

北京航空学院

科学报告会论文集

庆祝建校三十周年

第十二分册 大学生论文集

1982.10

前 言

建校三十年来,我院科研工作遵循党的方针政策,密切结合教学,取得不少成果,在此基础上,总结出了一批有一定理论价值与实践意义的学术论文。

战斗在祖国各地的校友们,在为实现我国四个现代化这一伟大历史任务的过程中,同样做出了可喜的成绩,此次他们热情响应母校三十周年校庆征稿的号召,把自己多年来从事教学、科研与工程技术实际工作中所积累起来的宝贵经验,进行理论总结,书写成文,投寄我院。

为隆重纪念我院三十周年校庆日,加强院内外的学术交流与联系,我处特编辑这套校庆论文集。文集刊载本院与校友近期科研成果或技术总结的详细文摘。为节省篇幅,在编辑时将作者原列参考文献删去。

论文按专题分类出版:

1. 材料科学与工程类
2. 无线电电子学类
3. 自动控制类
4. 发动机类
5. 飞行器与力学类
6. 计算机类、管理工程类、情报学类
7. 制造工程类
8. 数理类
9. 机械设计类
10. 医疗类、体育类
11. 社会科学类
12. 大学生论文集

由于编辑出版力量有限,时间也较仓促,难免有遗漏和不妥之处,欢迎批评指正。

北京航空学院 科研处

1982年10月

第十二分册 大学生论文目录

1. 用矩阵确定相律中独立方程数 R 值的问题	3
9141 班	何俊远
2. 具有有限数零因子的环的性质	7
8141 班	曹玉洪
3. 碳、硼、铝对 K5 合金初生相析出过程的影响	9
8121 班	高 平
4. 漏磁系数法计算磁路的误差分析	19
7341 班	杨跃进
5. 关于因果性的考虑	25
0402 班	丁 俊
6. 二维可压紊流附面层的计算	31
7441 班	何 力
7. $E = mc^2$ 评述	45
C 02 班	黄立锡
8. 关于和式 $S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$ 表达式的三个命题	51
8501 班	邓小敏
9. n 阶常系数线性微分方程的特征根为 n 重根时其 一般解的表达式	58
0502 班	沈 涛
10. 关于求平面运动刚体上点的加速度的瞬加心法	62
0502 班	沈 涛
11. 对用有限基本解方法计算圆头翼型厚度问题的一 些改进	69
8561 班	赵庆伟 金佐弟
12. 二阶线性齐次微分方程的两种类型及其解	78
0504 班	涂绍宁
13. 关于后仰座椅的一些设想	95
9551 班	章 华
14. 不定积分之变量代换	103
飞行器设计与应用力学系 80 级 数学小组	

15. 飞机主要参数的统计	115	
飞行器设计与应用力学系		学生航空情报小组
16. 气垫伞翼飞机研制总结	122	
飞行器设计与应用力学系		麦 鹰等
17. 托布里兹 (Toeplitz) 矩陣及其快速算法的研究	129	
8612 班		賈力普
18. 过渡曲面造型——飞行员头盔耳部的造型	140	
8731 班		陈晓明
19. 环氧胶粘剂 E-3A 的断裂韧性测试	147	
8731 班		張純民
20. 貝齐尔曲面 G^1 拏合的一般公式	153	
8731 班		魏 青
21. Π -型参数双三次样条曲面的光滑性的讨论	163	
7021 班		吳 进
22. 小型空心阴极 $He-Cd$ 激光器	176	
7031 班		何其赤
南开大学		王江林
23. 固体磷酸氢鋁的制备及其粘結性的研究	182	
8001 班		何魯林
24. 梯形点集上的 steiner 问题	190	
7021 班		郝庆英
25. 平面机构自由度计算中 q 值的确定	202	
9002 班		夏振华
26. 几种图类的优美标法	206	
7021 班		葛幸华等
27. 二百年后飞行器的变化以及貨物艙的应用	217	
9402 班		秦仲泉
28. 粒子衰变中的能量和动量	223	
9402 班		陈少忠
29. “宇称”和“宇称守恒”	229	
9402 班		卢 江
30. 思考与认识——学习“测不准关系”的联想	231	
9402 班		蔡 航

