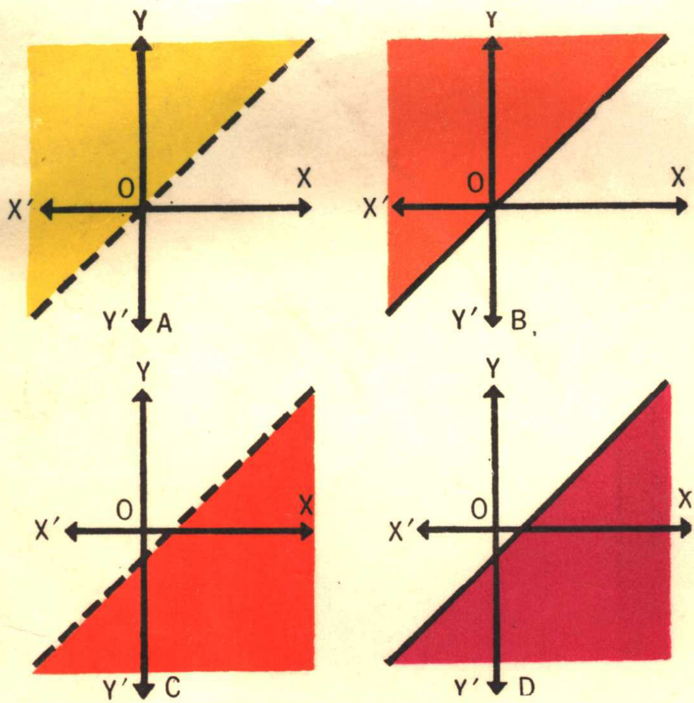
新數學談趣

著　者：Jerome S. Meyer
　　　　Stuart　Hanlon

譯　者：崔　錦　泰
　　　　李　錦　圖



臺灣中華書局印行

中華民國六十二年八月二版

新數學談趣（全一冊）

基本定價壹[illegible]

（郵運滙費另加）

著者 Jerome S. Meyer / Stuart Hanlon

譯者 崔錦泰　李錦圖

發行人 臺灣中華書局股份有限公司代表 熊鈍生

臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者 臺灣中華書局印刷廠

臺北市雙園街六〇巷九〇號

發行處 臺灣中華書局

臺北市重慶南路一段九十四號

郵政劃撥帳戶：三九四二號

Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Section 1, South Chungking Road,
Taipei, Taiwan, Republic of China

（臺總）甲書

No. 8243

臺參（華・廠）

譯者序

新數學的倡行，是近十年來數學教育上的一個最大改變。現在從幼稚園開始，孩子們已經接受新數學的教育。這個改變的由來，是基於近代數學家認爲古典數學過於着重教人們如何去計算，而不去了解計算過程的原因；相反的，新數學教人們去理解在計算過程中每一步驟的理由。教育界人士感到：假如人們從小便養成習慣去理解各種問題，則長大後，在思想上便會更有條理，更合邏輯些；同時他們也希望增加人們對數學的興趣，而減低對它害怕的心理。實際上，古典數學的古板式靠記憶的計算方法，嚇走了不少人對數學作深一層的認識，因爲他們不明白自己在做什麼，當然便會認爲數學是神秘而高不可攀的科學，於是只好敬而遠之。既然新數學能幫助我們理解問題，並解釋計算過程中每一步的原因，那麽對數學害怕之感覺自然也會減除，跟着便會對它發生比較濃厚的興趣。

近代數學在社會每一部門都佔有重要的位置，不論是統計、電子計算機、醫學、生物學、經濟學、社會學、心理學……等，都需要數學來幫助它們去解決自然及人體構造的奧秘，培養數學人才實是首要的工作。譯者有鑒於此，特別選擇這本有關新數學的書籍來翻譯。這本

書寫得極爲淺顯而輕鬆，因此也很容易使我們瞭解其內容。此外，對每一個重要觀念，作者都舉出幾個例子，好讓我們明白他說的要點。對於新數學完全陌生的人，這本書可以說是很好的介紹者；對於認識新數學的人，這本書可以看作一本方便的手冊，因爲它包括了新數學的各種重要概念，以及符號的解釋。特別是我國正在致力施行新教材的目前，更希望本書的出版對中小學生能有所幫助。

