高职高专公共课系列教材

# 高等数学学习指导

崔鸿志　刘路漫　主编

東北大學出版社
Northeastern University Press

高职高专公共课系列教材

# 高等数学学习指导

主　编　崔鸿志　刘路漫
副主编　曾庆健　曾庆武　黄溪生

东北大学出版社
·沈　阳·

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学学习指导 / 崔鸿志，刘路漫主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.5
ISBN 7-81102-242-7

Ⅰ. 高…　Ⅱ.①崔…　②刘…　Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 023452 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳农业大学印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：14.25
字　　数：430 千字
出版时间：2006 年 5 月第 1 版
印刷时间：2006 年 5 月第 1 次印刷
责任编辑：李　平　刘宗玉　　　责任校对：李　莉
封面设计：唐敏智　　　责任出版：杨华宁

定　　价：23.00 元

# 前　言

本书是金秀岩主编的高职高专教材《高等数学》的配套辅导教材，是在参考金秀岩主编的《高等数学学习指导》的基础上编写而成，是理工类高职高专各专业学生学习《高等数学》必备的辅导教材．也可作为高职高专经济类各专业以及自学考试、专升本学生学习《高等数学》的辅导教材．

本书具有以下特点：

1．每章包含四部分内容：一、基本内容归纳；二、典型例题解析；三、习题解答；四、单元测试题解答．

2．紧密结合教材，并配合教学内容归纳概括概念、定理、法则和公式，着重分析问题和作深入浅出的说明，以帮助读者加深理解、增强记忆和正确运用．

3．结合教材列举了针对性较强的例题，并对每章的全部习题和单元测试题进行了较详细的解答．

参加本书编写的人员及分工如下：各章节的“基本内容归纳”及“典型例题解析”部分：孙卫东编写第一章、第二章、第三章；李宝娣编写第四章、第十章、第十一章；崔鸿志、杨平编写第五章、第六章；曾庆武编写第七章、第八章；曾庆健编写第九章．各章单元测试题的解答，黄溪生；各章节习题解答，刘路漫．本书由崔鸿志、刘路漫担任主编，曾庆健、曾庆武、黄溪生担任副主编．曾庆健担任主审．

本书在编写过程中，金秀岩同志审阅了全部书稿并提出一些修改意见，在此表示衷心的感谢．由于编者水平所限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，诚望广大读者批评指正，不胜感谢．

**编者**

2005 年 12 月

# 目　　录

# 第一章　预备知识

## 第一节　基本内容归纳

### 一、函数概念

**定义**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量.数集 $D$ 叫做这个函数的定义域，函数值全体组成的集合 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为这个函数的值域.当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值.记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

确定函数的两个要素：

(1) 函数的定义域.如果两个函数的定义域不同，函数就不相同.

(2) 对应关系.它表明了函数 $y$ 与自变量 $x$ 之间的关系是按照一定的法则联系起来的.这个“一定的法则”就是 $x$ 与 $y$ 之间的对应关系，即函数关系.因此，如果两个函数的对应关系不同就是两个不同的函数.而且在两个函数中虽然定义域相同，但对应关系不同，仍是两个不同的函数.

函数的表示方法一般有：(1)公式法(也称解析法)；(2)表格法；(3)图示法.

### 二、函数定义域的求法

| 函数类型 | 定义域的求法 |
|---|---|
| 分式函数 | 分母不等于零. |
| 偶次根式函数 | 根式内的量不能取负值.<br>如：$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，所以 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ |
| 奇次根式函数 | 根式内的量取任意实数. |
| 对数函数 $y=\log_a x$<br>$(a>0,a\neq 1)$ | 真数必须取正值.<br>如：$f(x)=\log_2(1-x)$，所以 $1-x>0$，即 $x<1$ |
| 正弦函数 $y=\sin x$<br>余弦函数 $y=\cos x$ | $x$ 取一切实数. |
| 正切函数 $y=\tan x$<br>余切函数 $y=\cot x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，　$(k\in Z)$<br>$x\neq k\pi$　　$(k\in Z)$ |
| 反正弦函数 $y=\arcsin x$<br>反余弦函数 $y=\arccos x$ | $\lvert x\rvert\leqslant 1$ |
| 有限项组成的函数 | 先求出每一项的定义域，再取其共同部分. |
| 分段函数 | 求几个表达式的定义域的并集. |