用矩陣确定相律中独立方程数 R 值的问题

9141 班 何俊远

$f = c - p + n$ 是物理化学中 Gibbs 相律。 c 为独立组分数。所謂独立组分数就是构成平衡物系中所有各相所需要的最少组分数。而

$$c = S - R - R'$$

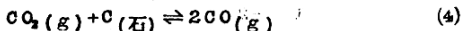
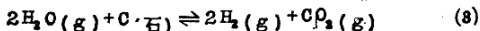
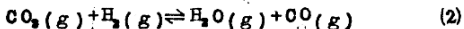
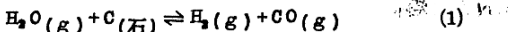
式中 S : 组分数;

R : 独立反应方程数;

R' : 浓度限制条件;

平衡物系中各组分之间可能发生的化学反应方程数, 已经给出的条件下, 怎样确定它們中的哪些方程是独立的呢?

由已知条件确定 R 值时, 通常用观察法。例如, 对于平衡物系中有 $H_2O(g)$, $C(石)$, $CO(g)$, $CO_2(g)$ 和 $H_2(g)$ 五组分, 其中可能发生的化学反应:



在确定这一组方程中独立方程数的过程中, 首先观察各方程的系数关系, 发现方程 $(1) + (2) = (4)$, 而 $(1) - (2) = (3)$ 。所以方程组 (1) 和 (2) 是独立的。如果所给的方程较多, 这种方法就会带来一定麻烦。

为了迅速又准确地解决这类问题, 用矩阵的方法即通过对方程组系数系数矩阵求秩, 来确定独立反应方程数, 是比较可靠的。

首先考查一个方程: $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$

$A \cdot B$ 代表反应物;

$a \cdot b$ 代表 $A \cdot B$ 的系数;

$C \cdot D$ 代表生成物;

$c \cdot d$ 分别表示 $C \cdot D$ 的系数。

从方程来说, 每一种物质就是一个变元。从平衡体系的意义上来说也可这样认为。

則: $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$

就可配为: $aA + bB - cC - dD = 0$

显然两式同解。

如果对一个方程组, 做同样的工作, 所得的方程组也是一定与原方程组同解。问题不在于求解方程组, 而在准定方程组中独立方程数。因此, 只要求在前述例题中求出方程组系数矩阵的秩, 就可达到这一目的。

令: $H_2O(g)$, $C(石墨)$, $CO(g)$, $CO_2(g)$ 和 $H_2(g)$ 分别用 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 和 x_5 表示, 式(1)~(4)经过变形整理后可得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & -x_5 = 0 \\ -x_1 & -x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 & -x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

所以系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

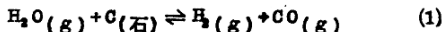
对A进行初等变换得

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这说明, 方程组中独立方程数为两个, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & -x_5 = 0 \\ & x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

再把以上方程组恢复成化学方程式, 得



这说明方程(1)和(4)线性独立，这个结果是否等价于用观察法求出的结果呢？

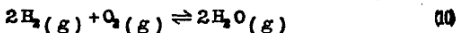
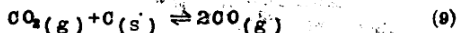
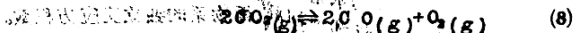
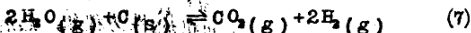
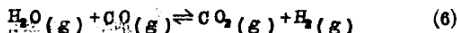
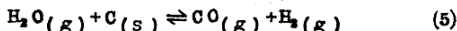
首先看，它们所求得的 R 相等，即 $R = 2$ 但用观察法求得(1)和(2)是无关方程，而用矩阵法求得(1)和(4)也是无关方程。这是否矛盾呢？由向量中最大无关组的定义：