譯者　於美國水牛城

目　　錄

第一章　讓我們坐下談談

許多人離開學校好幾年後，想要重整自己的數學知識時，就會發覺數學已經改變了不少。在他們離開的那段期間，數學好像是經過了一場革命似的。從前陳舊古典式的數學已經受過整容，換上了一具新面孔。現代教師們認爲這張新面孔比從前的大有進步。

中學教的古典數學，對很多簡單的眞理，認作當然。從來不去分析並研究它們爲什麼正確，更不提在什麼情況下它們也可能不眞確。

在過去幾個世紀裡，產生了不少偉大而哄動世界的理論，例如馬克思威爾 (Maxwell) 的電磁論，愛因斯坦 (Einstein) 的相對論，和牛頓 (Newton) 的微積分概念。所有這些非常重要的學說之形成，都是由於經常地質問關於某些記載的正確與否，和不停地追究**爲什麼**？

用新數學計算出來的結果和用古典數學計算出來的完全相同，但是前者方法比較透澈得多，所以沒有學過數學的學生會覺得新數學比較滿意。在要解決一個問題時，新數學教學生們如何去想，而不是教他們如何去回憶計算技巧。

下面是個簡單的例子:

若 $x^2-4=0$, 我們知道 x 必需等於 2 或 -2。這兩

個數值中的任何一個，都可以使上面的方程式變成有意義。這樣淺顯的知識差不多不用解釋。可是事實上我們怎樣得到 ± 2？是否我們把 -4 移到方程式的另一邊，變爲 $+4$，而方程式於是寫成 $x^2=4$，因之 $x=\pm 2$?隨便那一個小孩都會問"爲什麽從方程式的一邊"轉置"到另一邊，符號要改變呢？"當然這是個很合理的問題。新數學就是在小孩未問這問題之前，已經把它解答了。我們說：

若 $x^2-4=0$，首先我們在方程式的兩邊加上 $+4$，這樣

$$x_2-4+4=0+4。$$

跟着我們證明 -4 和 $+4$ 相抵消，而 $0+4=4$。

方程式於是變成 $x^2+0=4$，或 $x^2=+4$，所以 $x=\pm 2$。

實際上，我們很容易表明，簡單的小問題可以利用構成算術的基礎的十一條定律去解決。看，這不是驚人的事實，驚人的發現嗎？數是數學中極重要思想的根基之一。信不信由你，這十一條實數＊定律就是用來解決問題的工具。現在把它們列在下面：

1. 加法閉包律 任何兩實數之和是一單值實數。例如，10 及 117 之和是 127。

2. 加法交換律 加法的次序是不重要的。例如，3 及 4 之和是 7；4 及 3 之和也是 7。

3. 加法結合律 加法的定義是對一雙雙的數而下的，因此若要加三個數，首先把其中兩個數相加，然後把

＊ 以後我們會再給實數下個正確的定義。現在我們姑且把它們當作日常生活中常常遇到的數。

所得的和加上第三個數。至於我們用什麼次序去加，那是不重要的。例如，當 3, 4, 及 5 相加時，我們可以有三個不同的次序，但是所得的結果都是一樣的：

$$3+4=7, 7+5=12$$

$$4+5=9, 9+3=12$$

$$3+5=8, 8+4=12$$

4. 加法同一律　零是加法的恒等元素 (identity)，因爲任何數加上零，其值不變。例如，9 及 0 之和是 9。

5. 加法逆運算律　任何數與它的負值之和是零。例如，5 與 -5 之和是 0。

6. 乘法閉包律　任何兩實數之積是一單值實數。例如，117 及 10 之積是 1,170。

7. 乘法交換律　乘法的次序是不重要的。例如，3 與 4 之積和 4 與 3 之積相同。

8. 乘法結合律　乘法是對一雙雙的數來下定義的。若要乘三個數，先乘其中兩個數，然後把所得之積去乘第三個數。至於用着什麼次序去乘是不重要的。例如，

$$3\times4=12, 12\times5=60$$

$$3\times5=15, 15\times4=60$$

$$4\times5=20, 20\times3=60$$

9. 乘法同一律　1 是乘法恒等元素，因爲任何數乘上 1，其值不變。例如，1 與 8 之積是 8。

10. 乘法逆運算律　任何數（除零以外）與它的倒數之積是 1。例如，3 與 1/3 之積是 1；5 與 1/5 之積是 1；3/10 與 10/3 之積是 1。當除數是零時，除法便變成無意義。