### 三、函数的几种特性

| 性　质 | 函数类型 | 满足条件 | 备　注 |
|---|---|---|---|
| 奇偶性 | 偶函数 | $f(-x)=f(x)$ | 图形关于 $y$ 轴对称 |
| | 奇函数 | $f(-x)=-f(x)$ | 图形关于原点对称 |
| 单调性 | 单调增加函数 | 对于 $D$ 中的任意 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ | |
| | 单调减少函数 | 对于 $D$ 中的任意 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$ | |
| 有界性 | 有界函数 | 对于所有 $x\in D$，存在正数 $M$，使 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 成立 | |
| 周期性 | 周期函数 | 若存在一个正数 $T$，对任何 $x\in D$ 都有 $f(x\pm T)=f(x)$ | |

### 四、反函数

(1) 定义：设给定 $y$ 是 $x$ 的函数 $y=f(x)$，如果把 $y$ 当作自变量，$x$ 当作函数，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 而函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，总是用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示因变量，因此，把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，称 $y=f^{-1}(x)$ 和 $y=f(x)$ 互为反函数.

(2) 性质：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，在同一个直角坐标系下，关于直线 $y=x$ 对称.

### 五、复合函数

**定义**　如果 $y$ 是 $u$ 的函数 $y=f(u)$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，$y$ 通过中间变量 $u$ 也是 $x$ 的函数，称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $u$ 叫做中间变量.

**注**　在复合函数 $y=f(u)$ 中，特别注意中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，否则不能构成复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+4$ 就不能复合成一个复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=x^2+4$ 的值域为 $[4,+\infty)$，故 $[4,+\infty)\not\subset[-1,1]$.

### 六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成，并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

## 第二节　典型例题分析

**例 1**　求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域.

**分析**　所给的函数是由 $\sqrt{3-x}$，$\arcsin\dfrac{1}{x}$ 构成的，所以所给函数的定义域为这两个函数定

义域的公共部分.

**解** 由题意有

$$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ \left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x\leqslant 3\\ -1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$$

而

$$(-\infty,-1]\cap(-\infty,0)\cap(0,+\infty)\cap(-\infty,3]=(-\infty,-1]$$

$$(0,+\infty)\cap[1,+\infty)\cap(-\infty,3],=[1,3]$$

所以所求定义域为:$(-\infty,-1]\cup[1,3]$.

**例 2** 求下列函数定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;  (2) $y=\sqrt{3x+2}$;  (3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

**解** (1) 因为 $1-x^2\neq 0$, 所以 $x\neq\pm 1$, 所以定义域为$\{x\mid x\neq\pm 1,\ x\in R\}$;

(2) 因为 $3x+2\geqslant 0$, 所以 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$, 所以定义域为$\left\{x\mid x\geqslant -\dfrac{2}{3},\ x\in R\right\}$;

(3) 因为$\begin{cases}x\neq 0\\ 1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 所以定义域为$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0,\ x\in R\}$.

**例 3** 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 求 $f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(-x),f(x+1)$.

**解** $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}$$

**例 4** 将下列函数分解成若干简单函数,并求出定义域.

(1) $y=\arctan\ln(1+x^2)$;  (2) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$;  (3) $y=[1-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^4$.

**解** (1) 令 $v=1+x^2$, $u=\ln v$, 则 $y=\arctan u$, 故所给函数的复合关系为

$$y=\arctan u,\ u=\ln v,\ v=1+x^2$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{u}$, $u=\tan v$, $v=\dfrac{x}{2}$, 定义域为$(2n\pi,(2n+1)\pi)$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(3) $y=u^4, u=1-v^{\frac{1}{2}}, v=1-x^2$,定义域是$[-1,1]$.

**注** 函数分解原则:由内到外,逐层分解;或由外向内,逐层分解.这要视具体情况采取不同方法.

**例 5** 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2\leqslant x<0 \\ 2 & x=0 \\ 1+x & 0<x\leqslant 3 \end{cases}$,(1)求定义域;(2)求 $f(-2), f(-1), f(0)$, $f(1)$的值.

