



荣德基

新 POX I 析 教材

探究开放创造性学习

高一数学

下

试验修订版

含教材课后习题答案

内蒙古少年儿童出版社

用科学的CETC差距理念策划创作



荣德基

析教材

探究开放创造性学习

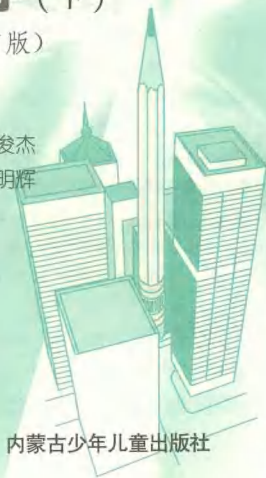
高一数学(下)

(试验修订版)

总主编:荣德基

本册主编:钱艳华 钱俊杰

赵翠利 李明辉



内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

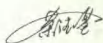
荣德基剖析教材.高一数学.下:探究开放创造性学习/荣德基主编.——通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.10

ISBN 7-5312-2119-5

I. 荣... II. 荣... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 107244 号

你的差距牵动着我的心



责任编辑/庆格乐图

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/北京泽明印刷有限责任公司

总 字 数/1744 千字

规 格/880×1230 毫米 1/16

总 印 张/57

版 次/2006 年 10 月第 1 版

印 次/2006 年 10 月第 1 次印刷

总 定 价/79.00 元(全 5 册)

版权声明/版权所有 翻印必究



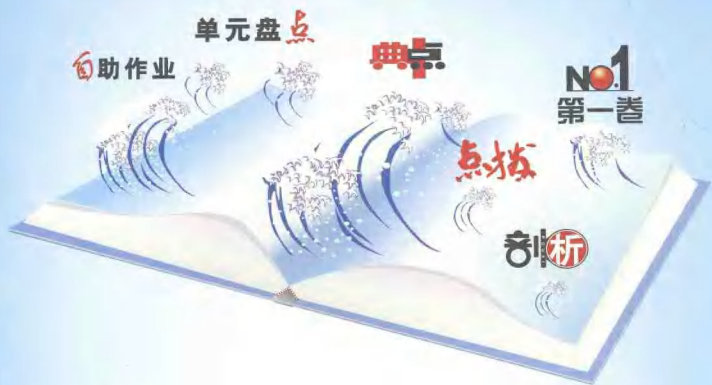
荣德

打造春天的事业 托起明天的太阳

听课堂内外的琅琅读书声，听纸面上笔尖流动的沙沙声！这是人类文化传承发展的音符，这是人类文明、社会发展、祖国振兴共舞的旋律。

因为这些声音，老师成为太阳底下最光辉的职业；因为这些声音，荣德基成为一株昂首挺胸、追求不止的向日葵。我们没有方方正正的黑板，没有盈握在手的粉笔，没有坐满学子的课堂。但我们和老师有着同样的奋斗目标——打造春天的事业，托起明天的太阳！

所以我们将滴滴心血融入到荣德教辅系列丛书中，以书培志，以书育人，以书养性，让智慧浸润大脑，让荣德成就辉煌，让荣德为您打造坚实的风帆！



在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；
采过一丛花，
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；
有过一个梦，
决定从这里启程……

感动自己是最重要的

——写给荣德教辅所有的读者朋友们

一个学生的名字震撼着一代人。

一个学生的精神感动着所有人。

这个名字就是——洪战辉。

这种精神就是——奋斗！

一个人自立、自强才是最重要的！

一个人通过自己的奋斗改变自己劣势的现状才是最重要的！

同一条求学的路，他走得分外坎坷，也格外坚强。当我们也走在同一条路上，心中是否有同样一个声音在激荡着脚步的节拍？是否有同样的信念鞭策着绷紧的每一根意志神经？

为什么我们会崇拜心目中的英雄？因为每个人心中都有一个英雄梦，当一个人把这个梦实现的时候，便成为了人们心目中的英雄。

为什么我们因为别人的故事而感动，而受到激励？因为我们有着同样的梦想，同样喜欢那种充满激情的生活，喜欢用自己的坚毅涂抹多彩的人生。

为什么我们不自己感动自己？我们同样有坎坷需要面对，有困难需要克服，有挑战需要迎接，而且可能我们还有着比洪战辉优异得多的条件。我们可以，当然可以。

当我们为自己的拼搏和奋斗感动着时，我们时刻都会有百分百的能量去走后面的每一步路。听别人的故事，可以激动一时，不可以感动一生。总会有一些时候，我们忙于自己的学业忘记了心底那份被激励起的激情。那么感动自己，只有感动自己的力量，是无时无刻不存在，是无穷无尽涌出来的，是可以支撑你用奋斗不息来贯穿生命始终的。

我们面对的是知识，是一个永远不能超越的对手，是一个永远开采不尽的矿源。它是丰富人生的色彩，是滋养人生的养料，当我们怀抱虔诚与渴望去追求它的时候，我们才会在这个过程中体会到成长、成熟和成功。而在这个过程中，我们要踏着奋斗和拼搏走过每一步求知的路。

所以，在2006年，在你翻开这本书后，请让我们一起用奋斗来捍卫自己的理想，用拼搏来装扮自己的人生！

《剖析》丛书编委会

2006年3月

震撼学生心灵的学习方法

◆ 撬动灵感的杠杆——荣丽基老师创造CETC学习法灵感的由来

创造从学习开始。1997年两本书叫醒了荣老师沉睡的灵感神经，点亮了CETC循环学习法的灵魂之光。她们是《在北大等你》（光明日报出版社出版）和《等你在清华》（中国检察出版社出版）。

书中考入清华和北大的文、理科高考状元及优秀学生，用自己的切身经历，介绍了他们高效率的复习方式和独特的高考心态平衡法。摘录如下：

1. “我习惯于把每次测验中出现的错误记录下来，

到下一次考试前翻过来看看，这样就不会重犯过去的错误。”

（熊远蔚，1996年广西文科高考第一名 北京大学经济学院）

2. “题不二错，我们班同学大都有一个错题本，

通过分析错题，可以明白自己的弱点，更好地查漏补缺。同学们不妨一试。”

（段楠，1995年北京文科高考第一名 北京大学经济学院）

3. “到高考要记，重视一道错题比你做一百道习题也许更为重要。”

（张鼎，1996年河北省文科高考第三名 北京大学法律系）

4. “我高中三年的单元考和期末考试卷子以及高三的各种试卷基本上都保存着，在最后关头把它们拿出来看看，主要是看其中的错题，分析一下错误原因，对症下药，使我加深了印象，不至于再犯相同的错误。”