假定 $a_1, \dots, a_m$ 是向量组中的 m 个向量，如果：

- 1) $a_1, \dots, a_m$ 线性无关；
- 2) 向量组中任一向量都是 $a_1, \dots, a_m$ 的线性组合。

那么， $a_1, \dots, a_m$ 是向量组的最大无关组。于是得知，两结果实质是一致的。这说明矩阵的方法是可行的。下面再举一例说明这种方法。

当水蒸气在高温下与灼热碳粉反应时，体系存在下列化学平衡：



令 H_2O , C , CO , CO_2 , H_2 , O_2 分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 x_6

原方程组变为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & -x_5 & = 0 & (5)' \\ & +x_3 - x_4 - x_5 & = 0 & (6)' \\ 2x_1 + x_2 & -x_4 - 2x_5 & = 0 & (7)' \\ & -2x_3 + 2x_4 & -x_5 & = 0 & (8)' \\ & x_3 - 2x_5 + x_4 & & = 0 & (9)' \\ -2x_1 & & + 2x_3 + x_4 & = 0 & (10)' \end{cases}$$

系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

通过初等变换得

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程(5)、(8)、(9)线性独立，即 $R = 3$ 。

简言，上述方法基本思想是：把平衡物系中每种物质看成一变量，把化学反应方程组变形为一同解线性方程组，然后对该线性方程组的系数矩阵求秩，所得结果，就是平衡物系的独立反应方程数。

具有有限数零因子的环的性质

8141班 曹玉洪

1964年 Ganesan 证明了具有 n 个 ($n > 1$) 零因子的环是有限环而且环的元数 $|R| \leq n^2$ 。1967年, Koh 进一步证明了如有 1 的环 R 含有一非零零的极大左理想, 则 $|R| \leq (\frac{n+1}{2})^2$ 。本文改进了上述结果并回答了 Ganesan 提出的一个问题。

定义: 设 Ω 为 R 的一个子集, 它至少有一个非零的右零因子 z 。如果 $rz \in \Omega$ 对于任一 $r \in R$ 都成立则称 Ω 为一个 L 集。

定理 1: 如果环 R 具有 n 个左零因子和一个 m 个元的 L 集 S , ($n > 1, m > 1$) 则 $|R| \leq nm$

证明: 令 $A = \{r | rz = 0, r \in R\}$, 这里 z 是 S 中的一个右零因子。则 A 为 R 加群的一个正规子群。对于任二元 $t_1, t_2 \in R$, $t_1 z = t_2 z$ 当且仅当 $t_1 \equiv t_2 \pmod{A}$ 。因此对于不同的陪集 $A + t$ 相应有不同的 tz 与之对应。因此 A 在 R 加群中的指标也就是不同陪集的个数 A_R , 它也是相应的 tz 的个数。因子所在集合 S 是一个 L 集, 故 $rz \in S$ 。但 S 的元数是 m 因此 $A_R \leq m$ 。又因 A 的元都是零因子, 故 $|A| \leq n$ 于是 $|R| = |A| \cdot A_R \leq nm$ 。

定理 1 的证明几乎是 Ganesan 定理的原文照搬, 但定理 1 强于 Ganesan 定理。把零因子作为 L 集就得到 Ganesan 定理, 把任一左理想 H 作为 L 集就得 $|R| \leq n|H|$ 。

Ganesan 提出如下问题: 任意给定正整数 K, P, n , 是否一定存在一个可换环 R 其特征为 K 具有 P 个正则元和 n 个零因子而且

$$\varphi(K) \leq P \leq n^2 - n$$

下面定理 2 回答了这个问题。

定理 2: 具有 n 个零因子的可换环 R 不可能具有 $n^2 - n - 1$ 个正则元。

证明: 如其不然, 环 R 的元数就为 $n^2 - 1$, 设 R 幂零元个数为 m 。当 $1 < m < n$ 时, R 的全体幂零元就是一个 L 集。因此 $|R| \leq nm$

