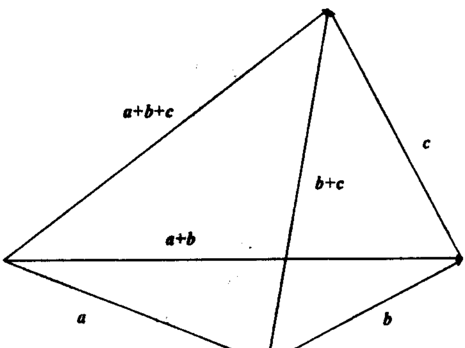

图 7-8

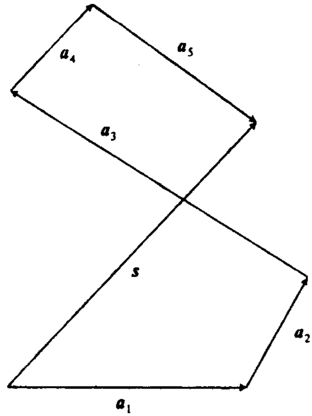

图 7-9

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7-9，有

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_5$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$［图 7-10(a)］.

特别地，当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

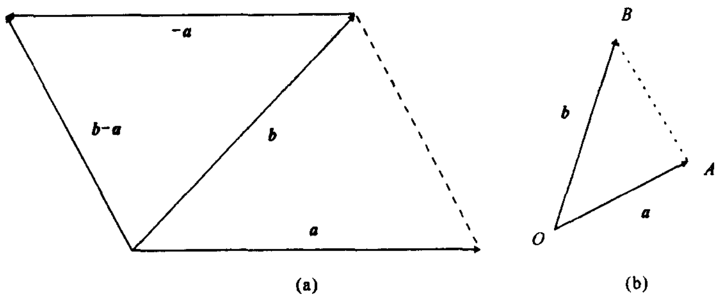

图 7-10

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$［图 7-10(b)］.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向或反向时成立.

三、向量与数的乘法

向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$，规定$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当$\lambda > 0$时与$\boldsymbol{a}$相同，当$\lambda < 0$时与$\boldsymbol{a}$相反.

当$\lambda = 0$时，$|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$，即$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当$\lambda = \pm 1$时，有

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\mu(\lambda\boldsymbol{a})| = |(\lambda\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}; \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略.

我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有定理 1.

定理 1　设向量$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，那么，向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充分必要条件是：存在唯一的实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a}$. 取$|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向时$\lambda$取正值，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向时$\lambda$取负值，即有$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时$\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}$同向，且

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}，即\ |\lambda - \mu||\boldsymbol{a}| = 0.$$

因 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$，故 $|\lambda - \mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

定理证毕.

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的规定，由于 $|\boldsymbol{a}| > 0$，所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}^0$ 的方向相同，即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 的模

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}^0| = |\boldsymbol{a}| \cdot 1 = |\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同，因此，

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

我们规定，当 $\lambda \neq 0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$，由此，上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}^0.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 7-11).

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\overrightarrow{AM},$$

即　$-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{MA}$，

于是 $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

因为　$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$，

所以　$\overrightarrow{MC} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

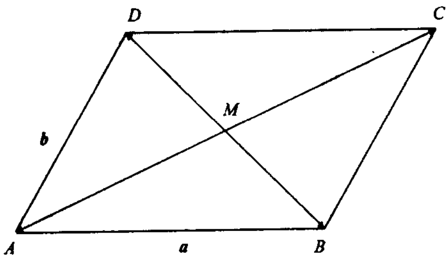

图 7-11