

高等学校教材
环境水力学



高等学校教材

环境水力学

武汉大学 徐孝平 编

52
16



ISBN 7-5084-1399-7



9 787508 413990 >

ISBN 7-5084-1399-7 / TV • 308

定价：11.80 元

高等学校教材



环境水力学

武汉大学 徐孝平 编

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书着重介绍环境水力学的基本概念、基本理论和分析问题的基本方法。全书共分七章：绪论，分子扩散，紊动扩散，剪切流的分散，射流、羽流和浮射流，水质及河流水质模型，液体的分层流动。每章内都有例题，章末附有习题。

本书内容精炼，系统性强，概念清楚，可供有关大专院校的大学生、研究生作为环境水力学的教材和主要参考书，亦可供从事土木、水利和环境工程的科技人员使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

环境水力学/徐孝平编. —北京：中国水利水电出版社，
1991.10 (2003 重印)

高等学校教材

ISBN 7-5084-1399-7

I. 环… II. 徐… III. 环境水力学—高等学校—教材
IV. X52

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 007370 号

高等学校教材

环 境 水 力 学

武汉大学 徐孝平 编

*

中国水利水电出版社 出版
(原水利电力出版社)

(北京三里河路 6 号 100044)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市兴怀印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 9.25 印张 206 千字

1991 年 10 月第一版 2003 年 2 月第四次印刷

印数 3531—5630 册

ISBN 7-5084-1399-7/TV·308

(原 ISBN 7-120-01328-9/TV·469)

定价 11.80 元

前 言

本书是作者多年来在武汉大学有关专业学生和研究生所使用的环境水力学讲义的基础上修改和补充而成的。1987年曾在中国水利学会举办的研习班上作为专题讲座的讲义。

环境水力学是环境流体力学的分支学科。不少学者曾为建立这门学科的理论基础作出过卓越的贡献。值得提出的是,英国流体力学家泰勒爵士(G. I. Taylor, 1886~1975)早在1921年就开始研究流体的紊动扩散规律,为污染物质扩散和输移的研究奠定了基础。但是,作为一门独立出现在科学文献上的学科,环境水力学才只有十余年的历史。所以,环境水力学是一门内容正在不断丰富、研究范围正在日益扩大的崭新的学科。

水是人类生活和生产活动须臾不可离开的宝贵的自然资源。地球上水的储量很大,估计有 13.9 亿 km^3 。但是,实际上可直接为人类取用和消费的淡水在地球总水资源中所占比重是很小的,并不象人们想象的那样,可以取之不尽,用之不竭(见附录VI)。

水的可利用价值不仅在于水量,而且在于水质。传统的水力学主要讨论清洁水流的运动,而环境水力学要研究污染物质在水体中的扩散、输移、混合及转化的过程。保护环境已成为我国的基本国策之一,有关环境水力学方面的适合我国高等学校教学之用的教材建设工作已显得刻不容缓。

本书共分七章,第一章绪论。第二章介绍了分子扩散的非克定律及其典型条件下的解。第三章讨论了描述紊动扩散的两种方法及其有关方程。第四章着重阐述了一维分散方程和作者在这方面的一些研究成果。第五章描述了射流、羽流和浮射流的基本物理现象及其基本方程,同时以归纳成表的方法列举出这方面的重要研究成果。第六章给出了主要的水质模型。第七章讨论了液体分层流动的几个基本问题。最后,还把计算用的图表以附录的形式列于书末。

本书各章都附有一定数量的例题和习题,这些习题是根据教学要求选编的,以引导读者加深对环境水力学基本内容的理解,提高读者运用基本理论知识解决具体问题的能力。为了便于初学者入门,本书着重叙述环境水力学的基本概念、基本理论和分析问题的基本方法。