也就是 $n^2-1 \leq nm$ $n(n-m) \leq 1$ 由于 $1 < m < n$ 这是不可能的。

当 $m = n$ 时, R 的零因子都是幂零元。它们形成了一个幂零理想。因而 $n/|R|$ 即 n/n^2-1 这也是不可能的。

当 $m = 1$ 时, R 为可换半单环, 它可以分解为有限个有限域的直和。每个直和分量都是零因子又都是理想因而都是 L 集。设元数最少的分量的元数为 m , 则 $m \leq \frac{1}{2}n$ 。于是 $|R| \leq nm \leq \frac{1}{2}n^2$ 即 $n^2-1 \leq \frac{1}{2}n^2, \frac{1}{2}n^2 \leq 1$ 这又是不可能的。

上面的论证穷尽了 m 的所有情况, 因而就证明了定理 2。

我们令一个环有 n 个零因子 n^2-n-1 个正则元特征为满足 $\varphi(K) \leq n^2-n-1$ 的 K 则

$$\varphi(K) \leq n^2-n-1 \leq n^2-n$$

但由定理 2 这样的环是不存在的, 因而 Ganesan 问题就得到了否定的回答。

一环 R , 如能分解为左理想的直和称为弱可分的, 显然可分环都是弱可分的。

定理 3: 一环 R 如有异于单位元的幂等元, 则 R 为弱可分的。

证明: 设此幂等元为 e_1 , 令 $L_1 = \{r \mid re_1 = r, r \in R\}$ 于是 L_1 形成了 R 的一个左理想。令 L_2 为 e_1 的左零化理想。对于任一 $r \in R$, 令 $a = re_1 \in L_1$, $b = r - re_1$ 由于 $be_1 = (r - re_1)e_1 = 0$ 故 $b \in L_2$ 而 $r = a + b$ 又因 $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ 因此 $R = L_1 + L_2$ 。 R 弱可分。

定理 4: 一个具有 1 和 n 个零因子的环 R , 如果它是弱可分的则

$$|R| \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

证明: 不妨设 $R = L_1 + L_2, L_1, L_2$ 都是 R 的左理想。于是 $1 = e_1 + e_2, e_1 \in L_1, e_2 \in L_2, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ 所以 $L_1 e_2 = L_2 e_1 = 0$ $L_2 e_1 = L_1 e_2 = 0$ 因此 L_1 与 L_2 中的元都是零因子。设 L_1 的元数为 m_1 , L_2 的元数为 m_2 则 $m_1 + m_2 \leq n+1$ 于是

$$|R| = m_1 \cdot m_2 \leq (m_1 + m_2)^2 \leq (n+1)^2$$

如果有 1 和 n 个零因子的环 R 有一个非幂零极小左理想, 则因 R 有限故 R 满足极小条件, 因此非幂零左理想中有一异于 1 的幂等元。根据定理 3 R 就是弱可分的, 再生定理 $\varphi(R) \leq (n+1/2)^2$ 但是反过来, 如 R 是弱可分的则 R 不一定有非幂零的极小左理想。因此 Koh 的结果是定理 4 的特殊情况。

碳、硼、铈对K₃合金初生相析出过程的影响

8121班 高平

(一) 前言

镍基高温合金是现代航空发动机和舰用燃气涡轮的重要材料，它是高温合金中发展最快的合金。近十几年来，在镍基高温合金的发展中，铸造镍基高温合金的发展尤为突出，在这方面的研究工作比较深入。由于铸造高温合金的组织性能是由凝固条件所决定的，通过热处理的方法改变组织和性能的幅度很小，所以，许多铸造高温合金不经热处理而直接使用。因此，通过合理地控制合金的凝固过程，从而控制铸造组织的形成就具有重要的意义。

高合金化的铸造镍基高温合金的显微组织是极其复杂的。通常它含有十几种合金元素，有五种以上的组成相。近年来，冶金工作者在对高温合金的凝固与相变的研究方面作了大量的工作，发表了很多论文。