（徐海燕，1995年四川省理科高考第三名 北京大学生命科学学院）

7. “要重视自己的学习方法，在學習中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，

方法好的可能比优秀很多。这些我只提供一个比较实用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果平时错题出错很多，比如一做练习卷要错五、六处或更多。抄错题恐怕来不及，这时你可以在试卷上用红圈做上标记，在题目的旁边写上评语，然后把试卷保存好。每过一段时间，就把“错题笔记”或标记错题的试卷拿出来看一看，好处会很大。在准备考卷时，也注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有新发现了。不必费那个事一说。”

（魏少岩，1996年平时成绩优秀保送清华）

◆ 荣老师规律总结：

如何对待错误？考上清华、北大的同学们，都有一个错题记录本，关注做错的题，花精力复习做错的题！

◆ CETC的灵魂——差距

C—comprehension：听老师讲课，读教材，看教辅，不懂的地方——差距。（为什么不懂，有差距）

E—exercise：做练习题的错题——差距。（练习时为什么做错题，有差距）

T—test：各种考试中做错的题——差距。（考试时为什么做错题，有差距）

C—countermeasure：应对措施——消灭差距的方式方法。（再次做题时，保证题不二错）

锁定差距：C、E、T

缩小差距与消灭差距：C

CETC：锁定差距——缩小差距——消灭差距（这是CETC的目标和核心）

荣德基CETC循环学习法：CETC不停地循环——循环——再循环，差距在循环中锁定，在循环中缩小，在循环中消灭。

5. “我建议同学们能建立一个‘错题记录’，仔细分析原因，提出相应的知识点加以巩固强化，这样能避免重复犯同样的错误。”

（尹华，1997年山东省理工科高考第一名 清华大学化学系）

6. “一个很有效的方法就是做完题后写总结，感想，尤其是对那些想了半天没做出来的或者会做做错的题目为重。要把自己为什么不会做

或者为什么做错的原因记下来，这样才会有真正的收获。做题的意义也在于此。我日记就一直是在写题的，如题你都要做过的习题集或试卷，就会发现到处都是用红笔写的批注，我从中收获极大。”

（熊志忠，1997年保送清华大学经济管理学院 1997年北京理工科高考第七名）



荣德教辅对教师和学生们的关爱

荣德教辅丛书编委会在认真用心地策划教辅的同时,更加注重对全国的教师和学生读者的跟踪服务和相互交流。为了保证您享受到相应服务,请务必在寄给读者服务部的信中详细注明您的通信地址、邮编和联系电话,我们将为每一位教师和学生建立个人跟踪服务档案,并提供以下多种特色增值服务,敬请参与。

服务一:读书建议奖

荣德基老师非常重视同学们在使用荣德教辅过程中总结的意见和建议,自2002年设立“读书建议奖”以来,已有许多读者获得了该项奖励。2006-2007学年,继续对具有建设性的建议给予奖励,奖项如下:

一等奖2名,奖金500元;二等奖5名,奖金200元;三等奖50名,荣德基主编图书《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任选三册;四等奖200名,荣德基主编图书《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任选一册。

欢迎教师 and 同学们积极对荣德教辅的各个方面提出意见,以便我们再版时采纳并修改,更好地为读者服务:

1. 你认为本书在实用性上(题量及知识覆盖面)、适用性上(符合学习习惯)、难易度上(难易程度等方面)如何改进?
2. 你认为本书结构体系在设计上有哪些值得改进的方面?
3. 在用过的教辅书中你认为哪些对你最有帮助(请指出书名、科目、年级、出版社),主要优点是什么?

活动截止时间:2007年5月30日(以当地邮戳为准)。

获奖名单于2007年6月30日在荣德网上公布,请注意上网查询,祝你好运!

服务二:“在线擂台”和“在线评估”

荣德网(www.rudder.com.cn)设有两个“金牌”栏目,一是“在线PK”,即同学们在网同上台竞技,看谁解题正确并且最快;二是“在线评估”即“成长标杆”,根据同学们网同上同步试题的测试结果,进行全国、各省、各地区的成绩成长排名,并剖析错题原因,弥补不足,消灭差距。还有学生、教师都很喜欢的“试卷交流”“课件交流”“网上答疑”等栏目。

服务三:“读好书!收好礼!”活动

为了奖励同时选用荣德教辅两个系列以上的读者,丛书编委会精心策划了“读好书!收好礼!”活动:

如果在当地荣德教辅销售书店一次性购买荣德基主编五个系列图书《~~教材~~》《~~同步~~》《~~原创~~》《自助作业》《单元盘点》中两个系列(注:1. 必须含《剖析》《单元盘点》或《自助作业》;2. 必须为同一年级用书;3. 同一系列不同学科)以上正版荣德教辅共九本者,请将购书小票(可以是复印件)、每本书的扉页(即读书第一页)和详细联系方式(地址、邮编、姓名、联系电话)一同寄回读者服务部,即可获赠《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任意一册(注明所要图书的年级、系列、版本、科目、上/下册)。