11. 分配律 乘法"分配"了加法。例如，

$$6\times(4+5)=6\times9=54$$

$$6\times(4+5)=(6\times4)+(6\times5)=24+30=54$$

下面是幾個日常遇見的例子，用來表示我們對任何記載，在沒有輕率的下結論前，應該來個仔細的分析，確實地弄清楚它是否**在任何情況**都是對的：

1. 假如你在紐約市帝國大廈樓頂跌下去，你會跌死。

   這句話是眞的嗎？還是有可能是假的？

2. 任何人自稱能準確地預測十年或二十年後的事，是個騙子。

   這句話是眞的嗎？還是有可能是假的？

3. 將酸性液體注入別人眼睛是犯法之舉。

   這句話是眞的嗎？還是有可能是假的？

4. 一個異常肥胖的曾祖母自稱她還不到六十磅，而且只有廿一歲。

   這句話是眞的嗎？還是有可能是假的？

5. 一個三角形的三角之和是等於 180°。

   這句話是眞的嗎？還是有可能是假的？

現在讓我們用近代數學的完整推理方法，去考究上面幾個例子。

1. 帝國大廈的樓頂（不是塔頂）只有四層高，若是從這樓頂跳到地面一堆新雪，不會跌死的。
2. 天文學家能預測不論多少年後的日蝕或月蝕，而他們的預測往往都是絕對正確的。
3. 恰好硼酸是用來減輕眼痛或眼睛的過勞，乳酸（卽牛奶）也不會對眼睛有害。

4. 在一個以40爲底的數系中，這句話是對的，若用我們通用的小數數系，她的體重會低於 240 磅，而她會變成81歲。
5. 球面上的三角形，三內角的和是大於 180 度。地理學上地球的子午線相遇於兩極，而他們橫過赤道時與赤道成90度角，所以在形成的每三角形內，單是兩個底角已經是 180 度了。

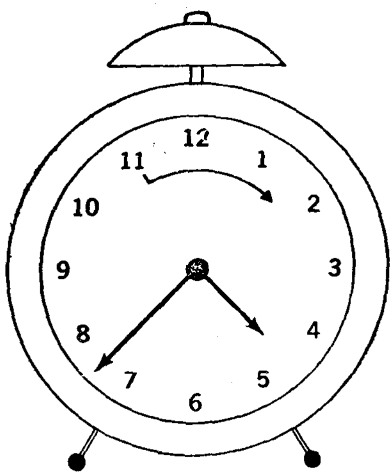
上面五個記載中，有四個表面看上去是絕對眞的，而另一個是絕對假的；可是在仔細的分析下，我們可以看到它們都有可能是錯或對的。

在數學上，每件事都需要經過小心的考慮及推論。散漫的思想及輕率地下的結論都不屬於數學的一部份。

下面又是另一個輕率下結論的例子。某深夜，一個管理訊號的人在當班，他手裏搖着燈，向過往的汽車警告一列火車的來臨。正好有一輛汽車橫過鐵軌，和火車相撞，結果汽車中兩個乘客因而喪命，這件意外事件發生後，訊號管理人被拘留審問，他發誓說他當時正在當班，並且，也在搖燈發出警告；可是沒有人想起去問他那盞燈是否是點亮了的。在數學上根本就不容許這樣輕率下結論的了。

新數學用集 (sets) 和組 (classes) 作一一對應。我們淸淸楚楚地知道在某些情況下， 11＋3 不是 14；可是實際上我們一直相信在任何情況下， 11＋3 是 14。若要證明11＋3 不是 14，只要看看時計就可以，時計上的指針面不是 11＋3＝2 嗎？

從表面看來，一一對應好像是很複雜，而且不容易



11＋3＝2

圖 一

使人明白，但是事實上它是很簡單的。

當朋友叫你的名字時，那名字便代表了你的人格及你整個人，不過那名字不一定就是你，因爲它只是一個名字而已。很久以前，莎士比亞在羅蜜歐與朱麗葉裏說過："就算是叫別的名字，一朶玫瑰還是一樣的香"。當我們指定名字及數目給物件時，每件物件可以在一一對應下認出來，除了這樣，就沒有別的用意。這只不過是一種辨認方法罷了。

當兩集物件能用某種"映像"制度去造成一一對應時，我們知道它們包含同一數目的物件。每一個基數或平常計數用的數都有一族與它有關係的集。這主意是很古舊，也很新，在某一方面來說，它使人從有形到抽象過程的掙扎變得戲劇化。當我們原始的祖宗從打獵時代