众所周知，在镍基高温合金的发展中，曾一度追求高温时的高强度，甚至达到在1000°C以上仍然有很高的强度和很好的塑性。然而，它却存在一个不可忽视的问题，就是在中温(650~810°C)范围内存在一个低塑性和低强度区，即所谓“塑性谷”，在Ⅱ阶段蠕变过程中往往引起零件过早破坏。因此，铸造镍基高温合金的中温强度和塑性问题，引起了冶金工作者的注意，并成为许多研究者探讨和攻克的目标。目前，解决这一问题已经从设计、工艺和合金化三个方面着手。实践表明：采用加铈和低碳高硼的合金化方法来提高铸造镍基高温合金的中温强度和塑性，将是一个行之有效的途径。然而，有关硼、铈以什么方式起作用还缺乏系统的研究。

在本文中，我们将根据对K₃合金以及K₃母合金分别加碳、硼、铈的合金的研究结果，总结和探讨碳、硼、铈对K₃合金凝固特性的影响，了解这些合金的凝固特点和铸造组织，以便在应用这些合金时选择适当的工艺参数而得到理想的铸造组织和性能。

(二) 实验方法

研究合金成份如表1。为了保证合金基本成份的一致性，先炼成

母合金，然后补加不同含量的合金元素。

表 1 研究合金的成份

合金号	C	Zr	Hf	Co	Cr	Al	Ti	W	Mo	B	Ni
A	0.014	0.096	0	10.0	10.34	5.5	2.26	4.8	3.66	<0.01	余
B	<0.01	"	0	"	"	"	"	"	"	0.11	"
C	0.17	"	0	"	"	"	"	"	"	0.026	"
H	0.15	"	1.80	"	"	"	"	"	"	0.022	"

熔化与凝固试验：用硅溶胶刚玉砂涂料将试样密封和固定在石墨舟内，用砂碳管炉加热。石墨舟干燥后放入炉中加热至1370℃保温10分钟使其完全熔化，再冷至不同温度等温凝固15分钟，然后迅速淬入水中。

示差热分析试验在岛津DT-2A型仪器上进行，选用Pt作为标样，升温速度为10℃/分，试样取自浇注系统底盘。金相分析采用MNM-8型显微镜，试样用1:3:5硝酸、氢氟酸、甘油溶液电解浸蚀。用剪纸称重法测定固-液比例。扫描电镜工作在JSM-35上进行。用733电子探针测定合金元素的分布。

(三) 实验结果及分析

3.1 示差热分析

图1给出了四种合金的示差热分析(DTA)曲线。这四条曲线反映了合金在熔化凝固过程中的转变以及各合金在发生转变时的温度。图1a是合金A的DTA曲线。这种合金没有碳、硼、铪的影响，只在DTA曲线上的1280~1360℃和1355~1210℃温度范围内反映出合金的熔化峰和凝固峰。含碳较高的合金C(0.17%碳)中有大量MC碳化物，使得DTA曲线熔化峰峰顶畸变(图1b)。冷却时，示差曲线具有两个析出峰：1345~1300℃，大部分γ基体首先凝固；1285~1270℃ MC碳化物析出。在1200℃合金完全凝固。

B合金是一种低碳高硼合金，合金中的M₂B₂低熔点相使得它的DTA曲线具有自己的特征(图1c)。在1210~1250℃，M₂B₂和(γ+γ')共晶熔化。由于M₂B₂和(γ+γ')共晶的熔化，使得γ基体的熔化温度由A合金的1280℃降至1265℃。H合金含有1.80%铪