通讯地址:北京10007729信箱 读者服务部 收 邮编:100077

服务咨询电话:010-67528514 服务信箱:rdj688@sohu.com

邮购汇款地址:北京10007729信箱 裴立武 收 邮编:100077

邮购汇款查询:010-86991251

目 录

第四章 三角函数

全章综合剖析 1

第一节 角的概念的推广 1

I. 自主探究与发现 1

II. 教材内容剖析 1

III. 应用剖析 2

IV. 最新题型剖析 3

V. 三年高考真题剖析 4

VI. 过关测试题 4

第二节 弧度制 5

I. 自主探究与发现 5

II. 教材内容剖析 5

III. 应用剖析 6

IV. 最新题型剖析 7

V. 三年高考真题剖析 9

VI. 过关测试题 9

第三节 任意角的三角函数 10

I. 自主探究与发现 10

II. 教材内容剖析 10

III. 应用剖析 12

IV. 最新题型剖析 13

V. 三年高考真题剖析 14

VI. 过关测试题 14

第四节 同角三角函数的基本关系式 15

I. 自主探究与发现 15

II. 教材内容剖析 15

III. 应用剖析 16

IV. 最新题型剖析 17

V. 三年高考真题剖析 18

VI. 过关测试题 19

第五节 正弦、余弦的诱导公式 19

I. 自主探究与发现 19

II. 教材内容剖析 20

III. 应用剖析 21

IV. 最新题型剖析 22

V. 三年高考真题剖析 23

VI. 过关测试题 23

第六节 两角和与差的正弦、余弦、正切 24

I. 自主探究与发现 24

II. 教材内容剖析 24

III. 应用剖析 26

IV. 最新题型剖析 26

V. 三年高考真题剖析 27

VI. 过关测试题 28

第七节 二倍角的正弦、余弦、正切 28

I. 自主探究与发现 28

II. 教材内容剖析 28

III. 应用剖析 30

IV. 最新题型剖析 31

V. 三年高考真题剖析 32

VI. 过关测试题 32

第八节 正弦函数、余弦函数的图象和性质 33

I. 自主探究与发现 33

II. 教材内容剖析 33

III. 应用剖析 36

IV. 最新题型剖析 37

V. 三年高考真题剖析 37

VI. 过关测试题 38

第九节 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 39

I. 自主探究与发现 39

II. 教材内容剖析 39

III. 应用剖析 41

IV. 最新题型剖析 42

V. 三年高考真题剖析 43

VI. 过关测试题 43

第十节 正切函数的图象和性质 45

I. 自主探究与发现 45

II. 教材内容剖析 45

III. 应用剖析 46

IV. 最新题型剖析 47

V. 三年高考真题剖析 48

VI. 过关测试题 49

第十一节 已知三角函数值求角 50

I. 自主探究与发现 50

II. 教材内容剖析 50

III. 应用剖析 51

IV. 最新题型剖析 51

V. 三年高考真题剖析 52

VI. 过关测试题 53

全章总结 54

第四章检测卷 57

第二学期期中检测卷 60

第五章 平面向量

全章综合剖析 63

第一节 向量 63

I. 自主探究与发现 63

II. 教材内容剖析 63

III. 应用剖析 65

IV. 最新题型剖析 66

V. 三年高考真题剖析 67

VI. 过关测试题 67

第二节 向量的加法与减法 68

I. 自主探究与发现 68

II. 教材内容剖析 68

III. 应用剖析 69

IV. 最新题型剖析 70

V. 三年高考真题剖析 71

VI. 过关测试题 71

第三节 实数与向量的积 73

I. 自主探究与发现 73

II. 教材内容剖析 73

III. 应用剖析 74

IV. 最新题型剖析 75

V. 三年高考真题剖析 76

VI. 过关测试题 76

第四节 平面向量的坐标运算 77

I. 自主探究与发现 77

II. 教材内容剖析 77

III. 应用剖析 78

IV. 最新题型剖析 79

V. 三年高考真题剖析 80

VI. 过关测试题 80

第五节 线段的定比分点 81

I. 自主探究与发现 81

II. 教材内容剖析 81

III. 应用剖析 82

IV. 最新题型剖析 83

V. 三年高考真题剖析 84

VI. 过关测试题 84

第六节 平面向量的数量积及运算律 85

I. 自主探究与发现 85

II. 教材内容剖析 85

III. 应用剖析 87

IV. 最新题型剖析 88

V. 三年高考真题剖析 89

VI. 过关测试题 89

第七节 平面向量数量积的坐标表示 90

I. 自主探究与发现 90

II. 教材内容剖析 90

III. 应用剖析 90

IV. 最新题型剖析 91

V. 三年高考真题剖析 92

VI. 过关测试题 93

第八节 平 移 94

I. 自主探究与发现 94

II. 教材内容剖析 94

III. 应用剖析 95

IV. 最新题型剖析 96

V. 三年高考真题剖析 98

VI. 过关测试题 98

第九节 正弦定理、余弦定理 99

第十节 解斜三角形应用举例 99

I. 自主探究与发现 99

II. 教材内容剖析 99

III. 应用剖析 100

IV. 最新题型剖析 102

V. 三年高考真题剖析 103

VI. 过关测试题 104

全章总结 105

第五章检测卷 107

第二学期期末检测卷 110

参考答案及规律总结 113

附录 1: 教材练习题剖析 135

附录 2: 教材练习题剖析错题反思录 168

第四章 三角函数

全章综合剖析

1. 本章的主要内容: 本章的主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数、同角三角函数的基本关系式、诱导公式、两角和与差的三角函数、二倍角的三角函数, 以及三角函数的图象和性质和已知三角函数值求角等, 其中重点是任意角的三角函数概念、同角三角函数的基本关系式、诱导公式及和差角公式、正弦曲线的画法和正弦函数的性质。

2. 在学科中的地位和重要性: 三角函数是中学数学的重要内容之一, 它的基础是几何中的相似形和圆, 研究的方法主要是代数的研究方法, 因此, 三角函数已初步把代数 and 几何联系起来, 三角函数是指数函数、对数函数的后继内容, 同时, 它在高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中都

有着广泛的应用, 因此, 三角函数既是解决生产实际问题的工具, 又是进一步学习高等数学的基础。

3. 已学过的关联知识回顾: 初中角的概念及几种特殊角: 零度角、锐角、直角、钝角、平角、周角等的定义; 三角形按边、角两种不同标准下的分类; 在直角三角形中, 锐角的三角函数定义及同角三角函数值间的关系。

4. 学习注意事项: 学习本章知识应注意利用类比的思想, 把 $0^\circ \sim 360^\circ$ 角推广到任意角, 研究任意角的三角函数值; 还要注意运用数形结合的思想, 理解三角函数定义, 推导一系列三角公式; 尤其在三角函数图象和性质的学习中, 数形结合思想和类比思想起着举足轻重的作用, 在代数式与图形的变化中, 应仔细体会分析、探索、化归、类比、平移、伸缩等常用的推理方法。

第一节 角的概念的推广

A. 基础篇

I. 自主探究与发现

一、自主探究

1. 初中的角是怎么定义的?
2. 初中主要学习了哪些角?
3. 在生活中, 我们遇到过哪些角, 又该怎么表达呢?

二、剖析发现

1. 角可以看成是从一个点出发的两条射线所围成的图形。
2. 初中学习了零度角、锐角、直角、钝角、平角、周角。
3. 在现实生活中, 体操运动员做的“转体 720° ”, 时钟的时针旋转形成的角, 自行车前进时, 链条旋转形成的角等, 这些角各不相同, 为了更准确地表达出这些角, 我们需要把角的概念加以推广, 这就是本节要学习的内容。

II. 教材内容剖析

讲解点 1: 任意角的概念

讲解 (这是重点) 角是一个几何图形, 它的概念有两种: 初中学过的为角的静态定义; 而本节所学的由一条射线绕其端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形叫做角, 这是它的动态定义。从动态定义可以看到, 射线在旋转时有两个问题: 一个是旋转方向有两种: 逆时针旋转形成的角叫做正角, 顺时针旋转形成的角叫做负角; 另一个是旋转量的大小, 不作任何旋转形成零角, 不断旋转下去形成了任意大小的角, 这样, 从“方向”和“数量”两个方面将角进行了推广, 即出现了正角、负角和零角, 打破了 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的限制, 出现了任意角。

如图 4-1-1 中, 射线 OA 旋转到 OB 形成的角依次为 30° 、 -120° 、 480° 。

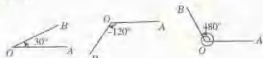


图 4-1-1

【例 1】若 $90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$, 则 $\alpha - \beta$ 的范围是 _____, $\alpha + \beta$ 的范围是 _____。

