全国高等教育自学考试指定教材 公共课程

概率论与数理统计(二)

附：概率论与数理统计(二)自学考试大纲

课程代码 2197

[2006年版]

组编/全国高等教育自学考试指导委员会
主编/孙洪祥 柳金甫

本教材附赠网络学习卡

辽宁大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

概率论与数理统计（二）

（附：概率论与数理统计（二）自学考试大纲）

孙洪祥 柳金甫 主编

辽 宁 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（二）/孙洪祥，柳金甫主编．—沈阳：辽宁大学出版社，2006.7
全国高等教育自学考试指定教材
ISBN 7-5610-5193-X

Ⅰ．概…　Ⅱ．①孙…　②柳…　Ⅲ．①概率论—高等教育—自学考试—教材②数理统计—高等教育—自学考试—教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 086080 号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036）
印 刷 者：北京飞达印刷有限责任公司
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：13.75
字　　数：299 千字
印　　数：1—20100 册
出版时间：2006 年 7 月第 1 版
印刷时间：2006 年 9 月第 1 次印刷
责任编辑：陈晓东　王本浩
责任校对：李　文

定　　价：22.00 元
本书如有质量问题，请与教材供应部门联系。

全国高等教育自学考试指导委员会办公室	010－82090971
北京市教育考试院	010－62116141
天津市教育招生考试院	022－23924000
河北省教育考试院	0311－3823367
山西省招生考试管理中心	0351－4188692
内蒙古自治区教育招生考试中心	0471－6507481
辽宁省高中等教育招生考试办公室	024－86981032
吉林省高等教育自学考试办公室	0431－5390932
黑龙江省招生考试委员会办公室	0451－82376028
上海市教育考试院	021－64511403
浙江省高等教育自学考试办公室	0571－88008010
江苏省高等教育自学考试办公室	025－86299010
安徽省高等教育自学考试办公室	0551－3609528
江西省高等教育自学考试办公室	0791－8500734
山东省高等教育自学考试办公室	0531－6063548
福建省高等教育自学考试办公室	0591－7520300
河南省高等教育自学考试办公室	0371－3612680
湖北省教育考试院	027－87828336
湖南省教育考试院	0731－2297511
广东省高等教育自学考试办公室	020－37627787
广西壮族自治区教育考试院	0771－5338212
海南省考试局	0898－65851938
四川省高等教育自学考试办公室	028－85192685
贵州省高等教育自学考试办公室	0851－5951840
云南省招生考试办公室	0871－5162385
重庆市高等教育自学考试办公室	023－63853734
陕西省考试管理中心	029－85393509
甘肃省高等教育自学考试办公室	0931－8585258
宁夏回族自治区高等教育自学考试办公室	0951－6017555
青海省高等教育自学考试办公室	0971－6314528
新疆维吾尔族自治区高等教育自学考试办公室	0991－8609053

组编前言

21世纪是一个变幻莫测的世纪，是一个催人奋进的时代，科学技术飞速发展，知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇、寻求发展、迎接挑战、适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一位自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识，培养实践能力，形成自学能力，也有利于学习者学以致用，解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、编写体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能，以达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功！

全国高等教育自学考试指导委员会

2006年1月

编者的话

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是工科各专业的一门重要的基础理论课程。概率论从数量上研究随机现象的统计规律性，它是本课程的理论基础。数理统计从应用角度研究处理随机性数据，建立有效的统计方法，进行统计推断。通过本课程的学习，要使考生掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，并具备应用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

本书分为两个部分：概率论与数理统计。

概率论部分包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理初步共五章内容；数理统计部分包括样本与统计量、参数估计、假设检验共三章内容。

本书按《概率论与数理统计（二）自学考试大纲》编写。章节安排、自学要求、重点难点都符合大纲要求。

本书在编写中力求突出重点、深入浅出，强调概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本理论，做到简明扼要、概念准确、逻辑清晰、通俗易懂。本书备有较多的例题，并按节安排了习题，按章安排了自测题，并能够进行全面系统的解题训练，使读者更好地掌握所学知识。对每章还进行了小结，目的是让考生更准确地了解基本内容和基本要求，便于自学。

本书还附有《概率论与数理统计（二）自学考试大纲》。

本书第一章至第二章由孙洪祥编写，第三章至第五章由王义东编写，第六章至第八章由柳金甫编写，由孙洪祥统稿。秦明达教授、许伯济教授和付丽华教授详细阅读了书稿，并提出了宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢！