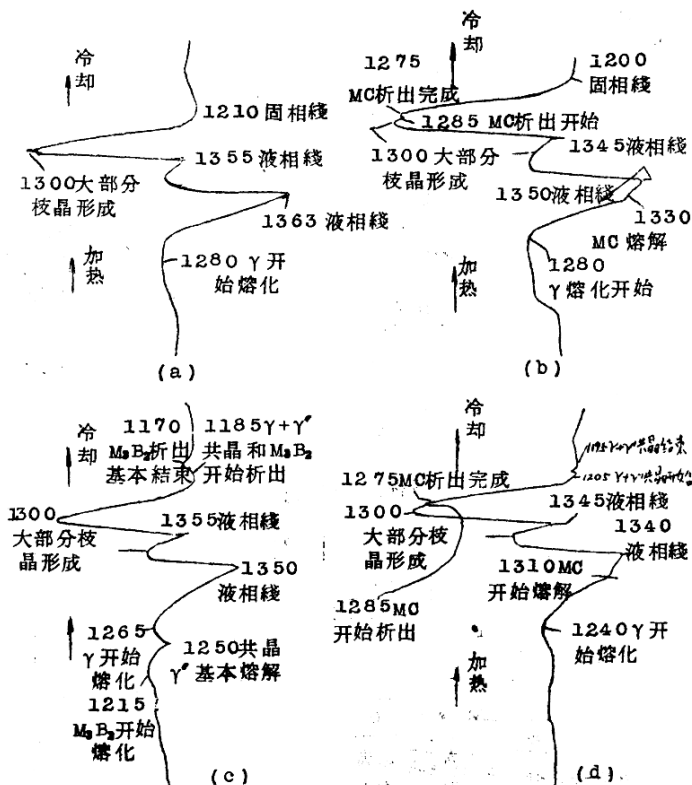


图1 四种合金的示差热分析 (DTA) 曲线

和 0.15% 碳，它的示差曲线既类似于合金 C，又与合金 B 有相似之处 (图 1d)。虽然在金相上已发现该合金存在 Ni_5Hf 相，但由于合金中钨的含量较低，在示差曲线上没有形成 Ni_5Hf 相的峰。以前的工作证明，当 Ni_5Hf 的量少于 1% (体积) 时，它熔化时的热效应在仪器的探测限以下，并且它极易固溶到 γ 基体中去，而不能在示差曲

线上形成一个敏锐的峰。但 Ni_5Hf 相对熔凝过程的作用在示差曲线上仍然得到反映，即在加热过程中，由于 Ni_5Hf 相熔点低，在 $1140 \sim 1160^\circ C$ 熔化，因此，合金中共晶 γ' 也易熔于 Ni_5Hf 相的初熔液池中。这种诱发作用明显地降低了合金中 γ 的熔化温度，由 A 合金的 $1280^\circ C$ 降至 $1240^\circ C$ 。因钆的作用，使共晶 γ' 的数量明显增加，所以，在合金 A 冷却 DTA 曲线中无反映共晶 γ' 的峰，而在 H 合金的 $1205 \sim 1195^\circ C$ 出现共晶 γ' 析出峰。

从以上四条曲线可以看出，加热和冷却时示差曲线的峰值温度并非对应。冷却时示差曲线的变化规律与加热时是一致的，但由于采用随炉冷却，冷却速度比加热速度更快 ($20^\circ C/分$)，所以相的析出具有更大的过冷，各个相析出峰的温度被推向低温。

这四种合金的示差热分析结果综合在表 2 中，它反映了碳、硼、钆对合金的液相线、固相线和凝固温度区间的影响。

表 2 四种合金的主要温度 ($^\circ C$)

合金	加 热			冷 却		
	液相线	固相线	温度区间	液相线	固相线	温度区间
A	1363	1280	83	1355	1210	145
B	1350	1215	135	1355	1170	185
C	1350	1280	70	1345	1200	145
H	1340	1240	100	1345	1195	150

这些结果表明，在加热和冷却过程中固—液范围有明显的差别，这说明熔凝过程是不可逆的。在加热过程中，由于在固态下扩散的影响，一些金属间化合物（如共晶 γ' ）是逐渐溶解的，往往使合金的熔化温度移向高温。而在冷却过程中，许多合金都以 $L \rightarrow \gamma + \gamma'$ 共晶反应结束整个凝固过程。当合金中存在大量 Ni_5Hf 和 M_5B_2 时，在 $(\gamma + \gamma')$ 共晶反应结束以后，还有 Ni_5Hf 相和 M_5B_2 相的析出，因此，凝固温度区间进一步增大（如合金 B）。