**解** (1) 定义域为$[-2,0)\cup\{0\}\cup(0,3]=[-2,3]$.

(2) 因为$-2\in[-2,0)$,所以选用表达式 $f(x)=x^2$ 求 $f(-2)$,即 $f(-2)=(-2)^2=4$.
因为 $0\in\{0\}$,而与之相对应的函数表达式为 $f(x)=2$,所以 $f(0)=2$.
因为$-1\in[-2,0]$,而与之相对应的函数表达式为 $f(x)=x^2$,所以 $f(-1)=(-1)^2=1$.
又因为 $1\in(0,3]$,而与之相对应的函数表达式为 $f(x)=1+x$,所以 $f(1)=1+1=2$.

**注** 自变量的取值范围叫做函数的定义域.由于许多读者对分段函数不太熟悉,对这种函数定义域的求解比较陌生,因此理解函数定义域的概念是关键.

**例 6** 在下列各题中,判定所给函数是否表示同一个函数(要求简要说明理由).

(1) $f(x)=\sqrt{x^2},\ g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(2) $f(x)=\lg(x^2-6x+9), g(t)=2\lg|t-3|$;

(3) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$;

(4) $f(x)=\sin(\arcsin x), g(x)=\arcsin(\sin x)$;

(5) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}, g(x)=\lg(1+x)-\lg(1-x)$.

**解** (1) 不同,定义域不同,因为 $f(x)$的定义域为 $R$,而 $g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$.

(2) 相同.两函数的定义域相同;对应关系也相同.

(3) 相同.两函数的定义域相同;对应关系相同.

(4) 不同.定义域不同,因为 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$,而 $g(x)$中的定义域为 $R$.

(5) 相同.两函数的定义域都是$\{x|-1<x<1\}$,对应关系相同.

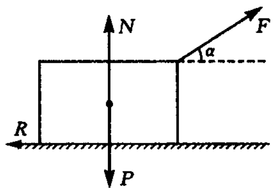

图 1-1

**例 7** 已知一物体与地面的摩擦系数是 $\mu$,重量是 $P$,设有一与水平方向成 $\alpha$ 角的拉力 $F$,使物体从静止开始移动(如图 1-1),求物体开始移动时拉力 $F$ 与角 $\alpha$ 之间的关系式.

**分析** 力的分析如图 1-2 所示,而 $F_x=F\cos\alpha, F_y=F\sin\alpha$,由力的平衡条件得

$$\begin{cases} F_x-R=0 \\ F_y+N-P=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x=R=\mu N \\ N=P-F_y \end{cases}$$

将 $F_x=F\cos\alpha, F_y=F\sin\alpha$ 及 $N=P-F_y$ 代入 $F_x=\mu N$ 即得结论.

**解** 力的分析如图 1-2 所示,则有

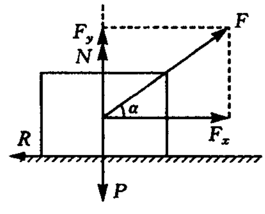

图 1-2

$$\begin{cases}F\cos\alpha - R = 0\\ F\sin\alpha + N - P = 0\\ R = \mu N\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F\cos\alpha = R\\ N = P - F\sin\alpha\\ R = \mu N\end{cases}$$

所以
$$F\cos\alpha = \mu(P - F\sin\alpha)$$
$$F = \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

## 第三节　习题解答

### 习题 1-1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$是否相同?为什么?在哪一区间内它们是相同的?

(1) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x, \varphi(x)=1$;　　(2) $f(x)=\lg x^2, \varphi(x)=2\lg x$;

(3) $f(x)=x, \varphi(x)=(\sqrt{x})^2$;　　(4) $f(x)=x, \varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

**解**　(1) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由三角函数定义知道无论 $x$ 取什么值,$f(x)\equiv1$;函数 $\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由函数的定义知道无论 $x$ 取什么值,$\varphi(x)\equiv1$,由此可知,函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$的定义域相同,对应法则也相同,所以函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$相同.

(2) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,函数 $\varphi(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,因为函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$的定义域不同,所以函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$不相同.

在$(0,+\infty)$内,由对数的运算性质,$f(x)=\lg x^2=2\lg x=\varphi(x)$,因此,在$(0,+\infty)$内,函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$相同.

(3) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数 $\varphi(x)$的定义域为$[0,+\infty)$,因为函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$的定义域不同,所以函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$不相同.

在$[0,+\infty)$上,由根式的运算性质,$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2=x=f(x)$,因此,在$[0,+\infty)$上,函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$相同.