解: 因为 $90^\circ < \beta < 135^\circ$, 所以 $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ ①; $90^\circ < \beta < 135^\circ$ ②; $0^\circ < \alpha - \beta$ ③, 由 ①, ②, 得 $-135^\circ < -\beta < -90^\circ$ ④, 由 ①, ②, ④可得 $0^\circ < \alpha - \beta < 45^\circ$; 由 ①, ②, 得 $180^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$, 所以 $0^\circ < \alpha - \beta < 45^\circ$; $180^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$. 故分别填 $(0^\circ, 45^\circ)$, $(180^\circ, 270^\circ)$ 。

讲解点 2: 在给定角的范围的条件下, 求两角和、差的范围, 可利用不等式的性质, 在正角、零角、负角范围内进行求解。

讲解点 3: 象限角和轴线角。

讲解 (这是重点) 这两种角研究的前提条件是一致的, 即在直角坐标系中, 把角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 则角的终边 (除端点外) 在第几象限, 就说这个角是第几象限角, 若角的终边落在坐标轴上, 称这样的角为轴线角, 也就是说, 在共同的提条件下, 这两种角的判断只与角的终边有关, 而与旋转方向毫无联系。若角的顶点不与原点重合或始边不与 x 轴的非负半轴重合, 则角的终边即使落在象限内, 也不一定是象限角, 它也可能是轴线角, 所以, 判断之前应先看前提条件是否满足。

【例 2】设 $M = \{ \text{小于 } 90^\circ \text{ 的角} \}$, $N = \{ \text{第一象限的角} \}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. (锐角) B. (小于 90° 的角)
C. (第一象限的角) D. 以上都不对

解: 小于 90° 的角是由锐角、零角、负角组成, 而第一象限的角包含有锐角及其他终边在第一象限的角, 所以 $M \cap N$ 是由锐角和终边在第一象限的负角组成, 故 A、B、C 都不对, 应选 D。

讲解点 4: 小于 90° 的角不都是锐角; 它还包含有零角、负角, 只有小于 90° 的正角才是锐角, 要注意从现在开始角已经推广到了任意角。

讲解点 5: 终边相同的角

讲解 (这是难点) 看两个角的终边是否相同, 前提条件仍然是使角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{ \beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$, 即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和, 在这个集合中, 角 α 是任意角, 取任意整数 k , 可正可负也可以为零, $k \in \mathbb{Z}$ 这个条件不能丢, 从这个概念还可以看出, 相等的角终边一定相同, 而终边相同的角却未必相等, 终边相同的角有无数个, 它们相差 360° 的整数倍。

【例 3】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 4】判断一个绝对值较大的角 β 的终边所在的象限, 常转化为 $\beta = a + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 其中 $a \in [0^\circ, 360^\circ)$, 然后由 a 的终边判断 β 是第几象限角, 尤其需要注意的是 a 的任意性和 $k \in \mathbb{Z}$ 这个条件, 由本题还可看出, 终边相同的角不一定相等, 但相等的角终边一定相同, 终边相同的角有无数个, 它们相差 360° 的整数倍.

【例 4】终边与坐标轴重合的角 a 的集合是 ()

- A. $\{a | a = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 B. $\{a | a = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{a | a = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 D. $\{a | a = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

解: 终边在 x 轴上的角的集合 $M = \{a | a = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在 y 轴上的角的集合 $N = \{a | a = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在坐标轴上的角的集合 $S = M \cup N = \{a | a = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{a | a = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{a | a = 2k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{a | a = (2k+1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{a | a = n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$. 故选 C.

【例 5】本例考查轴线角的集合, 要灵活地对集合中元素的表现方式进行变形化简.

【例 5】若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称, 则 α, β 的关系一定是 (其中 $k \in \mathbb{Z}$) ()

- A. $\alpha + \beta = 180^\circ$ B. $\alpha - \beta = 90^\circ$
 C. $\alpha - \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ$ D. $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ$

解: 因为角 $180^\circ - \alpha$ 与 α 的终边关于 y 轴对称, 所以 $\beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ - \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$), 所以 $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ$, 故选 D.

【例 6】结合图形, 找到与 α 关于 y 轴对称的特殊角 $180^\circ - \alpha$, 这是解决本题的关键, 由特殊到一般, 是分析解决问题的常用手段.

B. 应用篇

III. 应用剖析

一、知识点综合应用剖析

【例 1】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

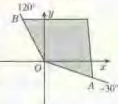


图 4-1-2

【例 2】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 3】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 4】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 5】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 6】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 7】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

解: (1) 以 x 轴的非负半轴为始边, 顺时针旋转 70° , 终边在第四象限, 故 70° 角为第四象限角.

(2) $475^\circ = 115^\circ + 360^\circ$, 所以 475° 与 115° 的终边相同, 而 115° 角的终边在第二象限, 故 475° 角为第二象限角.

(3) $-1035^\circ = 45^\circ + (-3) \times 360^\circ$, 所以 -1035° 与 45° 的终边相同, 而 45° 在第一象限, 故 -1035° 角为第一象限角.

【例 8】试判断下列各角是第几象限角.

(1) -70° , (2) 475° , (3) -1035° .

【例4】为提高全民身体素质,县医院特邀四位专家轮流为市民进行义务体检,其值班顺序依次为张、王、李、赵,假设这种值班周而复始,从不间断,今天值班的是王大夫.

(1) $4k(k \in \mathbb{Z})$ 天后的一天是哪位大夫值班? $4k(k \in \mathbb{Z})$ 天前的一天是哪位大夫值班?

(2) 158 天后的一天是哪位大夫值班?

解: (1) 因为今天是王大夫值班,所以 $4k(k \in \mathbb{Z})$ 天后的一天仍是王大夫值班, $4k(k \in \mathbb{Z})$ 天前的一天是王大夫值班.

(2) 因为 $158 = 4 \times 39 + 2$, 而今天是王大夫值班, 所以 158 天后的一天是李大夫值班.

变式训练 本例体现的是以 4 为周期的变化, 由今天王大夫值班作基础, 若经过 $4k(k \in \mathbb{Z})$ 天, 则仍是王大夫值班, 若经过 $4k+1, 4k+2, 4k+3(k \in \mathbb{Z})$ 天, 则分别是赵大夫、李大夫、张大夫值班, 所以只需把经过的天数 β 表示成 $\beta = 4k + a(k \in \mathbb{Z})$, 就可知道经过 β 天后是哪位大夫值班.

C. 拔高篇

IV. 最新题型剖析

一. 开放性问题剖析

问题入门指导: 本节的探究性问题主要是以解答题形式出现, 以考查终边相同的角和象限角为主, 一般是给出某个象限角或某个区域角 θ , 探究 $\frac{\theta}{n}$ 所在的区域.