進入搜集時代，他們須要算，他們曉得用動物、飛鳥、武器、或婦女來計算“多少”。由於他們須要算，所以他們懂得一種以上算的方法。他們用一手石頭，一把木條，一堆貝殼來分羣。任何一堆內的一個可以代表一個女人，同一堆內的兩個可以代表兩個女人，三個當作三個女人，這樣算下去，便是一一對應。同樣，當你想知道要請多少孩子來參加你兒子的集會，你每想到或喊出來一個名字，你便屈下一隻手指，這動作也是一一對應。在一冊種子目錄裏，花和頁數排成一對對時，它是在利用一一對應。以後我們會看到數與線上的點，以及一對數與平面上的點，都有一一對應；數目 1, 2, 3 到 26，與字母 a, b, c 到 z，有一一對應；亞拉伯數字與羅馬數字有一一對應，例如 1 與 I 屬於族一，2 與 II 屬於族二，99與 XCIX 屬於族九十九。

數學的思想好像一個遊戲，我們要跟着某些規則去玩。例如下棋，棋子一共有三十二個，炮台一定要這樣行，主教一定要那樣走，而爵士又是要另一種跑法。假如我們循着這些規則去下棋，那麼我們便在下一盤眞眞正正的棋；但是，若果我們自己創作一些規則，改變了各種棋子行走的方法，雖然我們仍然用同樣棋子去下在同一棋盤，可是這個遊戲已經不是下棋了。

因此近代數學不單是應付規則，並且對我們以前所有學過及認作當然的事物，來個仔細的研究及分析，我們知道 $4+2=6$ 或 $5\times3=15$ 是重要的，但是更重要的是明白爲什麼這些過程會發生，究竟來源如何，同時，根據規則的含意，在那一些（若有的話）情況下，它們會

變爲不對的。

爲了偵察這些可能性以及另外一些，近代數學——特別是算術、代數、幾何、三角和微積分——供給學生們一個基本的圖畫，並且提防散漫或錯誤的結論。爲了要達到這個目的，我們必需討論以前沒有遇見過的各種情況。這本書的宗旨便是嘗試去揭露及解釋這些情況。

第二章　先來了解"集"

新數學的基本要旨之一便是關於集的觀念，集可以解釋作任何一羣物件或元素。集可以用於數，但在我們用它之前，必需重溫我們所有關於數的知識。

數可以分類爲多種，人們最熟識的是**自然數**(natural number)，它們是正整數。當我們算一、二、三、四時，我們並不是時刻都體會到我們是在應用這些抽象數目於某些東西（不論是一件物件或一個人）上。數是創造了來對應於某些確實的事物的。舉個例子，假如在一大會堂裏，你需要全體在場的人投票去決定某一事項，於是你說："所有贊成的人請舉手"。你立刻開始應用自然數於每一隻舉起的手，從計算舉起的手的數目，你便得到票的總數，這便稱爲一集或一羣自然數。

負整數是數的第二種。任何數少過零是負，而當加上它的正等量時，變爲零。由此我們可以把整個整數的系統想像成一條刻了點的直線。這線的中點是零，所有在零左邊的點是負數，在右邊的是正數，我們可以把這些點看作相互的反影，這條直線可以向兩邊延去無窮遠，(符號∞和－∞表示兩邊都沒有終點)在線上零的右邊，全部正整數是自然數，左邊則是負數。

正與負的整數和零都屬於**整數**，我們可以用一集來

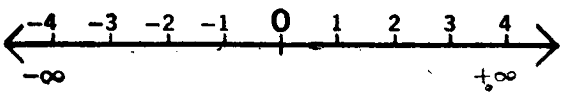


圖 二

代表它們。自然數是正整數，所以是整數裏的**一子集**(subset)，我們以後會再詳細地討論子集。

直到現在，我們還沒有提及分數和小數，或者有理數和無理數，可是它們在數和集的觀念上都佔有很重要的位置。若 c 和 d 是整數，同時 $d \neq 0$, 分數 c/d 可以寫成小數，而這小數可能有盡，也可能是循環小數。例如有理數 3/2 就是有盡的，因爲它剛好等於 1.5，不多不少。換言之，它有一個不變值，再看有理數 2/3，若寫成小數時，有某一數（這裏是 6）一直循環下去，2/3 的數值不會變；小數的循環數字並不表示（在任何時間）那分數有不同之值。