本书最后分类列出参考文献。作者在教学和编著过程中曾从这些参考文献中得到不少启发和帮助,在此一并向参考文献的作者致谢。

本书可供土木、水利、环境、卫生工程、能源工程的大学生、研究生、教师,以及从事水环境工作的工程技术人员和研究人员参考。

水电出版社的同志和推荐本书出版的专家为本书的出版给予了很大的支持和帮助。书稿承蒙赵文谦教授主审，他提出了不少宝贵意见。在此向他们表示衷心感谢。

限于作者水平，又是在一个正在迅速发展的新学科领域中写书，甚感艰难，难免有不妥和错误之处，恳请专家和读者批评指正。

作 者

1990年7月于武昌

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 环境水力学的任务	1
第二节 几个概念和研究方法	1
第二章 分子扩散	4
第一节 分子扩散的非克定律	4
第二节 一维扩散方程的基本解	6
第三节 若干定解条件下的一维扩散方程的解	8
第四节 二维和三维扩散方程的解	12
第五节 随流扩散	15
习题	18
第三章 紊动扩散	20
第一节 随机游动的扩散理论	20
第二节 紊动扩散的拉格朗日法	22
第三节 紊动扩散的欧拉法	28
习题	32
第四章 剪切流的分散	34
第一节 剪切层流的分散	34
第二节 不同边界形状下层流的分散	37
第三节 剪切紊流的一维分散方程	39
第四节 圆管和二维明渠紊流的分散	41
第五节 天然河流中的分散和扩散	43
习题	50
第五章 射流、羽流和浮射流	52
第一节 概述	52
第二节 等密度淹没射流的微分方程解	54
第三节 自由紊动射流的动量积分解	60
第四节 浮力羽流(浮升烟流)	65
第五节 静止均质环境流体中的浮射流	73
习题	82
第六章 水质及河流水质模型	84
第一节 水体污染和水质	84
第二节 水质模型概述	88
第三节 零维和一维水质模型的解析解	90

第四节	河流 BOD-DO 耦合模型	94
第五节	耗氧系数和复氧系数的测定与估算	98
	习题	103
第七章	液体的分层流动	105
第一节	明槽二维双层分层流基本方程	106
第二节	盐水楔和内水跃	113
第三节	界面内波和分层流的混合	117
第四节	选择取水	123
	习题	131
附录		133
参考文献		141

第一章 绪 论

第一节 环境水力学 的任务

环境水力学是以水环境为主要研究对象的一门水力学的分支学科,又属于环境流体力学的范畴。它应用近代流体力学的基本理论研究各种污染物在不同纳污水域(河渠、水库、湖泊、港湾及海洋)中的扩散、混合输移的规律,预报纳污水域中水体受污染的程度,为水质保护、水环境评价、水资源的开发和利用提供科学依据。

地球上人类的出现约在二百万年前,在其初期直至中世纪,人类的数量和活动对环境的影响还比较小。十八世纪中叶兴起的工业革命,使社会生产力得到前所未有的发展,社会出现了空前的繁荣,但是忽视了经济活动对自然生态系统的反作用。煤、石油和天然气等不可更新的能源大量开采并迅速枯竭,人口的剧增和相对集中于大城市,工业的高速发展而综合利用资源的水平还比较低,农药化肥的大量使用,使各种污染日益严重,破坏了自然环境并恶化了人类的生活条件。特别是最近半个世纪以来,环境污染已成为全世界日益关注的重要问题之一,这就促进了一门新的学科——环境科学的产生。

水环境状况是环境问题的重要方面之一。我国水资源总量约为 $2.8 \times 10^{12} \text{ m}^3$,居世界第六位。其特点是:人均水量仅为世界人均水量的 $1/4$;地表水在地区上分布很不均衡,北方气候干燥少雨,南方湿润多雨,十分之九的水集中于西南和东南地区;水资源在时间上分布也不平衡,华北、西北、西南地区 $6 \sim 9$ 月汛期降雨量占全年降雨量的 $70\% \sim 80\%$,由于雨量过于集中,造成河流汛期大量来水不能充分利用,而非汛期又严重缺水,这些特点对我国水域的水质带来了严重的影响。

水环境问题从广义上理解,除了水源的污染和保护外,还应包括水土保持,洪水的破坏作用,泥沙的输移,水利工程对环境的影响,重金属在固体颗粒上的吸附,水中细菌的和电化学的絮凝作用等。但是限于篇幅,本书只从狭义上来论述环境水力学的基本课题,即主要是从水动力学角度来研究问题,而且着重阐述环境水力学的基本学科内容、基本概念和基本理论。本书主要内容有:分子扩散;扩散方程的求解;紊动扩散;剪切流的分散;射流、羽流和浮射流;水质和河流水质模型;液体的分层流动。