【例1】 若 θ 是第一象限角, $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{4}$ 分别在什么范围内?

解: 因为 θ 是第一象限角, 所以 $k \cdot 360^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ$, ($k \in \mathbb{Z}$).

① $k \cdot 180^\circ < \frac{\theta}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 当 k 取偶数和奇数时, $\frac{\theta}{2}$ 分别在图 4-1-4 中阴影部分.

② $k \cdot 120^\circ < \frac{\theta}{3} < k \cdot 120^\circ + 30^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 当 $k=3m, k=3m+1, k=3m+2$, 且 $m \in \mathbb{Z}$ 时, $\frac{\theta}{3}$ 分别在图 4-1-5 中的阴影部分.

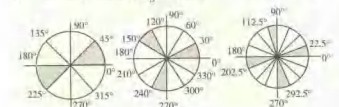


图 4-1-4

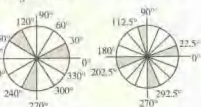


图 4-1-5

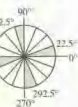


图 4-1-6

③ $k \cdot 90^\circ < \frac{\theta}{4} < k \cdot 90^\circ + 22.5^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 当 $k=4m, k=4m+1, k=4m+2, k=4m+3$, 且 $m \in \mathbb{Z}$ 时, $\frac{\theta}{4}$ 在图 4-1-6 中的阴影部分.



图 4-1-7

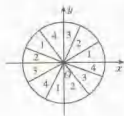


图 4-1-8

【例2】 已知 θ 为某象限的角, $\frac{\theta}{n}$ 所在的范围如下:

(1) $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限问题: 作出各个象限的角平分线, 它们与坐标轴把圆周等分成 8 个区域, 从 x 轴的非负半轴起, 按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1, 2, 3, 4, 则标号是几的四个区域, 就是 θ 为第几象限的角时, $\frac{\theta}{2}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出, 如图 4-1-7 所示.

(2) $\frac{\theta}{3}$ 所在象限的问题: 作出三等分各个象限的从原点出发的射线, 它们与坐标轴把圆周等分成 12 个区域, 从 x 轴的非负半轴起, 按逆时针方向把这 12 个区域依次循环标上号码 1, 2, 3, 4, 则标号是几的区域, 就是 θ 为第几象限角时, $\frac{\theta}{3}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{3}$ 所在的象限就可直观地看出, 如图 4-1-8.

(3) $\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题: 一般地, 要确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限, 可以作出 n 等分各个象限从原点出发的射线, 它们与坐标轴把圆周等分成 $4n$ 个区域, 从 x 轴的非负半轴起, 按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次循环标上号码 1, 2, 3, 4, 则标号是几的区域, 就是 θ 为第几象限的角时, $\frac{\theta}{n}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限就可直观地看出.

有的同学在做本题时, 由 θ 是第一象限角, 仅想到 $0^\circ < \theta < 90^\circ$, 从而得到 $0^\circ < \frac{\theta}{2} < 45^\circ, 0^\circ < \frac{\theta}{3} < 30^\circ, 0^\circ < \frac{\theta}{4} < 22.5^\circ$, 仅得到了第一象限的角, 而把其他象限角丢掉了, 此种错误以后一定要避免.

二. 情景性问题剖析

问题入门指导: 本节的情景性问题以考查终边相同的角为主, 多以辨析题目出现, 给出表示终边相同的角的多重方法, 分析各自特点, 看各种方法是否正确或全面, 以寻求准确的表示方法.

【例2】 对于终边在 $y=x$ 上的角的集合, 给出如下三种解法, 请辨别分析, 给出正确答案.

解法一: 终边在 $y=x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

解法二: 终边在 $y=x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

解法三: 终边在 $y=x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

解: 解法一认为 $y=x$ 的图象是第一象限的角平分线; 解法二认为 $y=x$ 的图象是第三象限的角平分线; 这两种方法均错. 解法三没有求出并集, 缺少化简意识, 化简不彻底.

正确解法应为: 终边在 $y=x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = 45^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 45^\circ + (1+2k) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = 45^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$.

变式训练 解本题时应结合图形, 写出终边在各个位置时的集合, 然后再求集合的并集, 并进行化简, 防止遗漏.

三. 观察与思考

问题入门指导: 本节的观察与思考以考查任意角的概念为主要内容, 通过观察日常生活中旋转或转动有关的现象, 然后把它合理转化为视角度或角速度有关的问题.

【例3】 自行车大链轮有48齿,小链轮有20齿,当大链轮转过一周时,小链轮转过的角度是多少度?

解: 大链轮的齿与小链轮的齿互相咬合,大链轮转一周(即 360°),小链轮转 $\frac{48}{20}$ 周,转过的角度为 $\frac{48}{20} \times 360^\circ = 864^\circ$.

名师提醒: 解本题的关键在于观察大链轮与小链轮是如何咬合转动的,它们的齿相互咬合,相当于单位时间内转过的圆周长相等等,由此可见,它涉及到的知识并不复杂,只需对日常生活用心观察即可.

V. 三年高考真题剖析

本章考点剖析:本章内容增加知识和考点多为对概念的把握,以选择填空题为主,运算量主要是涉及某个范围内的角或 $\frac{\alpha}{2}$ 为某几重角,应注意不等式的特值和变形方法,灵活运用“ π ”的取值,本节内容单独出现较少,常与后面的任意角的三角函数相综合,借助于数与形解决问题.它们是本章知识的基础,应熟练掌握.

【例1】 (2005,全国Ⅲ,5分)已知 α 为第三象限的角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是_____.

- A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第一或第三象限 D. 第二或第四象限

解法一: 取 $\alpha = 210^\circ$ 或 -120° ,则 $\frac{\alpha}{2} = 105^\circ$ 或 -60° ,故选D.

解法二: 因为 α 是第三象限的角,所以 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}$. 所以 $k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}$. 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角;当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限角,故应选D.

名师提醒: 本题考查象限角和终边相同的角的概念,常用的方法是解法二,但在此,用“特值法”则更简便.