(4) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数 $\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由根式的运算性质,$\varphi(x)\equiv x$.由此可知,函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$的定义域相同,对应法则也相同,所以函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$相同.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arccos\frac{2x-3}{3}$;　　(2) $y=\sqrt{25-x^2}$;　　(3) $y=\sqrt{x^2-16}$;

(4) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(5) $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$;　　(6) $y=\frac{1}{\lg(2-x)}$.

**解**　(1) 因为关系式中含有反余弦,要使函数有意义,由反余弦的定义知: $\left|\frac{2x-3}{3}\right|\leqslant1$,解这个不等式,得 $0\leqslant x\leqslant3$,所以函数的定义域为$[0,3]$.

(2) 因为关系式中含有偶次根式,要使函数有意义,须满足:$25-x^2\geqslant0$,解这个不等式,得 $-5\leqslant x\leqslant5$,所以函数的定义域为$[-5,5]$.

(3) 因为关系式中含有偶次根式,要使函数有意义,须满足:$x^2-16\geqslant0$,解这个不等式,得 $x\geqslant4$ 或 $x\leqslant-4$,所以函数的定义域为$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

(4) 因为关系式中既含有分式又含有偶次根式,要使函数有意义,须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq0\\ x+2\geqslant0\end{cases}$$

解这个不等式组,得 $x\geqslant-2$ 但 $x\neq\pm1$,所以函数的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(5) 因为关系式中既含有分式又含有偶次根式，而偶次根式又在分母上，要使函数有意义，须满足：$9-x^2>0$，解这个不等式，得 $-3<x<3$，所以函数的定义域为 $(-3,3)$.

(6) 因为关系式中既含有分式又含有对数式，要使函数有意义，须满足

$$\begin{cases}\lg(2-x)\neq 0\\ 2-x>0\end{cases}$$

解这个不等式组，得 $x<2$ 但 $x\neq 1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{9+x^2}$，求下列函数值：$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$，$f(x_0+h)$.

**解** $f(0)=\sqrt{9+0^2}=3$

$f(1)=\sqrt{9+1^2}=\sqrt{10}$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{9+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{9a^2+1}{a^2}}=\frac{\sqrt{9a^2+1}}{|a|}$

$f(x_0+h)=\sqrt{9+(x_0+h)^2}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$，求：(1)定义域；(2)计算 $f(0)$，$f(1)$.

**解** (1) 由函数表达式知：函数的定义域为 $(-2,2)$；

(2) $f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$；$f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$.

5. 已知 $F(x)=x^3+x\cos x$，证明：$F(-x)=-F(x)$.

**证明** 因为 $F(-x)=(-x)^3+(-x)\cos(-x)=-x^3-x\cos x=-F(x)$，所以 $F(-x)=-F(x)$.

6. 已知 $\varphi(x)=\sin^2x-5x^2$，证明：$\varphi(-x)=\varphi(x)$.

**证明** 因为 $\varphi(-x)=\sin^2(-x)-5(-x)^2=\sin^2x-5x^2=\varphi(x)$，所以 $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

7. 若 $\varphi(x)=3\sin x-4\cos x$，证明：$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$.

**证明** 因为 $\varphi(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)-4\cos(x+2\pi)=3\sin x-4\cos x=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$.

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

**解** (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$，得 $x=y^3-1$，所以函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$，得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，所以函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

## 习题 1-2

1. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=e^{-x}-e^x$；　　(2) $y=x(x-1)(x+1)$；　　(3) $y=\tan x$；

(4) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　(5) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(6) $y=f(x)-f(-x)$.

**解** (1) 由于 $y(-x)=e^{-(-x)}-e^{-x}=e^x-e^{-x}=-(e^{-x}-e^x)=-y(x)$，所以函数是奇函数.

(2) 由于 $y(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-y(x)$，所以函数是奇函数.

(3) 由于 $y(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-y(x)$，所以函数是奇函数.

(4) 由于 $y(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=y(x)$，所以函数是偶函数.

(5) 由于 $y(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=y(x)$，所以函数是偶函数.

(6) 由于 $y(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-y(x)$，所以函数是奇函数.

2. 函数 $y=\sin 3x$ 的周期是多少？

**解** 因为函数 $y=\sin x$ 的周期是 $2\pi$，所以有 $y=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$，即有

$$\sin 3x=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

所以函数 $y=\sin 3x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$.

3. 判断下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\tan x,\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；　　(2) $y=2^x,(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=2^{-x},(-\infty,+\infty)$；　　(4) $y=1-3x^3,(-\infty,+\infty)$.

