高中数学基本知识

GAOZHONG SHUXUE JIBEN ZHISHI

池伯鼎编

（修訂本）

福建人民教育出版社

高中数学基本知識
（修訂本）
池伯鼎编
*
福建人民教育出版社出版
（福州城守前7号）
福建省书刊出版业营业許可証出字第002号
福建新华印刷厂印刷　福建省新华书店发行
*
开本787×1092 1/32　印張4 9/16　字数100,000
1960年5月福州第一版第一次印刷
1961年12月福州第二版　1961年12月第一次印刷
印数：1—35,500册
統一书号：7159·145
定　价：(5)0.30元

說　明

为了便于高中学生对数学科进行系統复习，达到加深理解和加强巩固記忆，切实提高知識质量的目的，本书根据当前情况，在原版的基础上作了一些补充与修改。

本书內容主要包括两个部分：第一部分是将高中数学科（包括代数、三角、平面几何、立体几何）中最基本的概念、定理和公式等知識編成簡明的系統，并多采用图表說明，富有启发性，便于进行系統的掌握和記忆；第二部分是搜集高中学生在数学科的学习中最基本的和容易产生歧解和錯誤的练习題，通过这些基本练习，可以检查自己对数学基本知識的掌握和熟练程度；后面附有答案和提示，指出解題的思路，关鍵所在或应注意的事項，以供同学們在解題中遇到困难时作为参考，从而糾正錯誤，掌握正确的解題方法。本书末还附有 1949 年至 1961年高等学校招生数学試題，以供同学們在复习时作为参考。

凡文中标有 * 号者为次要材料。

由于修訂的时間較为匆促，又限于我們的水平，书中还可能存在許多缺点，希望教师和同学們，多多提出意見，以供再次修訂时参考。

目　　录

第一部分　基本知識

第二部分　基本練习題

（一）題　目

（二）答案与提示

附：

第一部分　基本知識

一、代　数

1.絕对值与根式

Ⅰ.实数絕对值：当$a>0$，$|a|=a$；当$a=0$，$|a|=0$；当$a<0$，$|a|=-a$。

Ⅱ.算术根：$\sqrt{a^2}=|a|$．当$a>0$，n为正整数时$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$。

Ⅲ.最簡根式的条件：

（1）被开方数的指数和根指数是互质数；

（2）被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

（3）被开方数不含有分母。

Ⅳ.运算：

（1）加减：首先化为最簡根式，然后把同类根式合并；

（2）乘除：首先化为算术根，然后化为同次根式再乘除；

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ \sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)$$

（3）乘方与开方：$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$；$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$；

$$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y},$$

则$\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$ $(x>y)$。

2.指　　数

Ⅰ.定义：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{\text{共n个}}$，（式中n是正整数）；$a^0=1$，

$(a\neq 0)$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $(a\neq 0)$; $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $(a\geqslant 0)$.

Ⅱ.运算法则:

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(2) $(ab)^m=a^m\cdot b^m$;

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$.

3.对　　数

Ⅰ.定义：如果1以外的正数a的幂等于$N(a^x=N)$，那末幂指数叫做以a为底的N的对数。表示为：

$$\log_a N=x;\ a^{\log_a N}=N.$$

Ⅱ.性质:

(1)負数和零沒有对数;

(2) 1的对数是0;

(3)底数的对数是1;

(4)当底数大于1时，較大的眞数，它的对数也較大;

(5)正整数或正的带有小数的眞数，其对数的首数等于眞数的整数部分的位数减去1的一个整数（常用对数）;

(6)正的純小数，其对数的首数是絕对值等于眞数里第一个有效数字前面的零的个数（其中包括整数单位的一个零）的一个負整数（常用对数）.

Ⅲ.基本定理:

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

(3) $\log_a M^N=N\cdot\log_a M$（N是分数，那就是方根的对数）;

(4) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$（換底公式）.

4.函　　数

Ⅰ.定义：若对于自变量x的任何一个确定的值（在允許値所取的数的集合內），变量y有确定的値和它对应，那末变量y就叫做自变量x的函数．（表示为：$y=f(x)$）

Ⅱ.代数函数：

（1）一次函数：

(a)$y=kx$ 过原点的直綫，斜率$=k$，（当$k\neq0$时，x与y成正比例）；

(b)$y=kx+b$ 是一条直綫，在y軸上的截距$=b$，斜率$=k$。

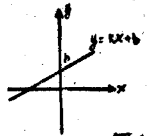


图1

（二元一次方程$ax+by+c=0$，其中a、b至少有一个不等0，也是一条直綫，斜率$=-\frac{a}{b}$）

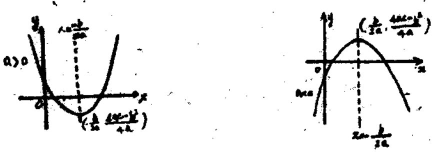
（2）二次函数：

(a)$y=ax^2$ 頂点是原点的抛物綫，（当$a>0$抛物綫向上伸展，当$a<0$抛物綫向下伸展）

(b)$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是抛物綫，（当$a>0$则它向上伸展，当$a<0$则向下伸展）