本书的先修课程是高等数学和水力学(或流体力学)。因此,这些课程中的基本内容本书就不再重复叙述了。

第二节 几个概念和研究方法

一、几个概念

1. 浓度 c

污染物或示踪剂在水中的浓度是研究水环境问题最重要的指标。单位水体中所含某种

污染物的质量称为该种物质的质量浓度,简称浓度,以 c 表示。浓度可能是处处不同的,用瞬时极限的方法可表示为

$$c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta M / \Delta V \quad (1-1)$$

式中 ΔM 为 ΔV 水体体积内所含该种物质的质量。环境监测部门常用 ppm (百万分之一) 表示浓度。1 kg 水中含有 1 mg 物质的浓度为 1 个 ppm。浓度的常用单位是 mg/L 或 g/L。在三维扩散方程中浓度 c 的量纲为 $[ML^{-3}]$, 而在一维扩散方程中 c 的量纲为 $[ML^{-1}]$ 。

一般说来,水体中含有物质的浓度是时间和空间坐标的函数,即

$$c = c(x, y, z, t) \quad (1-2)$$

在紊动水流中,不仅水流运动参数随时间而涨落,而且浓度值也具有随机涨落的特性,所以需要研究浓度的时间平均值 $\bar{c}$ 。 $\bar{c}$ 可用下式定义

$$\bar{c}(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} c(x, y, z, t) dt \quad (1-3)$$

浓度的时间平均值 $\bar{c}$ 仍是空间坐标、取平均的时段 T 和初始时刻 t_0 的函数。

2. 稀释度 S

稀释度也可作为反映纳污水体被污染的一种指标。稀释度 S 定义为

$$S = \text{样品总体积} / \text{样品中所含污水体积} \quad (1-4)$$

稀释度 $S=1$, 表明污水未得到任何稀释;若 $S=\infty$, 则说明样品中所含污水体积为零,样品为纯净水体。

3. 动力活性物质和动力惰性物质

从力学的角度看问题,有些物质混入水体中可以显著影响水的密度,从而影响水体(即环境水体)的力学特性;而有些物质则不会。因此,我们称前者为动力活性物质,后者为动力惰性物质。动力惰性物质是密度与环境水体密度相等或几乎相等的污染物质,它的混入不影响环境水体原有的动力特性,取质点进行力学分析时不必将它与环境水体分开。动力活性物质介入环境水体后就会改变其动力特性,如冷却水排放,或异重流的侵入。

4. 保守物质和非保守物质

从物理的生化的角度看问题,有些物质混合到环境水体中会起生物化学反应或生物降解,生成新的物质,而改变其原有浓度;但有些物质却不会。前者被称为非保守物质,后者为保守物质。我们将保守的动力惰性物质称作示踪质(或示踪剂)。

二、环境水力学研究方法

1. 数量级分析

流体混合是一个很复杂的问题,想要把任何影响因素不分主次地都抓在一起,势必事倍功半。因此,需要用数量级分析方法对所研究问题迅速给出相当量级的数值解答,列出几个最重要参数的函数关系,并对这些关系的合理性近似作出判断。这种方法的基础是量纲分析和数量级比较。当然此方法的误差幅度较大,但是对于完全没有解答的问题来说毕竟是有收获的第一步。没有这一步,以后的许多工作也许是徒劳的。

2. 计算技术的运用

随着计算机的发展,我们可以运用有限差分或有限元方法对扩散、分散和其他流体混合问题进行数值模拟。有些复杂的数学模型,其中包括物理、化学和生物的过程,也可用计算机按一定指令次序来分别计算各个不同的过程。

3. 渐近分析方法

本书中列出了一些分析解,它对初学者颇有指导意义。但是,有时会遇到非线性方程,或带有非线性边界条件或变系数的方程。为解这类问题,以摄动法为代表的求解析的渐近分析提供了一种逐次求得较精确解的系统方法。

4. 水力模型

虽然水力模型可能比计算机模型花费昂贵,但是在三维问题中有其优越性。它能比较直观地让研究者去发现问题的物理机理,检验数值模型是否令人满意。但水力模型也有其局限性。例如,包括浮力在内的重力作用经常是重要的,所以模型比尺按弗劳德(Froude)准则设计,这样雷诺数比原型小很多,这就会改变紊动和阻力的特性。有些流动,特别是分层流动,在模型边界上很难提供正确的边界条件。