D. 练习篇

VI. 过关测试题 (113)

1. (判断题) 下列命题中,正确的是()

- A. 第二象限的角必是钝角 B. 钝角必在第二象限
C. 第四象限的角必是负角 D. 负角必在第四象限

2. (单选题) 若 α 是第四象限角,则 $180^\circ - \alpha$ 是()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

3. (多选题) 把 -1485° 化成 $k \cdot 360^\circ + \alpha (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z})$ 的形式是()

- A. $-4 \times 360^\circ + 45^\circ$ B. $-4 \times 360^\circ - 315^\circ$
C. $-10 \times 360^\circ - 45^\circ$ D. $-5 \times 360^\circ + 315^\circ$

4. (多选题) 已知角 α 与 $x + 45^\circ$ 有相同的终边,角 β 与 $x - 45^\circ$ 有相同的终边,那么 α 与 β 之间的关系是()

- A. $\alpha + \beta = 0$ B. $\alpha - \beta = 0$
C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ D. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$

5. (多选题) 集合 $A = \{x | x = k \cdot 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,与集合 $B = \{x | x = k \cdot 90^\circ \pm 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 之间的关系是()

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$
C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

6. (多选题) (1) 如果角 α 与 β 的终边重合,则 $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$; (2) 如果角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$; (3) 如果角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$; (4) 如果角 α 与 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$; 其中正确结论的个数为()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

7. (单选题) 钟表经过4小时,时针转了_____度,分针转了_____度.

8. (多选题) 若 4α 与 20° 角的终边相同,则适合不等式 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 的角 α 的集合是_____.

9. (多选题) 终边在第一或第三象限的角的集合是_____.

10. (多选题) (情景问题) 如图4-1-9,半径为1的圆的圆心位于坐标原点,点P从点A(1,0)出发,依逆时针方向等速沿单位圆周旋转,已知P在1s内转过的角度为 $\theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$,经过2s到达第三象限,经过14s后又恰好回到出发点A,求 θ .

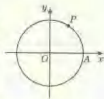


图4-1-9

11. (多选题) (情景问题) 已知 $f(x) = 12^\circ \cdot x + 20^\circ, g(x) = 18^\circ \cdot x + 30^\circ$,是否存在最小正整数T,使得 $f(x+T)$ 与 $f(x), g(x+T)$ 与 $g(x)$ 均为终边相同的角? 若存在,求出T的值;若不存在,说明理由.

第二节 弧度制

A 基础篇

I. 自主探究与发现

一、自主探究

1. 角的概念推广后,怎么区分“0°到90°的角”、“锐角”、“第一象限的角”、“小于90°的角”、“0°~90°的角”?

2. 上面的角都是以度作为单位来度量的,还有没有其它度量角的单位呢?

二、剖析发现

1. “0°到90°的角”指的是在区间 $[0^\circ, 90^\circ)$ 的角;“锐角”指的是在区间 $(0^\circ, 90^\circ)$ 的角;“第一象限的角”指的是 $(0^\circ, 360^\circ) \cup (360^\circ, 720^\circ) \cup \dots$;“小于90°的角”指的是 $\{ \theta | \theta < 90^\circ \}$;“0°~90°的角”指的是在区间 $[0^\circ, 90^\circ)$ 的角.

2. 用度作为单位来度量角的单位制叫角度制,在数学和其他学科中还常用另一种度量角的单位制——弧度制,它的单位符号是rad,读作弧度,这就是本节的学习内容.

II. 教材内容剖析

讲解点1: 弧度制与1弧度角的概念

注释: (这是难点) 弧度制是用弧度作为单位来度量角的单位制,它的单位是“弧度”,单位符号为“rad”,读作“弧度”.正如长度单位厘米、米一样,1弧度的角是指长度等于半径长的弧所对的圆心角,所以在半径不同的圆中,1弧度的角所对的弧长不相等,但在不同的圆中,长度等于相应半径长的弧所对的圆心角相等,都等于1弧度的角.

【例1】 下列命题中,真命题是()

- A. 1弧度是1度的圆心角所对的弧
- B. 1弧度是长度为半径的弧
- C. 1弧度是长度等于半径长的弧所对的圆周角的大小的2倍,它是角的一种度量单位
- D. 1弧度是1度的弧与1度的弧所对的弦长之和

解: 由弧度的定义,可知,1弧度指的是角的大小,故A、B、D都错,故选C.

思维启迪: 本题考查了基本概念,对于此类题目,要从定义入手,仔细分析每一句话,并注意与概念叙述的异同点,由1弧度的定义可知:等于半径长的弧所对的圆心角为1弧度,而圆心角是所对圆周角的2倍,故C正确.

讲解点2: 角 α 的弧度数

注释: (这是重点) 由1弧度的角的定义可知,圆心角 α 与圆的半径长无关,它是 α 所对的弧长与半径的比,比如圆心角 α 所对的弧长为 $l=2r$ 时,角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2r}{r} = 2$ 弧度,当圆心角 α 所对的弧长为 $l=2\pi r$ 时,圆心角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ 弧度,当圆心角 α 是一个负数,且它所对的弧长 $l=-4\pi r$ 时, $|\alpha| = \frac{4\pi r}{r} = 4\pi$,即 $\alpha = -4\pi$ 弧度,其中,弧度二字可省略不写,一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是0,角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$,其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对弧的长, r 是圆的半径,这个公式在物理中有广泛的应用.

【例2】 设时钟表盘中时针长为 r ,则时针经过 t 小时转过角的 α 的弧度数是_____.

解: 时针经过 t 小时转过弧长为 $l = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$,所以 $|\alpha| =$

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi, \text{又因为时针是顺时针旋转,所以 } \alpha = -\pi.$$

思维启迪: 由题目直接由弧度数公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 得到解,但

应注意时针旋转的方向,同时,还要理解 $\alpha = -\pi$,实质是 $\alpha = -\pi$ 弧度,另外,角 α 的大小与 r 无关.

讲解点3: 角度制与弧度制的比较

注释: (这是重难点) (1) 角度制的单位是“度”,而弧度制的单位是“弧度”.

(2) 1弧度的角是指长度等于半径长的弧所对的圆心角,而1度的角是指圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角,大小显然不同,但它们都是一个定值,且与圆的半径的大小无关.

(3) 弧度制中,单位“弧度”两字可省略不写;而角度制中,单位“度”(°)却不能省略.

(4) 用弧度作单位表示角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如无特殊要求,不必把 π 写成小数,如 $360^\circ = 2\pi$ 弧度,不必写成 $360^\circ \approx 6.28$ 弧度.

(5) 在表示角时,要么使用弧度制,要么使用角度制,但不能两种单位混用.

【例3】 下列命题中,假命题是()

- A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
- B. 1弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角
- C. 根据弧度的定义,180°一定等于 π 弧度
- D. 不论用角度制还是用弧度制度量角,它们均与圆的半径长短有关

解: D

思维启迪: 本例考查基本概念及角度制与弧度制的区别和联系,解题的关键在于对定义的理解,即无论角度制还是弧度制,角的大小与圆的半径长短无关,而是与弧长和半径的比值有关.