①对称轴$x=-\frac{b}{2a}$；②頂点（$-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a}$）；

③当$x=-\frac{b}{2a}$时，(i)若$a>0$，则y有极小值$=\frac{4ac-b^2}{4a}$）；



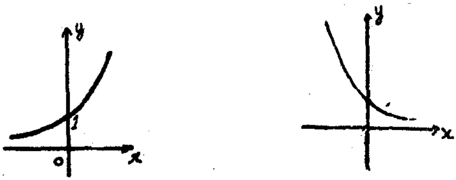
甲　　　　图2　　　　乙

(ii)若$a<0$，则y有极大值$=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

④描图：先求出对称轴$x=-\frac{b}{2a}$，然后求出$x_1=-\frac{b}{2a}$时对应的y_1值（即顶点坐标），再选x_1的邻近的横坐标（x_2、x_3、x_4……）求对应的y值，再应用轴对称描图。

Ⅱ.初等超越函数：

（1）指数函数：$y=a^x(a>0)$。



甲　　图3　　乙

性质：a)$a^x>0$；b)当$x=0$，$y=1$；当$x=1$，$y=a$；c)$a>1$，递增函数（图3乙）；$0<a<1$，递减函数（图3甲）。

（2）对数函数：$y=\log_a x$（$x>0$，$a>0$且$a\neq1$）。

甲　　图4　　乙

性质：a)当$x=1$，$y=0$；当$x=a$，$y=1$；b)$a>1$为递增函数（图4甲）；$0<a<1$为递减函数（图4乙）。

5.数　列

Ⅰ.等差数列 (1)通项$l_n=a+(n-1)d$;(2)和$S_n=\frac{(a+l_n)}{2}n$.

Ⅱ.等比数列 (1)通项$l_n=aq^{n-1}$; (2)和$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$

$=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$. $(q\neq1)$

$A_n=A(1+x)^n$ A为原产量，A_n是n年后的产量，x为增产率(x为負値是減产率)

Ⅲ.无穷递縮等比数列和 $S=\frac{a}{1-q}$. (式中$|q|<1$)

6.极　限

Ⅰ.数列极限定义：有无限数列a_n，如果对預先給定的任意小正数ε，能求得一个自然数N，使对于一切的$n>N$都有$|a_n-A|<\varepsilon$，則数列a_n的极限是常量A.表示为：$\lim a_n=A$.

Ⅱ.定理：

(1)如果一个数列有极限，則此极限是唯一的.

(2)如果一个递增数列或者递减数列是有界数列，那末这个数列必定有一个极限.

(3)$\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y$.

(4)$\lim(x\cdot y)=\lim x\cdot\lim y$.

(5)$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}$. (其中$\lim y\neq0$)

7.排列与組合

Ⅰ.公式：排列：$A_m^n=\overbrace{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}^{\text{共n个}}$

$=\frac{m!}{(m-n)!}$; 全排列$P_m=m!$.

組合：$C_m^n=\frac{A_m^n}{n!}=\frac{m!}{(m-n)!n!}$.

Ⅰ.排列与組合关系：从m个元素中，每次取出n个元素，組合数的每一个均对应排列数n! 个，即 $A_m^n = C_m^n \cdot n!$。

Ⅱ.組合性质：

(1) $C_m^n = C_m^{m-n}$；

(2) $C_{m+1}^n = C_m^n + C_m^{n-1}$；

(3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$；

(4) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots\cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots\cdots$。

($C_n^0 = 1$，$0! = 1$)

8.数学归納法与二項式定理

(一) 数学归納法

証明某一个論断对于从某一个自然数起任意的自然数n都是正确的，所用的步驟是：

(1) 証明当n取第一个值 (例如n=1，或者n=2等等) 的时候，这个論断是正确的；

(2) 假設当n=k的时候 (k是一个自然数)，这个論断是正确的，証明当n=k+1的时候，这个論断也是正确的。

(二) 二項式定理

Ⅰ.預理：$(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+k) = x^m + \Sigma a \cdot x^{m-1} + \Sigma ab \cdot x^{m-2} + \cdots\cdots + ab\cdots\cdots k$。

Ⅱ.定理：

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \cdots\cdots + C_m^k a^k x^{m-k} + \cdots\cdots + C_m^m a^m.$$

Ⅱ.性质：

(1)指数：x的指数由m降幂到0，而a的指数由0升幂到m，各项x、a指数和为m。

(2)项数：共m+1项。

(3)通项$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$。(第k+1项)

(4)系数：

(a)离两端等距项系数相等；$C_m^n=C_m^{m-n}$；

(b)$\dfrac{\text{前项的系数}\times\text{前项x的指数}}{\text{前项的项数}}$=后项的系数；

(c)系数最大的项是中项（当m=2k，中项是k+1项，当m=2k-1，中项是k和k+1两项）；

(d)系数和为2^n；

(e)偶项系数和=奇项系数和=2^{n-1}。

9.复　数

Ⅰ.定义：$i^2=-1$，$i=\sqrt{-1}$；$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$。$(a>0)$