3.2 等温凝固

为了探讨 A、B、C、H 四种合金的凝固特性，我们对这四种合金分别作了等温凝固试验。在 A 合金中，碳硼含量极低，合金的主要初

生相*是共晶 γ' 。此合金在1360°C尚未凝固,在1350°C已凝固53.7%**。随着温度降低,凝固枝晶发展很快,到1310°C合金已凝固90%。在1290°C时,合金中的液体已成不连通状态(图2)。在共晶 γ' 析出之前,残余液池孤立地分散在 γ 基体上(图3),直到1240°C合金以共晶 γ' 析出结束整个凝固过程。C合金的主要初生相为MC碳化物和共晶 γ' 。在1360°C,合金为100%液体,1350°C就已凝固45.7%(图4),到1310°C,合金凝固达90%。在1360~1310°C内,C合金与A合金凝固特性相似,在大约50°C的温度区间内90%的枝晶骨架已经形成。该合金1290°C时枝晶间剩余液体的分布与合金A基本相同。合金中MC碳化物在1310°C就已明显析出(图5)。图5中大块碳化物为等温过程中析出的MC碳化物,细骨架状碳化物是在淬火过程中形成的。MC碳化物的析出过程一直延续到1270°C结束。在1235°C共晶 γ' 析出后合金完全凝固。

H合金的初生相有MC(1)、MC(2)、共晶 γ' 和N15Hf相(图6)。钆的加入,大大地增加了合金中共晶 γ' 的数量,由A合金的2%增加到7%左右。该合金在1350°C还未开始凝固,在1345°C时已凝固40%,到1310°C时,合金凝固了61%。该合金凝固时的一个重要特点就是在低于1310°C时,合金仍然保留有较多的液体,到1250°C,合金中仍保持8%和剩余液体。此时,枝晶间的剩余液体基本上仍保持相互连接的状态。在1310°C,合金中开始析出MC(1)碳化物并一直延续到1270°C结束。在1240°C MC(2)析出。金相观察表明:1250°C合金中尚未析出MC(2),而在1230°C则已存在大量的MC(2)碳化物(图7)。这种碳化物常常出现在共晶 γ' 旁边,有时孤立地出现,有时与MC(1)共生。共晶 γ' 在1230°C已明显析出。共晶 γ' 析出以后,在它旁边仍保留有富钆的液池,直到1150°C合金才完全凝固。

金相观察发现:在1190°C/15'等温凝固后,合金中仍有1%左右的富钆液体,但在1150°C/15分后并未发现N15Hf相析出。这是因为合金中含钆量较低,在等温过程中形成的少量N15Hf溶入基体或形成了HfC。在此合金中没有发现等温凝固的初生N15Hf相。

* 在本文中,凡由液体中析出的相统称为初生相。

** 此处为体积百分数,以后未注明处皆为体积百分数。

为了确定H合金中各主要元素的分布，我们对1210°C/15'等温凝固试样进行了电子探针分析，其结果列于表3，各相中元素面分布情况如图8。与此同时，我们对MC(1)、MC(2)用能谱作了对比分析，其结果可用下列分子式表示： $(\text{Ti}_{0.576}\text{W}_{0.212}\text{Mo}_{0.150}\text{Hf}_{0.062})\text{C}$ 、 $(\text{Hf}_{0.717}\text{Ti}_{0.194}\text{W}_{0.054}\text{Mo}_{0.035})\text{C}$ 。

从以上分析结果可以看出，无论是哪一种分析方法，其结果都是一致的，即MC(1)是富钛的，MC(2)中则是以钨为主。从表3中可知，无论是等温凝固过程中析出的共晶 γ' ，还是淬火过程中在液池周围形成的淬火共晶 γ' ，其成分都非常吻合，这说明凝固条件的变化对共晶 γ' 的成分影响甚微。

