附：工程数学复变函数与积分变换自学考试大纲

工程数学

复变函数与积分变换

组编／全国高等教育自学考试指导委员会
主编／贺才兴

全国高等教育自学考试指定教材（公共课程）

辽宁大学出

全国高等教育自学考试指定教材

工程数学

复变函数与积分变换

（附：复变函数与积分变换自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会组编

贺才兴　编著

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/贺才兴编著. 一沈阳:辽宁大学出版社,1998. 9
ISBN 7-5610-3653-1

Ⅰ. 复… Ⅱ. 贺… Ⅲ. ①复变函数 ②积分变换 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1998)第 26358 号

辽宁大学出版社出版
(沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码:110036)
北京飞达印刷厂印刷

开本:880×1230 毫米 1/32 字数:210 千字 印张:8.625
印数:1 30100 册
2000 年 10 月第 2 版 2000 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑: 李洪革 责任校对: 马德合

定价:12.50 元

组 编 前 言

当您开始阅读本书时,人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪,这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展,知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战,随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇,寻求发展,迎接挑战,适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试,其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学,为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问,这种教材应当适合自学,应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息,有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力,也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书,我们虽然沿用了"教材"这个概念,但它与那种仅供教师讲、学生听,教师不讲、学生不懂,以"教"为中心的教科书相比,已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解,以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念,不断探索适合自己的学习方法,充分利用已有的知识基础和实际工作经验,最大限度地发挥自己的潜能以达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

编者的话

编者按照全国高等教育自学考试指导委员会审定的本科《复变函数与积分变换自学考试大纲》，并根据多年来在教学中积累起来的有益经验和体会，针对自学考试的具体特点，编写了此书。

全书分成两篇共八章，外加二个附录。第一篇为复变函数，含复数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数和保角映射六章。第二篇为积分变换，含傅里叶变换和拉普拉斯变换两章。本书的特点是：内容丰富，说理清楚，重点突出，深浅得当，通俗易懂。为了便于自学，对问题的阐述比较仔细，用语力求确切、简洁。对基本概念、基本理论和基本方法的叙述，注意启发引导，力求深入浅出、清晰、准确。书中配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则，对全部内容由易到难、由浅入深地作了统筹安排。每章的后面还备有一份“自我检查题”，读者可用以检验自学的效果。上述特点对读者逐步地系统掌握教材的基本内容、进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

经全国高等教育自学考试委员会电子电工与信息类专业委员会审定，本书作为高等教育自学考试电子电工与信息类专业的自学考试教材。本书具有比较广泛的适用性，函授大学、电视大学、职工大学及成人教育有关专业等都可用来作为教材，全日制工科高等院校的师生也可作为参考教材。

参加本书审稿并提出修改意见的有主审同济大学陈志

华教授、上海交通大学李乔教授和上海铁道大学田根宝教授，编者在此一并表示感谢。

本书难免存在缺点与不足之处，欢迎读者批评指正。

编　者

于上海交通大学

1998年6月20日

目　录

第一篇　复变函数

第二篇　积分变换

第一篇　复变函数

第一章　复　数

复数是复变函数的基础. 本章主要介绍复数的概念、性质及运算,然后引入平面点集的概念.

§1　复数及其表示法

一、复数的概念

对于任意实数 x 和 y,称 $x+iy$ 为**复数**,其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**.

通常记复数为 $z=x+iy$,实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

当实部 $x=0$ 时,$z=iy$,称为**纯虚数**;当虚部 $y=0$ 时,$z=x$ 就是一个实数. 因此,全体实数是复数的一部分,复数是实数的推广. 特别,$0+i0=0$.

两个复数之间不能比较大小,但可以定义它们的相等.

设有两个复数,$z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$,当且仅当

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

时,才有 $z_1=z_2$.

二、复数的表示法

1. 复平面

由复数相等的概念可知：一个复数 $z=x+iy$ 对应且只对应着一对有序的实数 x 与 y，可以记为 $z=(x,y)$. 因此，在平面上取直角坐标系 xOy，就可以用坐标为 (x,y) 的点 P 表示复数 $z=x+iy$（图 1－1），于是复数就与平面上的点一一对应. 实数与 x 轴上的点一一对应，x 轴称为**实轴**；纯虚数 iy 与 y 轴上的点一一对应，y 轴称为**虚轴**. 虚轴上只有一个原点对应着实轴上的数零，可以认为原点对应着复数 $z=0+i0$，记为 $z=0$. 这样表示复数的平面称为**复平面**或 **Z 平面**. 由于复数与平面上直角坐标系中的点的一一对应关系，为方便起见，今后不再区分"数 z"与"点 z".

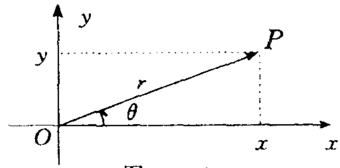

图 1－1

2. 复数的向量表示

如图 1－1 所示，复数 $z=x+iy$ 可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，x 与 y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴与 y 轴上的**投影**. 这样，复数与平面上的向量建立了一一对应关系.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+iy$ 的**模**或**绝对值**，记为 $|z|$ 或 r，于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|.$$

当点 P 不是原点，即 $z\neq0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

有

$$\begin{cases}x=|z|\cos\theta,y=|z|\sin\theta\\ \mathrm{tg}\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases}.$$

若 θ_1 为复数 z 的一个辐角，则 $\theta_1+2n\pi$（n 为整数）也是复数 z 的辐角，因此，任何一个复数 z 都有无穷多个辐角，它们之间相差 2π 的一个倍数，记为

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 是惟一的，称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记为

$$\theta_0 = \arg z.$$

于是

$$\begin{cases} -\pi < \arg z \leqslant \pi \\ \mathrm{Arg}z = \arg z + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases}$$

数 0 是惟一的模为零而辐角没有定义的复数.