Ⅱ.基本概念：a+bi（式中a、b均为实数）是复数。

(1)b=0是实数；

(2)b≠0则是虚数；

(3)b≠0，a=0则是純虚数。

复数相等：若a+bi=c+di(a、b、c、d均为实数)，则a=c，b=d。

复数等于零：a+bi=0（式中a、b为实数），则a=0，b=0。

Ⅲ.三角函数表示法：$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。〔r是模（复数的絕对值），θ是幅角〕

$$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{b}{a},\ \theta_1=\mathrm{arc\ tg}\frac{b}{a},$$

$$\theta_2=\mathrm{arc\ tg}\frac{b}{a}+180°.$$

取θ_1或θ_2决定于向量所在的象限，而θ的主值：

$0°\leq\theta<360°$.

Ⅳ.运算：

(1)加、减、乘、除、乘方、开方与实数运算法则基本一致。($i^{4n+k}=i^k$，其中n、k均为整数.当$a<0$，$b<0$时，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$.)

(2)用三角函数式进行乘、除、乘方、开方.

(a) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

(b) $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

(c) $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

(棣美弗定理)

(d) $\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)$ [k取0,1,……(n-1)共n个值].

10. 不等式

Ⅰ.等与不等：若$a-b$是正数，则$a>b$；若$a-b$是负数，则$a<b$；若$a-b$是0，则$a=b$.反之：若$a>b$,则$a-b$是正的；若$a<b$，则$a-b$是负的；若$a=b$，则$a-b=0$.

Ⅱ.基本性质：

(1)若$a>b$，则$b<a$；

(2)若$a>b$，$b>c$，则$a>c$；

(3)若$a>b$，则$a+c>b+c$；

(4)若$a>b$，①当$c>0$时，则$ac>bc$；②当$c<0$时，则$ac<bc$。

Ⅲ.基本定理：

(1)加：（同向） 若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$；

(2)减：（异向） 若$a>b$，$c<d$，则$a-c>b-d$；

(3)乘：（同向且均为正数） 若$a>b$，$c>d$，则$ac>bd$；

(4)除：（异向且均为正数）若$a>b$，$c<d$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；

(5)乘方：（a、b为正数，n为大于1的整数） 若$a>b$，则 $a^n>b^n$；

(6)开方：（a、b为正数，n为大于1的整数） 若$a>b$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$；

(7)若$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，则$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

(8)a、b为实数，则$a^2+b^2\geqslant 2ab$；

*(9)若$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$；

或 $x>0$，$y>0$，$z>0$，则$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$。

Ⅳ.不等式同解定理：

(1) $f_1(x)>f_2(x)$与$f_1(x)+F(x)>f_2(x)+F(x)$〔$F(x)$是整式〕两式同解。

(2) $f_1(x)>f_2(x)$与$m\cdot f_1(x)>m\cdot f_2(x)$ ($m>0$)两式同解。

(3) $f_1(x)>f_2(x)$与$m\cdot f_1(x)<m\cdot f_2(x)$ ($m<0$)两式同解。

Ⅴ.解不等式：

(1) 一元一次不等式$ax>b$：a)当$a>0$时，则$x>\frac{b}{a}$；

b) 当$a<0$时，则$x<\frac{b}{a}$；c) 当$a=0$时，$\begin{cases} b<0 \text{则} x \text{为任何实数} \\ b\geqslant 0 \text{则无解.} \end{cases}$

(2) 一元一次不等式組（共同区間）：$a>b$

① $\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$则$x>a$； ② $\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$则$x<b$； ③ $\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$则无解；

④ $\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$则$b<x<a$.

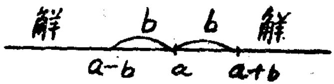


图5

(3) 絕对值不等式：

① $|x-a|>b$且$b>0$，则$x>a+b$或$x<a-b$（图5）；

② $|x-a|<b$且$b>0$，则$a-b<x<a+b$（图6）.

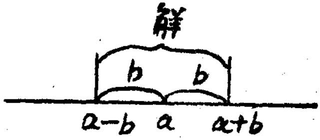


图6

(4) 一元二次不等式：$ax^2+bx+c>0$. $\triangle=b^2-4ac$，$f(x)=ax^2+bx+c$，

(a) $\triangle<0$〔$f(x)$与a同号〕，当$a>0$，x为任何实数；当$a<0$，则无解。

(b) $\triangle=0$〔$f(x)$除$x=-\frac{b}{2a}$以外都与a同号〕，当$a>0$，x为不等于$-\frac{b}{2a}$的任何实数；当$a<0$，则无解。

(c) $\triangle>0$ $f(x)$两根設为α、β（且$\alpha>\beta$），〔$f(x)$与a：$\frac{\text{同号}\ |\ \text{反号}\ |\ \text{同号}}{\beta\qquad\alpha}$〕当$a>0$，则$x>\alpha$或$x<\beta$；当$a<0$，则$\beta<x<\alpha$.

11. 方　程

Ⅰ. 同解定理：

(1) $f_1(x)=f_2(x)$与$f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$〔$F(x)$为整式〕两方程同解。