5. 现场研究

人们可以在现场水体中的固定点上进行欧拉型量测,还能经常进行拉格朗日型的试验。它可以利用漂浮物和示踪剂来跟踪水流的轨迹和分散。在经费允许的条件下,相似的实际流动可作为全尺度模型来进行研究,以便核实和校准数值模型。

对于复杂的问题,我们往往采用多种方法进行综合分析。

第二章 分子扩散

作为物理学名词的扩散,是由物理量梯度引起的使该物理量平均化的物质迁移现象。物质由于分子的无规则运动从高浓度区到低浓度区的净流动过程称为分子扩散;由温度梯度引起的扩散称热扩散;混合物中存在压力(或重力)梯度时,则发生压力扩散,如一个封闭容器绕某轴旋转时,容器内混合物中的轻组分物质向低压区迁移,而重组分物质向高压区迁移;由重力(或压力)以外的其他作用力梯度引起的扩散称强制扩散,如电场作用下电解液中离子的扩散。扩散是许多重要传质过程的基础。

在自然界中,浓度梯度引起的分子扩散是最直观的传质现象,又称为普通扩散。同时,热扩散、压力扩散和强制扩散中任何一种扩散都会导致系统内建立起浓度梯度,从而产生与该种扩散方向相反的普通扩散。

物理学家朗道(Л. Д. Ландау)认为,扩散是一种不可逆过程,并且与导热和粘性一样,是流体混合过程中能量耗散的原因之一。一般地说,在常温常压下,气体分子每经约 10^{-7}m (称平均自由程)即发生互撞,而液体分子的平均自由程更短。分子愈密集,碰撞机会愈多,即扩散阻力愈大,扩散愈慢。因此,分子在压力高时扩散慢;在液体中比气体中扩散慢;固体中扩散更慢。

荷兰科学家欣茨(J. O. Hinze)指出,流体的紊流运动是一种流体随机运动,由流体随机运动而引起的可传递量的输移,具有扩散性质,即紊动扩散(将在下一章讨论),这是紊流的基本特征之一。紊动扩散与分子扩散的物理机理不能混淆,但可以互相类比。

气体在多孔介质中的扩散,除了有分子扩散外,还可能有努森(M. Knudsen)扩散。由于气体分子的平均自由程大于固体中的微孔直径,因此气体扩散的阻力主要不是来自分子间的互撞,而是来自气体分子与孔壁的碰撞。这种扩散叫努森扩散。

分子扩散是本章叙述的重点。分子扩散本身,除了微观尺度的化学与生物反应外,在环境问题中并没有直接的重要意义。但在许多情况下,环境中的紊动扩散和分散问题可以用类似于分子扩散的过程来描述,只是具有较大的尺度。本章先讨论示踪质在静止液体中的分子扩散,然后再讨论液体作层流运动时的分子扩散。因为液体作层流运动时,只有分子扩散和随流输移而不存在紊动扩散。

第一节 分子扩散的非克定律

根据《不列颠百科全书》记载,分子扩散的理论是由德国出生的生理学家菲克(Adolf Eugen Fick 1829~1901)于1855年首先提出的。他认为盐分在溶液中的扩散现象可以和热传导类比,提出分子扩散定律如下:单位时间内通过单位面积的溶解物质的质量与溶解物质质量浓度在该面积法线方向的梯度成比例,用数学式表示为

$$q_i = -D \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (2-1)$$

式中 q_i 为溶解物质（即溶质）单位面积上在 x_i 方向的质量通量； c 为溶质浓度； D 为分子扩散系数，具有 $[L^2T^{-1}]$ 的量纲，与运动粘性系数的量纲相同。表 2-1 是一些溶质在水中的分子扩散系数，它随溶质与溶液种类和温度压力而变化。负号表明溶质扩散的方向和浓度梯度方向相反。溶质总是从浓度高的区域向浓度低的区域扩散。公式 (2-1) 常称为菲克第一定律。这是一个经过物理论证的经验公式。