讲解点4: 角度与弧度的换算方法

注释: (这是重点) 角的概念推广后,无论用角度制还是用弧度制,都能在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应关系,即每一个角都有唯一的一个实数(也就是这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(这个角的弧度数等于该实数)与它对应,所以,用“弧度”和“度”都可以度量一个角,在度量时,除了零角之外,所得的数都不同,但它们既然是度量同一个角的结果,二者就可以相互换算,其换算公式为:

$$(1) \text{把角度换成弧度, } 360^\circ = 2\pi \text{ rad, } 180^\circ = \pi \text{ rad, } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad.} \\ (2) \text{把弧度换成角度: } 2\pi \text{ rad} = 360^\circ, \pi \text{ rad} = 180^\circ, 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

【例4】 (1) 将下列各角化为弧度: $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 345^\circ$.

(2) 把下列各弧度化为角度: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi$.

解: (1) 化为弧度分别为 $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{23\pi}{12}$.

$$\frac{1}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{23}{12}\pi.$$

(2) 化为角度分别为 $15^\circ, 90^\circ, 225^\circ, 150^\circ, 315^\circ, 300^\circ, 330^\circ$.

思维启迪 对于特殊角的弧度数要熟记,不能总是转化为角度后才使用和运算.记忆方法是把 360° 分 1 份、分 3 份、分 12 份、分 24 份依次累加,如分 12 份时一份为 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$,依次得 $\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ 等}.$$

【例 5】 把 $-22^\circ 30'$ 化成弧度,把 $\frac{\pi}{5}$ rad 化成角度.

$$\text{解: } -22^\circ 30' = -22.5^\circ = -22.5 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{\pi}{8} \text{ rad},$$

$$\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{1}{5} \times 180^\circ = 36^\circ.$$

规律总结 度与弧度的转化,常通过 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad 和 $1 \text{ rad} =$

$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ 来完成,带“ π ”的弧度化为角度时,只需将“ π ”换成 180°

即可,当然,也可采用以下解法: $\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ$.

【例 6】 判断下列各角所在的象限.

$$(1) \frac{19}{6}\pi; (2) -\frac{31}{8}\pi; (3) \frac{32}{7}\pi; (4) -\frac{17}{2}\pi.$$

解: (1) 因为 $\frac{19}{6}\pi = 2\pi + \frac{7}{6}\pi$, 而 $\pi < \frac{7}{6}\pi < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\frac{7}{6}\pi$ 是第三象限角, 所以 $\frac{19}{6}\pi$ 为第三象限角;

(2) 因为 $-\frac{31}{8}\pi = -4\pi + \frac{5\pi}{8}$, 而 $\frac{5}{8}\pi$ 为第二象限角, 所以 $-\frac{31}{8}\pi$ 为第二象限角;

(3) 因为 $\frac{32}{7}\pi = 4\pi + \frac{4\pi}{7}$, 而 $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \pi$, 所以 $\frac{4\pi}{7}$ 为第二象限角, 所以 $\frac{32}{7}\pi$ 为第二象限角;

(4) 因为 $-\frac{17}{2}\pi = -8\pi + \frac{\pi}{2}$, 而 $\frac{\pi}{2}$ 的终边在 y 轴的正半轴上, 所以 $-\frac{17}{2}\pi$ 的终边在 y 轴的正半轴上, 它不是象限角, 而是一个轴角.

规律总结 在弧度制中,与 α 角终边相同的所有角可以表示为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$, 利用 $y = 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$, 将判断角所在的象限问题转化为判定 α 角所在的象限问题,但要注意将 β 转化为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 的形式时, π 的系数为偶数,且 $\alpha \in [0, 2\pi)$, 这样 α 所在象限容易判定,否则容易出错或不易判定,如: $\frac{19\pi}{6} = 3\pi + \frac{\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6} = 3\pi + \frac{31\pi}{6}$, 都不易作出正确的判定.

变式点 2 求弧度制下扇形面积公式.

译解: (这是重点) 在角度制中,弧长公式和扇形面积公式分别为 $l = \frac{n\pi r}{180}$, $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ (其中 n 为圆心角的度数, r 为圆的半径). 在弧度制中,由圆心角 α 的弧度数公式,易得扇形的弧长和面积公式分别为 $l = |\alpha| \cdot r$, $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \cdot |\alpha| \cdot r^2$ (其中 r 为圆的半径, α 为圆心角的弧度数, l 为弧长, S 为面积). 两种单位制中弧长和面积公式进行对照,可发现,弧度制下的公式更简单,应用更方便,但一定要注意 α 是圆心角的弧度数.若给出角度,

则需先换算,再用弧度制中的公式.

【例 7】 (1) 已知扇形 AOB 的周长为 6 cm, 该扇形的圆心角是 1 弧度, 求该扇形的面积;

(2) 设扇形的周长为定值 l , 则该扇形圆心角为多少时, 面积最大?

解: (1) 设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 则 $\begin{cases} 2r + l = 6, \\ l = 1 \times r. \end{cases}$ 解得 $r = 1 = 2(\text{cm})$, 故扇形面积 $S = \frac{1}{2}rl = 2(\text{cm}^2)$.

(2) 设扇形半径为 r , 面积为 S , 圆心角为 θ , 则弧长为 $C = l - 2r$, 所以 $S = \frac{1}{2}r(l - 2r) = -r^2 + \frac{1}{2}rl = -\left(r - \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l^2}{16}$, 而 $0 < r < \frac{l}{2}$, 所以当且仅当 $r = \frac{l}{4}$ 时, 扇形面积取最大值 $\frac{l^2}{16}$, 此时, 弧长 $C = \frac{l}{2}$, 圆心角 $\theta = \frac{C}{r} = 2 \text{ rad}$, 故扇形的圆心角为 2 rad 时, 面积取最大值 $\frac{l^2}{16}$.

思维启迪 弧度制下的弧长公式与扇形的面积公式比采用角度制时的相应公式简单,以后我们常用此公式求弧长与面积.在运用时,应先将圆心角用弧度制表示;在这两个公式中涉及到四个元素:弧长 l , 半径 r , 圆心角 θ , 扇形面积 S , 这四个量中,已知其中两个可求另外两个.

B. 应用篇

III. 应用剖析

一. 知识点综合应用剖析

知识要点综合应用问题 1 扇形中的内接几何图形.

译解: 扇形是一个圆的一部分, 作为一个几何图形, 它的半径与圆的半径相同, 它的弧长则是圆周的一部分, 由于扇形和圆的紧密关系, 常研究扇形的内切圆问题, 它是弧度制下扇形周长和面积公式应用最集中的问题.

【例 1】 在扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, 弧 AB 的长为 l , 求此扇形内切圆的面积.

解: 如图 4-2-1 所示, 因为 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 弧 AB 的长为 l , 所以 $OA = \frac{l}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi} = (\sqrt{2} + 1)r$, 所以 $r = \frac{2l}{\pi(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2l}{\pi}(\sqrt{2} - 1)$, 所以 $S = \pi r^2 = \frac{12 - 8\sqrt{2}}{\pi} l^2$.