**解** (1) 设 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，则 $-\frac{\pi}{2}<x_1-x_2<0$

$$\tan x_1-\tan x_2=\frac{\sin x_1\cos x_2-\cos x_1\sin x_2}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\cos x_1\cos x_2}<0$$

所以函数 $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.

(2) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，又 $2^{x_1}>0,2^{x_2}>0$，因此

$$\frac{2^{x_1}}{2^{x_2}}=2^{x_1-x_2}<1$$

所以函数 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，又 $2^{-x_1}>0$，$2^{-x_2}>0$，因此

$$\frac{2^{-x_1}}{2^{-x_2}}=2^{-(x_1-x_2)}>1$$

所以函数 $y=2^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减.

(4) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，则

$$1-3x_1^3-(1-3x_2^3)=3(x_2^3-x_1^3)=3(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$$

所以函数 $y=1-3x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，如果 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，试证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

**证明** 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则有 $-x_1>-x_2$，因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以有

$$f(x_1)=-f(-x_1),f(x_2)=-f(-x_2)$$

又 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，因此有 $f(-x_1)>f(-x_2)$，即 $f(-x_2)-f(-x_1)<0$，所以

$$f(x_1)-f(x_2)=f(-x_2)-f(-x_1)<0$$

所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

## 习题 1-3

1. 写出下列函数是怎样复合而成的.

(1) $y=(1+x)^{20}$；　　(2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$；　　(3) $y=2^{\sin^2 x}$；

(4) $y=\log_a \sin e^{x+1}$；　　(5) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$；　　(6) $y=\arctan\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$.

**解** (1) $y=(1+x)^{20}$ 是由 $y=u^{20}$ 和 $u=1+x$ 复合而成的；

(2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{w}$ 和 $w=1-x^2$ 复合而成的；

(3) $y=2^{\sin^2 x}$ 是由 $y=2^u$，$u=v^2$ 和 $v=\sin x$ 复合而成的；

(4) $y=\log_a \sin e^{x+1}$ 是由 $y=\log_a u$，$u=\sin v$，$v=e^w$ 和 $w=x+1$ 复合而成的；

(5) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$ 是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln w$ 和 $w=x^2-1$ 复合而成的；

(6) $y=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$是由 $y=\arctan u$, $u=\sqrt[3]{v}$和 $v=\dfrac{x-1}{2}$复合而成的.

2. 证明:(1) $\mathrm{ch}(\alpha+\beta)=\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta+\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$;　　(2) $\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$.

**证明**　(1)
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta+\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta&=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\\&=\frac{e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}+e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta}}{4}+\frac{e^{\alpha+\beta}-e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta}}{4}\\&=\frac{e^{\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta}}{2}=\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{ch}(\alpha+\beta)=\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta+\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$$

(2)
$$\begin{aligned}2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}&=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\\&=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y\end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$$

3. 已知水渠的横断面为等腰梯形. 斜角 $\varphi=40^\circ$(如图 1-3),当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值$S_0$ 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$与水深 $h$ 之间的函数关系式,并说明定义域.

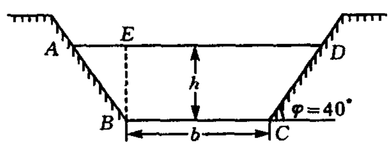

图 1-3

**解**　由 $B$ 作$AD$ 的垂线,垂足为 $E$,则由等腰三角形的性质有

$$AB=CD,\ \varphi=\angle BAE=40^\circ,\ AB=\frac{h}{\sin40^\circ},\ AE=h\cot40^\circ$$

又因为

$$S_0=\frac{1}{2}(BC+AD)h=\frac{1}{2}(b+b+2h\cot40^\circ)h=h(b+h\cot40^\circ)$$

即
$$S_0=h(b+h\cot40^\circ)$$

由此可得
$$BC=b=\frac{S_0}{h}-h\cot40^\circ$$

所以
$$L=AB+BC+CD=\frac{2h}{\sin40^\circ}-h\cot40^\circ+\frac{S_0}{h}\qquad(0<h<\sqrt{S_0\tan40^\circ})$$

# 第四节　单元测试题解答

## 一、填空题(每空 4 分,共 20 分)

1. 设函数 $f(x)=|1+x|+\dfrac{15(x+1)}{|2x-7|}$,则 $f(-4)=$ __0__.