B合金铸造组织的主要初生相是共晶 γ' 和 M_2B_2 相。在该合金中，由于低碳高硼的结果，也使得共晶 γ' 的量明显增加，由A合金的2%增加到5.5%。该合金在1350°C未凝固，1345°C则已凝固23.8%，1310°C时，合金凝固80%左右。此后，一直到1250°C，合金都保持10%左右的液体不再凝固，这些液体保持着良好的连通性，犹如纵横交错的“河道”（图9）。共晶 γ' 在1230°C析出。在没有共晶 γ' 的区域， M_2B_2 已经出现，但在共晶 γ' 周围的液池中，大量的 M_2B_2 尚未析出，此时，合金中仍保持有相当多的剩余液体，这部份液体在淬火过程中析出更加细小的 M_2B_2 相（图10）这说明共晶 γ' 的存在降低了 M_2B_2 相的析出温度。合金在1210°C等温以 $\text{L} \rightarrow \gamma + \text{M}_2\text{B}_2$ 反应结束凝固过程。

我们对上述四种合金的各种凝固状态作了定量金相分析，其结果如图11所示。不同合金的各相析出温度综合于图12。

图11给出了四种合金在凝固过程中剩余液体随凝固温度区间 $(T_{\text{液}} - T)^*$ 增加而变化的情况。这四种合金在凝固初期都具有相同的特点，即在凝固刚开始的温度区间内合金的凝固速度很快，大量的液体凝固成固体。由图11可知，在凝固刚开始的大约40°C温度区间内，合金中有60~90%的液体已经凝固。但是，在凝固过程的后期，这四种合金的凝固特性就相差较大。硼、钨对K₂合金凝固后期有着重大影响，即在很宽的温度区间内保持较多的液体量，使继续凝固速度降低，这在图11曲线上已被清楚地反映出来。

* $T_{\text{液}}$ ：合金开始凝固的温度，即液相线； T ：等温试验时的实际温度。

表 3 B 合金中初生相电子探针成份测定结果

相 分子式	位置 编号	各相中主要成份 (重量%)							
		Cr	A ₂	Ni	Ti	Mo	W	Hf	Co
MC(1)	1	13.182	0.000	2.0655	31.3672	15.0212	3.04650	3.6380	0.2713
分子式		(Ti _{0.616} W _{0.156} Mo _{0.147} Ni _{0.033} Cr _{0.024} Hf _{0.020} Co _{0.0004})C							
MC(2)	2	0.5250	0.0000	2.2408	4.0972	2.6602	4.4836	6.99096	0.7059
分子式		(Hf _{0.664} Ti _{0.145} Ni _{0.065} Mo _{0.048} W _{0.041} Co _{0.020} Cr _{0.017})C							
等温 γ'	3	4.7680	6.7175	7.02493	3.7014	1.8482	1.3724	2.4110	7.1133
淬火 γ'	4	3.6378	6.8211	7.03023	3.7528	1.3238	1.4581	3.4281	6.4706

长期以来,人们评价铸造高温合金的可铸性时认为:凡是缩小凝固范围的因素都是有利于提高合金可铸性的,增大凝固范围的因素则对可铸性不利。然而,六十年代末期为提高高温合金的中温强度和塑性所采用的高硼和加钎的方法,却大大地扩大了固-液范围。随后,对这类合金的进一步研究表明:尽管这类合金凝固范围很宽,但它们形成疏松和热裂的倾向却大大降低,特别是含钎的合金,铸造性能特别好,这一现象和传统的观念似乎是矛盾的。

另外,从合金化的角度来讲,硼和钎是截然不同的合金元素,钎是 γ' 形成元素,也是碳化物形成元素,而硼根本不进入 γ' 和碳化物,只形成 $M_{23}B_6$ 相。这两种合金化作用完全不同的元素反映在提高中温性能的作用上却是相同的。有人曾把钎的良好作用归结为它强化了 γ' ,然而,不进入 γ' 的硼也明显地提高中温性能就不好解释了。