图 4-2-1

思维启迪 准确作图, 通过图形发现内切圆半径和扇形半径的关系, 是解本题的关键点, 准确的计算是正确解题的保障.

知识要点综合应用问题 2 弧度制与角度制的应用.

译解: 度量角时, 无论用角度制还是弧度制, 都能在角的集合与实数之间建立一种一一对应的关系, 只是对应法则不同而已, 即每一个角都有唯一的一个实数与它对应; 反过来, 每一个实数也都有唯一的一个角与它对应. 在角度制下, 角与它的度数一一对应, 弧度制下, 角与弧度数一一对应, 故也常用弧度来表示终边相同的角或区域角.

【例 2】 如图 4-2-2, 用弧度制表示终边落在下列阴影部分的角 (不包括边界).

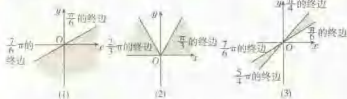


图 4-2-2

解: (1) $[-\pi, \pi]$ 内满足条件的集合为 $\left\{ \alpha \mid -\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6} \right\}$.

则终边在所指定区域内的角的集合为 $\left\{ \alpha \mid -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) 在 $[0, 2\pi)$ 内满足条件的集合为 $\left\{ \alpha \mid 0 < \alpha < \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi \right\}$.

则所求角的集合为 $\left\{ \alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(3) 在 $[0, 2\pi)$ 内满足条件的集合为 $\left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{4} \right\}$.

则阴影部分角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \alpha \mid \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{6} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

规律总结: 一般地, 当两个区域的边界互为反向延长线时, 将其中一个区域绕原点旋转 π 的奇数倍而得到另一区域, 而将该区域绕原点旋转 π 的偶数倍就回到原来区域, 因此两区域可合并表示为 $\left\{ \alpha \mid \theta_1 + k\pi < \alpha < \theta_2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

二、实际应用剖析

(一) 本节知识在物理学中的应用

正角应用问题 1: 关于角速度和弧长速问题.

译解: 弧度制下扇形的弧长和面积公式比角度制下更简单, 应用更方便, 它经常被用在物理学中解决圆形物体运动的速度、速度及运动的距离等问题.

【例 3】 半径为 12cm 的轮子, 每 3min 转 1000 圈, 试求:

- (1) 它的平均角速度 (1s 转过的弧度数).
- (2) 轮沿上一点 1s 经过的路程.
- (3) 轮沿上一点转过 1000° 所经过的路程.

解: (1) 因为 3min 转 1000 圈, 所以 1s 转 $\frac{1000}{60 \times 3} = \frac{50}{9}$ 圈, 故平均角速度为 $2\pi \cdot \frac{50}{9} = \frac{100\pi}{9}$ (rad/s).

(2) $|a| = R \cdot \frac{100\pi}{9} = 12 \cdot \frac{400\pi}{3}$ (cm).

(3) $|a| = R \cdot \frac{1000}{180} = \frac{200}{3}$ (cm).

规律总结: 本题目中的轮子转动的角速度和轮沿上的点转过的距离实质是求扇形的圆心角和弧长, 只需利用弧长公式即可, 但应注意 α 是弧度数.

(二) 本节知识在日常生活中的应用

实际应用问题 2: 园林绿化的面积问题.

译解: 在园林绿化及建筑设计中常遇到与圆或扇形有关的问题, 常利用扇形的弧长、面积公式, 对有限的资源进行合理安排与配置, 以达到最大利用率或获得最佳收益.

【例 4】 如图 4-2-3, “十字形”公路的交叉处周围呈扇形形状, 某路桥公司拟在这块扇形土地上修建一个圆形广场, 怎样设计, 广场的占地面积最大, 其值是多少? 图中 $\angle AOB = 60^\circ$, $AB = 100$ m.

解: 因为 $\angle AOB = 60^\circ$, $AB = 100$ (m),

所以 $OA = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 200$ (m), 欲使圆形



图 4-2-3

广场的占地面积最大, 只需 $\odot O_1$ 与扇形相切. 设 $\odot O_1$ 与 OA 切于 C 点, 连结 O_1O, O_1C , 则 $\angle O_1CO = 90^\circ - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $O_1O = OA - OC = 200 - OC$ (m). 又 $OC = O_1O \sin \frac{\pi}{3}$, 所以 $O_1C = (200 - O_1O) \cdot \frac{1}{2}$, 解得 $O_1C = 100$ (m). 这时 $\pi \cdot O_1C^2 = 10000\pi$ (m²).

答: 圆形广场的半径为 100m 时, 其占地面积最大, 且最大值为 10000π m².

规律总结: 运用公式 $|a| = \frac{l}{r}$ 解决实际问题时, 首先要用 “ $|a|, l, r$ ” 表示实际问题中的量, 然后解方程即可. 解应用题, 要把实际问题抽象成数学模型, 讨论数学模型的解, 其基本流程是: 实际问题 $\rightarrow$ 数学模型 $\rightarrow$ 数学模型的解 $\rightarrow$ 实际问题的解. 其中, 难点在数学模型的建立上.

(三) 本节知识在其他实际应用

1. 实际应用问题 3: 位移问题.

译解: 在物理学中, 常遇到物体的位移或曲线等事件, 研究物体运动的速度、加速度、位移或质点运动的轨迹等. 物体在做曲线运动时, 其运动的轨迹与圆有密切的关系. 所以, 常通过数学中的有关知识来解决物体运动等问题.

【例 5】 如图 4-2-4, 已知一

长为 $\sqrt{3}$ dm, 宽为 1 dm 的矩形木板在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第四面时被一小木板挡住, 使木板底面与桌面成 30° 角, 问点 A 走过的路程及走过的弧长所在扇形的总面积.

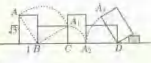


图 4-2-4

解: $\widehat{AA_1}$ 所在的圆半径是 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, 圆心角为 $\frac{\pi}{2}$.

$\widehat{A_1A_2}$ 所在的圆半径是 1, 圆心角是 $\frac{\pi}{2}$, $\widehat{A_2A_3}$ 所在的圆半径为 $\sqrt{3}$.

圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以点 A 走过的路程是 3 段圆弧之和, 即 $2 \times \frac{\pi}{2} +$

$1 \times \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{6}$ (dm). 3 段圆弧所在扇形的总面积是

$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4}$ (dm²).

规律总结: 画出点 A 的运动轨迹, 分析每段弧的特征 (所在圆的圆心、半径、圆心角) 是解决问题的关键. 要注意做第三次翻动时, 点 A 并没有运动.

C. 拔高篇

IV. 最新题型剖析

一、探究性问题剖析

问题入门指导: 本节探究性问题以考查用弧度制表示终边相同的角、象限角、轴线角为主, 以对称问题为主要内容, 注意