本书编写中难免会有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 2 月于北京

律 师 声 明

湖南通程律师集团事务所和中国律师知识产权维权业务协作网各成员所接受教育部考试中心的委托，在中华人民共和国行政辖区内依法维护其著作权及与著作权有关的权利。特声明如下：

一、教育部考试中心合法拥有全国高等教育自学考试指导委员会组编的全国高等教育自学考试指定教材近700多种图书的著作权。

二、全国高等教育自学考试指定教材已采用专门的防伪措施。凡假冒其防伪措施，复制、发行全国高等教育自学考试指定教材均构成侵权，必须承担相应的法律责任；凡销售全国高等教育自学考试指定教材侵权复制品的图书经销行为亦构成侵权，亦须承担相应的法律责任。

三、湖南通程律师集团事务所和中国律师知识产权维权业务协作网各成员所，将采取必要措施制止或消除任何侵犯教育部考试中心著作权及与著作权有关的权利的侵权行为，依法维护其著作权合法权益。

欢迎社会各界人士对侵犯教育部考试中心著作权的侵权行为进行举报。

维权电话：0731 — 5535762 **传真：0731 — 5384397**

特此声明！

湖南通程律师集团事务所
杨金柱、戴松叶律师
2006年6月

附：中国律师知识产权维权业务协作网核心成员所名单

（排名不分先后，各地普通成员所名单未列）

天津津瀚律师事务所	广西中司律师事务所	北京市盈科律师事务所
辽宁开宇律师事务所	西藏雪域律师事务所	陕西许小平律师事务所
福建建达律师事务所	重庆康实律师事务所	湖南通程律师集团事务所
山西黄河律师事务所	浙江京衡律师事务所	湖北楚风德浩律师事务所
四川信言律师事务所	上海天宏律师事务所	福建天衡联合律师事务所
江西名大律师事务所	新疆巨臣律师事务所	海南东方国信律师事务所
河南仟问律师事务所	内蒙诚安律师事务所	吉林大华铭仁律师事务所
安徽协利律师事务所	贵州持恒律师事务所	甘肃中天律师(集团)事务所
南京知识律师事务所	宁夏方和圆律师事务所	国浩律师集团(昆明)事务所
山东中强律师事务所	黑龙江三维律师事务所	河北太平洋世纪律师事务所

湖南通程律师集团湘剑律师事务所深圳分所　　湖南人和律师事务所珠海分所

目　录

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件

1.1　随机现象

自然界和社会上发生的现象多种多样，从它们发生的必然性的角度区分，可以分为两类：一类是确定性现象，一类是随机现象．所谓**确定性现象**是指这样的一类现象：在一定的条件实现时，它一定发生，我们完全可以预言什么结果一定出现，什么结果一定不出现．例如，带同种电荷的两个小球互相排斥，带异种电荷的两个小球必互相吸引；每天早晨太阳从东方升起；向空中抛一物体必然落回地面；一个口袋中装了十只完全相同的白球，从中任取一只必然为白球，等等，都是确定性现象的例子．

在一定的条件实现时，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，我们预先无法断言，称这类现象为**随机现象**．例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能反面朝上，并且每次抛掷前无法肯定抛掷的结果是什么；在同等条件下，掷一颗骰子其结果可能有 6 种，事先不能断定会出现几点；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预知弹着点的精确位置；在一个口袋中装有红、白两种球，任意取一只，可能是红球，也可能是白球，这类现象都是随机现象．

随机现象的研究是建立在大量的重复试验或观察的基础之上的，人们发现随机现象的结果呈现出某种规律性．例如，大量重复抛掷硬币这一试验，将会发现正面朝上的次数约占一半；多次重复掷一枚骰子，出现“1”点的次数约占$\frac{1}{6}$；同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定的规律分布，等等．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性就是所谓的**统计规律性**．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，随机现象是概率论与数理统计研究的主要对象．

1.2　随机试验和样本空间

下面先举一些试验的例子．

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：记录 110 报警台一天接到的报警次数；

E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命；

E_5：记录某物理量（长度、直径等）的测量误差；

E_6：在区间 $[0,1]$ 上任取一点，记录它的坐标．

上面列举了六个试验的例子，它们有着共同的特点，概括起来，不外乎三点：

1° 可重复性——在相同条件下可重复进行.

2° 一次试验结果的随机性——在一次试验中可能出现各种不同的结果，预先无法断定.

3° 全部试验结果的可知性——所有可能的试验结果预先是可知的.