表 2-1 某些溶质在水中的分子扩散系数

溶 质	温 度 (°C)	分子扩散系数 D ($10^{-9}m^2/s$)	溶 质	温 度 (°C)	分子扩散系数 D ($10^{-9}m^2/s$)
O ₂	20	1.80	乙 醇	20	1.00
H ₂	20	5.13	甘 油	10	0.63
CO ₂	20	1.50	甘 油	20	0.72
N ₂	20	1.64	食 盐	0	0.78
NH ₃	20	1.76	食 盐	20	1.35
H ₂ S	20	1.41	酚	20	0.84

下面我们用欧拉研究方法，根据质量守恒原理来建立浓度随时间和空间变化的关系式。设在含有示踪质的静止溶液中，由于示踪质浓度分布不均匀而引起分子扩散，取一微小的空间六面体，如图 2-1 所示。六面体的边长为 dx 、 dy 和 dz ，其中心点的坐标为 (x, y, z) ，浓度为 $c(x, y, z)$ 。单位面积上的示踪质的质量通量，即公式 (2-1) 中的 q_i ，在直角坐标系中六面体中心点处的三个分量分别为 q_x 、 q_y 、 q_z 。以 x 方向为例，扩散进入和离开六面体的示踪质的质量通量（按泰勒级数展开，并略去二次以上的高次微小量）分别为

$$\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz \text{ 和 } \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$$

那末， dt 时段内进入和离开的示踪质质量差值为

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

同理，在 y 、 z 方向 dt 时段内进入和离开的示踪质质量差值分别为

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dz dx dt \text{ 和 } -\frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy dt$$

根据质量守恒原理，示踪质在三个方向上进入和离开的质量差值的总和，应与该时段内微小六面体中因浓度变化而引起的示踪质的质量增量相等，即

$$\frac{\partial c}{\partial t} dt dx dy dz = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

或

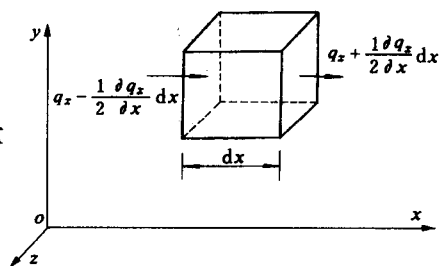


图 2-1

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (2-2)$$

运用菲克第一定律, 便得

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (2-3)$$

当示踪质在溶液中的扩散特性是各向异性时, 上式改写为

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (2-4)$$

方程(2-3)常被称为菲克第二定律。该方程是三维扩散空间的三维扩散方程。如果是一维扩散空间, 那末方程式右边三项中的后两项将略去, 变成为一维扩散方程。

如果将 q 看作热通量 (即热流密度), c 看作热浓度 (即温度), 以热扩散系数 α (或导热系数) 代替分子扩散系数 D , 方程(2-3)就是热传导的傅里叶方程。这说明分子扩散与热传导是数学表达形式相同的两个物理方程。

第二节 一维扩散方程的基本解

前节所建立的扩散方程属于二阶抛物型偏微分方程。如果方程是线性的, 在比较简单的初始条件和边界条件下 (这两个条件合称为定解条件) 可求得解析解。对于复杂的定解条件, 只能借助于近似方法求解。扩散方程的求解不仅与定解条件有关, 而且还与污染源存在形式有关。

从污染源在水域空间的存在形式看, 有点源、线源、面源和有限分布源。在实际问题中, 绝对的点源、无限长的线源和无限大的面源是不存在的, 而这样做只是一种近似的处理。从污染源在时间分布上看, 有瞬时源和时间连续源。瞬时源是指污染物在瞬时内排放入水域, 实际上这也是一种近似, 如热核武器试验的核污染或者油轮事故突然泄漏的油污染可近似看成瞬时污染源。时间连续源又可分为恒定的和非恒定的。

污染物质排放入水域中形成扩散, 这个水域可能是一维空间, 也可能是二维或三维空间 (当然, 把水域视为二维和一维的情形, 这也是一种近似的处理方法)。因此, 也就对应有一维扩散方程, 二维或三维扩散方程。

一、扩散方程的基本解

为了便于研究和以后构造各种解的工作, 本节先讨论在瞬时单位面源情形下的一维扩散方程的基本解。一维扩散方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2-5)$$