相反的，無理數有可變值，所以不能寫成兩個整數之比。最好的例子是 π（它的值是 3.141592653589793………）和 e（它的值是 2.718281……）。很明顯的，這些數的正確值是永遠找不到的；所有別的無理數都是這樣。不過事實上任何無理數都可以用一實數直線來表示。例如在一正方形，它的邊是 1, 對角線是 $\sqrt{2}$，這對角線有一定長度，它可以隨時說："我的長度是 $\sqrt{2}$。" 同樣一個三角形，直角邊是 $\sqrt{2}$ 和 1, 它的斜邊是 $\sqrt{3}$，我們可以

說這斜邊的長度絕對是 $\sqrt{3}$。但是，若我們想去找 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的絕對數值，無論計算到什麼數位，我們會發覺這是多麼的不可能。

第三種數和我們日常生活沒有任何關係，即**虛數**。它是一個負數的平方根，不過負數在自乘時絕不會得到一負值的。例如，$(-2)\times(-2)=+4$；所以 $\sqrt{-4}$ 以及別的負數之平方根都是虛數。

在英語裏，雙重否定語是低劣的英文。假如你說："這不是沒有關係"，其實你眞正的意思是："這是有關係的。"這樣，原有的意義經過雙重否定語來表示後，會有恰好相反的意義。同樣，在藥房賣的盛溴化塞爾茲水(Bromo Seltzer)瓶子，當瓶子用來盛藥時，瓶子永遠是倒過來的，而瓶子上的標籤剛好是正的。原因在貼標籤時，人們根本把標籤顚倒了才貼在瓶子的正面上的，這樣當瓶子倒過來時，標籤便成正面。從這兩個很簡單的日常例子，我們可以明白"負乘負得正"的觀念。

從數字的驗算，我們也得到同樣的結論：就是兩個負數之積是一正數。$2\times(-3)$ 表示負三被取兩次，得負六 (-6)。$(-2)\times(-3)$ 又如何？我們知道 $(-2)\times 4=(-8)$。讓我們考慮 $(-2)\times[7+(-3)]$。注意方括弧內的式 $7+(-3)=4$。用分配定律我們可以把例子寫成另一樣子，$(-2)\times[7+(-3)]=[(-2)\times 7]+[(-2)\times(-3)]$，但是我們知道 $(-2)\times 4=(-8)$，因此 $(-2)\times[7+(-3)]$ 一定等於 (-8)。我們也知道 $(-2)\times 7=(-14)$。所以，$(-14)+?=(-8)$，"？"一定等於 6。因此我們相信 6 是 $(-2)\times(-3)$ 的另一名字。

下面是一些思想上的糧食:

$1\times3=3$	$(-1)\times3=(-3)$
$1\times2=2$	$(-1)\times2=(-2)$
$1\times1=1$	$(-1)\times1=(-1)$
$1\times0=0$	$(-1)\times0=0$
$1\times(-1)=(-1)$	看來好像:
$1\times(-2)=(-2)$	$(-1)\times(-1)=1$
$1\times(-3)=(-3)$	$(-1)\times(-2)=2$
	$(-1)\times(-3)=3$

我們不可能找到兩個負實數，它們相乘之積是一負數，就是根據這點，我們便知道一負數的平方根是虛的。

你或許要問:"既然某數是虛的，那麼它對我們有什麼用處?"我們的答案是:若去取一虛數的平方時，我們會得一負數。這樣:

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=(-a)\text{及}(\sqrt{-a})^4=a^2$$

同樣,

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(-1)\text{及}(\sqrt{-1})^4=1$$

當一實數和一虛數合併起來，我們便得一**複數**。複數的格式是 $a+bi$。在科學及高等數學上，複數佔着很重要的位置。所有虛數都用字母 i (imaginery) 及 i 的乘積來表示。符號 i，在 π 及 e 之列，是數學中另一重要常數，於是我們得:

$$i=\sqrt{-1}\quad i^2=(-1)\quad i^3=-\sqrt{-1}\quad i^4=1$$

及 i 之偶次方是"實"數。

我們應注意這些字如**實**、**虛**、**有理**、**無理**、和**複**在數學上有很特別的意義。若隨便對它們加上非數學的含