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**. 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

对随机试验，我们首先关心的是它可能出现的结果有哪些. 随机试验的每一个可能出现的结果称为一个**样本点**，用字母 ω 表示，而把试验 E 的所有可能结果的集合称作 E 的**样本空间**，并用字母 Ω 表示. 换句话说，样本空间就是样本点的全体构成的集合，样本空间的元素就是试验 E 的每个结果. 下面分别写出上述各试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 所对应的样本空间 Ω_k：

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$\Omega_4=\{t|t\geqslant 0\}$；

$\Omega_5=\{t|t\in(-\infty,+\infty)\}$；

$\Omega_6=\{t|t\in[0,1]\}$.

值得注意的是，样本空间的元素可以是数，也可以不是数，样本空间所含有的样本点可以是有限多个也可以是无限多个. 另外，样本点应是随机试验最基本的并且不可再分的结果. 当随机试验的内容确定之后，样本空间就随之而确定了.

1.3 随机事件的概念

通俗地讲，在一次试验中可能出现也可能不出现的事件，统称为**随机事件**，记作 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,\cdots$ 等. 实际上，在建立了随机试验的样本空间后，随机事件可以用样本空间的子集来表示.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示“出现奇数点”，A 就是一个随机事件. A 还可用样本点的集合形式表示，即 $A=\{1,3,5\}$，它是样本空间 Ω_2 的一个子集. 在试验 E_4 中，令 B 表示“灯泡的寿命大于 1 000 小时”，B 也是一个随机事件，B 也可用样本点的集合形式表示，即 $B=\{t|t>1000\}$，B 也是样本空间 Ω_4 的一个子集.

因此在理论上，我们称试验 E 所对应的样本空间 Ω 的子集为 E 的一个随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在试验 E_2 中考察随机事件 A. 掷一次骰子，无论掷得 1 点，还是掷得 3 点，还是掷得 5 点，都称在这一次试验中事件 A 发生了，显然样本点 1，3，5 都含在 A 中. 又如，在 E_4 中考察随机事件 B. 测试一个灯泡的寿命，得知其寿命 $t_0=1500$ 小时，$t_0\in B$，则称 B 发生了. 相

反，若测得该灯泡的寿命$t_1 = 500$小时，而$t_1 \notin B$，则称B在这次试验中没有发生.

样本空间Ω的仅包含一个样本点ω的单点子集$\{\omega\}$也是一种随机事件，这种事件称为**基本事件**.

例如，在试验E_1中$\{H\}$表示“正面朝上”，这是基本事件，在试验E_2中$\{3\}$表示“掷得3点”，这也是基本事件，在试验E_5中$\{0.5\}$表示“测量的误差为0.5”，这还是一基本事件.

样本空间Ω包含所有的样本点，它是Ω自身的子集，在每次试验中它总是发生，称为**必然事件**，必然事件仍记为Ω. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件在不同的试验中有不同的表达方式. 如在E_2中，事件“掷出的点数不超过6”就是必然事件，事件“掷出的点数大于6”就是不可能事件.

综上所述，随机事件可有不同的表达方式：可以是直接用语言描述，同一事件可有不同的描述；也可以用样本空间子集的形式表示，此时，需要理解它所表达的实际含义，有利于对事件的理解.

特别提醒读者区别“事件”一词的通俗含义和理论意义.

1.4 随机事件的关系与运算

在随机事件中，有许多事件，而这些事件之间又有联系，分析事件之间的关系，可以帮助我们更深刻地认识随机事件；给出事件的运算及运算规律，有助于我们讨论复杂事件.

既然事件可用集合来表示，那么事件的关系和运算自然应当按照集合论中集合之间的关系和集合的运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们的概率意义.

（1）事件的包含与相等

设A,B为两个事件，若A发生必然导致B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A包含在事件B中，记作$B \supset A, A \subset B$.

显然有：$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

例如，在试验E_2中，令A表示“出现1点”，B表示“出现奇数点”，则$A \subset B$.

例1 一批产品中有合格品100件，次品5件，又在合格品中有1%是一级品. 从这批产品中任取一件，令A表示“取得一级品”，B表示“取得合格品”，则$A \subset B$.

本例可以先写出试验的样本空间，然后把A,B分别表示成样本点的集合，由集合的包含关系断定$A \subset B$. 读者可试一下，这样做较繁. 以后，如无特别需要，可以不写出样本空间，也不必把事件写成样本点的集合，可直接根据具体事件的含义和上述事件包含关系的定义来判断. 在例1中，因为一级品一定是合格品，故A发生必然导致B发生，所以有$A \subset B$.