**解**　$f(-4)=|1+(-4)|+\dfrac{15(-4+1)}{|2(-4)-7|}=0$

2. 设函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$,则定义域为:$\underline{\{x\mid-1\leqslant x\leqslant3,x\in R\}}$.

**解**　由函数的定义域得 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant1$,解得 $-1\leqslant x\leqslant3$,所以定义域为$\{x\mid-1\leqslant x\leqslant3,x\in R\}$.

3. 设 $f(x)=2-\lg(x+2)$,则 $f^{-1}(x)=\underline{10^{2-x}-2}$.

**解**　设 $y=f(x)$,由已知得 $\lg(x+2)=2-y$,根据对数的定义得 $x+2=10^{2-y}$,即　$x=10^{2-y}-2$,所以已知函数的反函数为

$$f^{-1}(x)=10^{2-x}-2$$

4. 设 $f(x-1)=x^2(x-1)$，则 $f(x)=\underline{(x+1)^2x}$.

**解** 设 $X=x-1$，则 $x=X+1$ 代入已知条件得 $f(X)=(X+1)^2X$，即

$$f(x)=(x+1)^2x$$

5. 设 $y=\cos 3x$，则它的周期 $T=\underline{\frac{2\pi}{3}}$.

**解** 由于 $\cos x$ 的周期是 $2\pi$，$\cos\omega x$ 的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\cos 3x$ 的周期是$\frac{2\pi}{3}$.

## 二、单项选择题(每题 4 分，共 20 分)

1. 设函数 $f(x)=\sin x^2$，且 $\varphi(x)=x^2+1$，则 $f[\varphi(x)]=$ [(A)]

(A) $\sin(x^2+1)^2$； (B) $\sin^2(x^2+1)$；

(C) $\sin(x^2+1)$； (D) $\sin^2x^2+1$.

**解** 由于 $f[\varphi(x)]=f(x^2+1)=\sin(x^2+1)^2$，故选(A).

2. 下列函数中是偶函数的有 [(D)]

(A) $f(x)=\frac{|x|}{x}$； (B) $f(x)=x^2\sin x$；

(C) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$； (D) $f(x)=x\sin x$.

**解** (A) 由于 $f(-x)=\frac{|-x|}{-x}=-\frac{|x|}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数.

(B) 由于 $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数.

(C) $f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}=-\frac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数.

(D) $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x$，所以 $f(x)$是偶函数.

故选(D).

3. 设 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，则 $f(x+a)+f(x-a)(0<a<1)$的定义域为 [(D)]

(A) $[a-1,a+1]$； (B) $[-a-1,-a+1]$；

(C) $[1-a,a-1]$； (D) $[a-1,1-a]$.

**解** $f(x+a)$的定义域由 $-1\leqslant x+a\leqslant 1$ 得 $-a-1\leqslant x\leqslant -a+1$，即$[-a-1,-a+1]$. 同理可得 $f(x-a)$的定义域为$[a-1,a+1]$，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[-a-1,-a+1]$和$[a-1,a+1]$的交集$[a-1,1-a]$. 故选(D).

4. 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形在同一个直角坐标系下对称于直线 [(C)]

(A) $y=0$； (B) $x=0$； (C) $y=x$； (D) $y=-x$.

**解** 略.

5. 已知函数 $f(x)$满足关系式 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$，则 $f(x)=$ [(D)]

(A) $x$； (B) $\frac{1}{x}$； (C) $x-\frac{1}{x}$； (D) $x+\frac{1}{x}$.

**解** 只有 D 满足关系式 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$，故选(D).

## 三、计算题(每小题 5 分，共 35 分)

1. 求函数 $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$的定义域.

**解** 由 $\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$，得$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即 $x^2-5x+4\leqslant 0$. 解得 $1\leqslant x\leqslant 4$.
所以，函数的定义域为$\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$.

2. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0),f(2),f(-x),f(x+1)$.

**解** $f(0)=0^2-3\cdot0+2=2$；同理

$$f(2)=0$$

$$f(-x)=x^2+3x+2$$

$$f(x+1)=x^2-x$$

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)],f\{f[f(x)]\}$.

**解** $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$，$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x}$

4. 写出函数 $y=\lg^2\arccos x^3$ 的复合关系.