在如下定解条件下求解: 在 $t=0$ 时, 示踪质全部集中在污染源点, 也是坐标原点, 即 $c(x, 0) = M\delta(x)$, M 是示踪质总质量, 其中 $\delta(x)$ 为迪拉克 (Dirac) δ 函数。浓缩在无限小的坐标原点位置上的单位面源的示踪质, 在 x 轴的正负两个方向上没有边界限制地向无穷远处扩散, 于是有边界条件 $c(\pm\infty, t) = 0$ 和 $\partial c(\pm\infty, t) / \partial x = 0$, 见图 2-2 (a)。

此方程可用几种数学方法求得基本解, 在此我们采用量纲分析方法。待解函数浓度分

布 $c(x, t)$ 只是 M 、 x 、 t 和 D 的函数, 因为分子扩散系数是物性常数, 方程是线性的 (这表示扩散过程是线性的), 所以浓度 c 与瞬时注入的示踪量 M 成正比。在一维扩散中, 浓度量纲取 $[ML^{-1}]$, 故浓度 c 应与 M 除以某一特征长度成正比。分子扩散系数 D 的量纲是 $[L^2T^{-1}]$, 所以 $\sqrt{Dt}$ 是一个合适的特征长度, 由量纲分析得到如下关系:

$$c = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f(\eta) \quad (2-6)$$

式中自变量 $\eta (=x/\sqrt{4Dt})$ 和函数 $f(\eta)$ 是无量纲数组和函数。 4π 和 4 是预先加上的, 因为这样做会使解答更加简明。把式 (2-6) 代入式 (2-5) 得到一个变系数的线性常微分方程

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} + 2f = 0$$

利用边界条件, 解得函数 $f(\eta)$:

$$f(\eta) = c_0 e^{-\eta^2} \quad (2-7)$$

因为示踪质为保守物质, 任何时刻分布在扩散空间内的物质总量保持不变, 便有 $\int_{-\infty}^{\infty} c dx = M$, 根据这个条件求得式 (2-7) 的积分系数 $c_0 = 1$ 。于是, 瞬时单位面源一维扩散方程的基本解为

$$c(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2-8)$$

该浓度分布符合正态分布 (即高斯分布)。若以时间 t 为参数, 可以绘出浓度沿 x 轴的分布, 如图 2-2 (b) 所示。从图中可知, 随着时间 t 的增加, 扩散范围变宽而浓度峰值变小, 分布曲线趋于平坦。式 (2-8) 中的 $M/\sqrt{4\pi Dt}$ 是任何时刻的源点浓度。这个解对应着污染源点与坐标原点重叠的情况。

二、浓度分布的各阶矩

浓度分布的许多特征量常借助于浓度分布的各阶矩来表示。矩的概念在力学中已屡见不鲜, 如力矩、面积矩、惯性矩等。浓度分布的各阶矩定义如下:

$$\text{零阶矩} \quad M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx$$

$$\text{一阶矩} \quad M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xc(x, t) dx$$

$$\text{二阶矩} \quad M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 c(x, t) dx$$

$$p \text{ 阶矩} \quad M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p c(x, t) dx$$

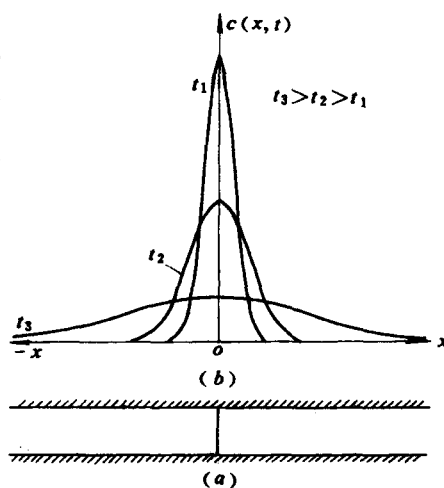


图 2-2

不难看出, 零阶矩是浓度曲线与 x 轴所包围的面积, 也就是全部扩散物质的质量, 对

于保守物质零阶浓度矩 M_0 为常数。

令浓度分布的质心距 x 坐标原点的水平距离为 μ ，由浓度矩定义可知

$$\mu = M_1/M_0 \quad (2-9)$$

质量中心的水平坐标 μ ，在统计数学里称为数学期望或均值，上式表明此值与时间 t 无关。令 σ^2 为浓度分布的方差，则

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 c(x, t) dx / M_0 = (M_2/M_0) - \mu^2 \quad (2-10)$$