若$A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B相等，记作$A = B$. 事实上，A和B在意义上表示同一事件，或者说A和B是同一事件的不同表述. 例如，在E_2中，令A表示“出现2点，4点，

6 点”，B 表示“出现偶数点”，则 $A=B$.

（2）和事件

称事件“A,B 中至少有一个发生”为事件 A 与事件 B 的和事件，也称 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 和 B 都发生.

显然有：1° $A\subset(A\cup B),B\subset(A\cup B)$.

2° 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$.

例 2 袋中有 5 个白球和 3 个黑球，从其中任取 3 个球. 令 A 表示“取出的全是白球”，B 表示“取出的全是黑球”，C 表示“取出的球颜色相同”则 $C=A\cup B$.

例 3 甲乙两人向同一目标射击，令 A 表示“甲命中目标”，B 表示“乙命中目标”，C 表示“目标被命中”，则 $C=A\cup B$.

给定 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，它表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；类似可定义可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots A_n\cup\cdots$，它表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生.

在例 2 中，令 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示“取出的 3 个球中恰有 i 个白球”，D 表示“取出的 3 个球中至少有一个白球”，则 $D=A_1\cup A_2\cup A_3$.

（3）积事件

称事件“A,B 同时发生”为事件 A 与事件 B 的积事件，也称 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，简记为 AB . 事件 AB 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生，也就是说 A,B 都发生.

显然有：1° $AB\subset A$，$AB\subset B$.

2° 若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现的点数小于 3”，则 AB 表示“出现 2 点”.

类似地，可定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n$，它表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生”. 也可定义可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，留给读者.

（4）差事件

称事件“A 发生而 B 不发生”为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$.

显然有：1° $A-B\subset A$.

2° 若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$.

例如，在 E_2 中令 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现点数小于 5”，则 $A-B$ 表示“出现 6 点”.

注意：在定义事件差的运算时，并未要求一定有 $B\subset A$，也就是说，没有包含关系 $B\subset A$，照样可做差运算 $A-B$.

（5）互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的两个事件．简称 A 与 B 互不相容（或互斥）．对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 如果它们两两之间互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容．

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现 3 点”，显然 A 与 B 不能同时发生，即 A 与 B 互不相容．

在例 2 中，A 与 B 互不相容，A_1,A_2,A_3 互不相容．

（6）对立事件

称事件“A 不发生”为事件 A 的对立事件（或余事件，或逆事件），记作 $\overline{A}$.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现奇数点”，则 $\overline{A}=B$；$\overline{B}=A$，即 B 是 A 的对立事件，A 是 B 的对立事件，A 与 B 互为对立事件．

若事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，且 A 与 B 互不相容，即 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互为对立事件．

显然有：1° $\overline{\overline{A}}=A$.

2° $\overline{\Omega}=\varnothing,\overline{\varnothing}=\Omega$.

3° $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

注意：若 A 与 B 为对立事件，则 A 与 B 互不相容．但反过来不一定成立．

图 1.1~1.6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算．例如，图 1.1 中正方形区域表示样本空间 Ω，圆域 A 与圆域 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A，又如图 1.3 中的阴影部分表示积事件 AB，图 1.4 中阴影部分则表示事件 $A-B$.

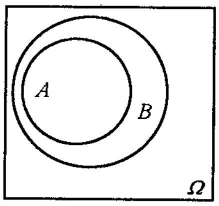

图 1.1

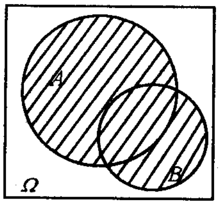

图 1.2

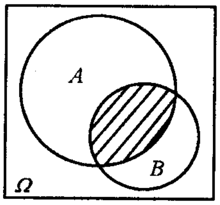

图 1.3

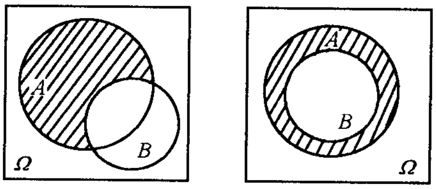

图 1.4

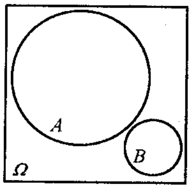

图 1.5

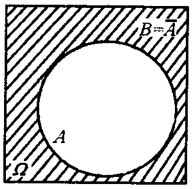

图 1.6

在进行事件运算时，经常要用到下述运算律，设 A,B,C 为事件，则有