**解** 函数由 $y=u^2,u=\lg v,v=\arccos t$ 和 $t=s^3$ 复合而成.

5. 如果 $y=\sqrt{u},u=2+v^2,v=\cos x$，将 $y$ 表示成 $x$ 的函数.

**解** $y=\sqrt{2+\cos^2x}$

6. 判断函数 $y=1-3x^2$ 的单调性.

**解** 当 $x_1<x_2<0$ 时，$y_2-y_1=-3(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$，所以，函数在区间 $(-\infty,0]$ 内为单调递增函数.

当 $0<x_1<x_2$ 时，$y_2-y_1=-3(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$，所以，函数在区间 $[0,+\infty)$ 内为单调递减函数.

7. 判断函数 $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

**解** 因为

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以函数为奇函数.

## 四、应用题(每小题 5 分，共 35 分)

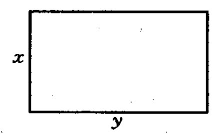


图 1-4

1. 设一矩形面积为 $A$，试将周长 $S$ 表示为宽 $x$ 的函数，并求其定义域.

**解** 设矩形的长为 $y$(如图 1-4)，则由题意得：矩形面积 $A=xy$，周长 $S=2x+2y$. 于是 $y=\dfrac{A}{x}$，代入周长公式，得

$$S=2x+2\cdot\frac{A}{x}=2\left(x+\frac{A}{x}\right)\quad(x>0)$$

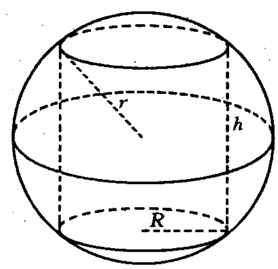


图 1-5

2. 在半径为 $r$ 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定其定义域.

**解** 设圆柱高为 $h$，圆柱底面半径为 $R$(如图 1-5)，则圆柱底面半径

$$R=\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-h^2}$$

所以，圆柱的体积

$$V=h\pi R^2=\frac{\pi}{4}h(4r^2-h^2)\quad(0<h<2r)$$

3. 用铁皮做一个容积为 $V$ 的圆柱形储油筒，试将它的全面积表示成底半径的函数，并确定其定义域.

**解** 设圆柱底面半径为 $r$，高为 $h$(如图 1-6)，由 $V=h\pi r^2$ 得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，则圆柱形储油筒全面积

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2\quad(r>0)$$

4. 拟建一个容积为 $V$ 的长方体游泳池，设它的底为正方形，如果池底所用材料单位面积造价是四周单位面积造价的 2 倍，试将总造价表示成底边长的函数，并确定此函数的定义域.

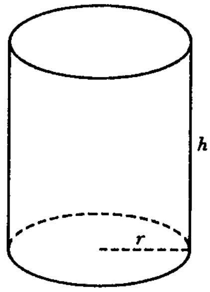


图 1-6

**解** 设底面边长为 $x$，高为 $h$，单位面积造价为 $a$（如图 1-7），则由题意有

$$V=x^2h$$

于是，高为

$$h=\frac{V}{x^2}$$

总造价为

$$f(x)=(4xh+2x^2)a=2a\left(\frac{2V}{x}+x^2\right)\quad(x>0)$$

5. 求如图 1-8 所示的锯齿形波的函数关系.

**解** 当 $x\in(-T,T]$ 时函数为 $y=|x|$，将 $x\in(-T,T]$ 时函数 $y=|x|$ 的图象向右平移 $2T$ 个单位，即可得其函数为

$$y=|x-2T|\quad x\in(T,3T]$$

把 $x\in(-T,T]$ 时函数 $y=|x|$ 的图象向左平移 $2T$ 个单位，即可得其函数为

$$y=|x+2T|\quad x\in(-3T,-T]$$

综上所述，可得如图锯齿形波的函数关系为

$$y=|x-2kT|\quad x\in(-T+2kT,T+2kT]，k\ 取整数$$

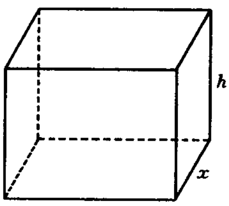


图 1-7

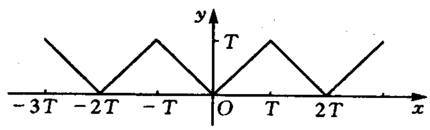


图 1-8