方差 σ^2 是衡量分布扩展的一种尺度。 σ^2 越小，表示分布曲线越趋于集中在均值附近。把浓度分布函数式 (2-8) 代入式 (2-10) 求积分得方差 σ^2 和标准差 σ ：

$$\sigma^2 = 2Dt \text{ 和 } \sigma = \sqrt{2Dt} \quad (2-11)$$

这说明方差 σ^2 随时间 t 的增加而呈线性增长，时间愈久，扩展愈大。利用式 (2-11) 可推出计算扩散系数的公式：

$$d\sigma^2/dt = 2D \quad (2-12)$$

这是扩散方程的一个特性：任意一个有限的初始浓度分布，不管它的形状如何，最后会衰变为高斯分布（正态分布），它的方差增长率为 $2D$ 。三阶矩是分布扭曲的量度，很容易证明，正态分布的三阶矩（和所有奇次的矩）为零，并且所有的偶次矩都可以用二阶矩来表示。若在一个不长的时间间隔内，以差分代替上式的微分，则有

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + 2D(t_2 - t_1) \quad (2-13)$$

若已知不同时刻的浓度分布，应用上式可估算扩散系数。通常把标准差 σ 作为扩展宽度的量度，正态分布在 4σ 的范围内，包括了约 95% 的总质量或浓度分布线下的面积。在许多实际问题中，扩散云团的宽度以 4σ 来估算。代入标准差的计算式 (2-11)，浓度分布公式 (2-8) 可写为

$$c = \frac{M}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2-14)$$

第三节 若干定解条件下的一维扩散方程的解

一、起始分布源

上一节求的是基本解，它是在静止水域中的扩散（只存在分子扩散），而且是瞬时集中源与坐标原点重合的一维扩散方程的特解。因为扩散方程是线性的，在线性的边界条件下，可用这个特解式迭加来构造其它定解条件下的解。

设 $t=0$ 时在 $x=\xi$ 处投放示踪质，即初始条件为 $c(x, 0) = M\delta(x-\xi)$ ，边界条件 $c(\pm\infty, t) = 0$ ，根据式 (2-8)，显然有如下解式：

$$c(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right] \quad (2-15)$$

如果示踪质投放量 M 不是集中在一处, 而是非均匀地分布在空间一定范围上同时瞬时投放, 这就是瞬时分布源。这种情况可考虑为若干个瞬时集中源的迭加, 按迭加原理求解。在 $x = \xi$ 处, $d\xi$ 微小长度上投放示踪质的强度为 $M = f(\xi) d\xi$, 这一微小块示踪质引起的在 x 点处 t 时刻的浓度值为

$$\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right]$$

如果瞬时分布源的浓度分布为 $c(x, 0) = f(\xi)$, $a \leq x \leq b$, 经迭加后得时间 t 在 x 处的浓度为

$$c(x, t) = \int_a^b \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right] \quad (2-16)$$

下面讨论两种 $f(\xi)$ 为常数的情况。

1) 当起始分布 $f(\xi)$ 为阶梯函数, 即 $t=0$ 时

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ c_0 = \text{常数} & x \leq 0 \end{cases}$$

该问题的物理模型可以是在很长的管渠中, 左端 ($x \leq 0$) 充满浓度为 c_0 的污染物质 (或示踪质), 右端 ($x > 0$) 为清洁水, 突然打开闸门, 左边的污染物向右扩散, 则浓度分布为

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right] d\xi$$

取变换 $u = (x - \xi) / \sqrt{4Dt}$, $d\xi = -\sqrt{4Dt} du$, 则有

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4Dt}}^{\infty} \exp(-u^2) du = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2-17)$$

式中 $\operatorname{erf}(z)$ 为 z 的误差函数, 它是奇函数, 并有 $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$ 。

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \quad (2-18)$$

和

$$\frac{d}{dz}[\operatorname{erf}(z)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \quad (2-18')$$

还有余误差函数 $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ 。书末附录 I 是高斯函数和误差函数数值表。

2) 当 $f(\xi)$ 为如下阶梯函数, 即 $t=0$ 时, 则

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| > x_1 \\ c_0 = \text{常数} & \text{当 } |x| \leq x_1 \end{cases}$$