$\arg z$ 可以通过复数 z 的实部 x 与虚部 y 用主值规定在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反正切函数 $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ 来确定，其关系如下：

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 I、IV 象限} \\ \pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 II 象限} \\ -\pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 III 象限} \end{cases}.$$

3. 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

还可以用模 $r = |z|$ 和辐角 $\theta = \mathrm{Arg}z$ 来表示 z，即

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

上式称为复数 z 的**三角表示式**.

利用**欧拉公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

由三角表示式可以得到

$$z = re^{i\theta},$$

上式称为复数 z 的**指数表示式**.

在理论研究与实际应用中，可根据不同的需要采用不同的复数表示式.

例 1 试求复数 $2 - 2i$ 与 $-3 + 4i$ 的模和辐角.

解 $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\mathrm{Arg}(2 - 2i) = \arg(2 - 2i) + 2n\pi$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{-2}{2} + 2n\pi$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4i) = \arg(-3+4i) + 2n\pi$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{4}{-3} + \pi + 2n\pi$$

$$= (2n+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

例 2 试将 $z = -1 + \sqrt{3}i$ 和 $z = -\sin \frac{\pi}{3} - i\cos \frac{\pi}{3}$ 化为三角表示式和指数表示式.

解 因为 $z = -1 + \sqrt{3}i$ 在第 Ⅱ 象限, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$, 所以 $\theta = \frac{2}{3}\pi$, 且 $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, 于是 $z = -1 + \sqrt{3}i$ 的三角表示式为

$$z = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi);$$

指数表示式为

$$z = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}.$$

对于 $z = -\sin \frac{\pi}{3} - i\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, 显然 $r = 1$, $\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{6}\pi$, 于是 $z = -\sin \frac{\pi}{3} - i\cos \frac{\pi}{3}$ 的三角表示式和指数表示式分别为

$$z = \cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6}\pi) \text{ 和 } z = e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

例 3 试将 $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta(-\pi < \theta \leqslant \pi)$ 化为三角表示式.

解法一 因为

$$r = |z| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}) = \frac{\theta}{2},$$

所以 z 的三角表示式为

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}) \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi).$$

解法二 $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})(-\pi < \theta \leqslant \pi).$$

§2 复数的运算及几何意义

一、复数的加法和减法

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的**加法**和**减法**定义如下：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

若复数 z_1、z_2 分别用对应的向量 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$ 表示，则复数的加减法与向量的加减法一致，于是在平面上以 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$ 为边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OP}$ 就表示了复数 $z_1 + z_2$（图 1 — 2），对角线 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 就表示了复数 $z_1 - z_2$. 若将向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 平移至向量 $\overrightarrow{OP_3}$，则向量 $\overrightarrow{OP_3}$ 就表示了复数 $z_1 - z_2$（图 1 — 3）.

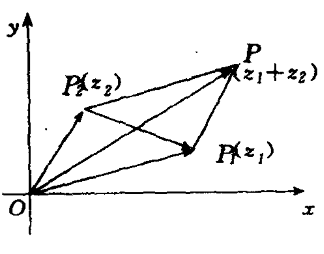

图 1 — 2

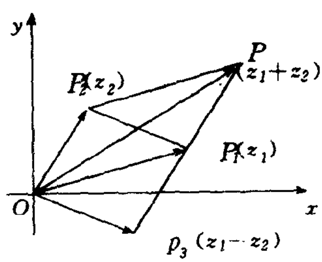

图 1 — 3

由上述几何解释，显然有下列两个不等式：

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|,$$

其中 $|z_1 - z_2|$ 表示向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的长，也就是复平面上点 z_1、z_2 之间的距离.

二、复数的乘法和除法

两个复数$z_2 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$的乘法和除法定义如下：

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ (z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

现在我们利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法，并导出复数的积与商的模和辐角公式.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，则由复数乘法，得

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \\ &\quad \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)], \end{aligned}$$

于是得

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2, \tag{*}$$

即

两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

值得注意的是，由于辐角的**多值性**，等式(*)应理解为对于左端 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，必有由右端 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应；反之亦然.

上述结论有明确的几何解释. 由复数与向量的对应关系，设向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$分别表示复数z_1、z_2，则将$\overrightarrow{OP_1}$绕O点按逆时针方向旋转一个角度$\mathrm{Arg}z_2$，并伸长（或缩短）$|z_2|$倍，便得向量$\overrightarrow{OP}$. 向量$\overrightarrow{OP}$即表示乘积z_1z_2（图 1 － 4）.

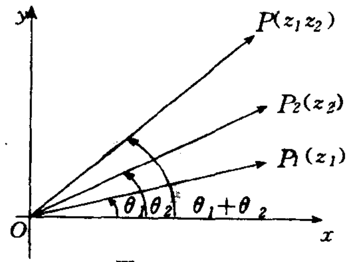

图 1 － 4

若利用复数的指数表示式

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2e^{i\theta_2},$$

则有

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

运用数学归纳法，可得到几个复数$z_1,z_2,\cdots,z_n$相乘的公式：

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n &= r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\ &\quad + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\ &= r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)},\end{aligned}$$

其中$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_ke^{i\theta_k}(k = 1,2,\cdots,n)$.

特别当$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$时，就得到复数$z$的$n$次幂：

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ (n\text{ 为正整数}).$$

若令$|z| = r = 1$，即$z = \cos\theta + i\sin\theta$，则得著名的**棣莫佛**(De Moivre) 公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

下面再来推导两个复数的商的模和辐角公式.

设$z_2 \neq 0$，则由

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2}z_2,$$

并由两个复数乘积的模和辐角公式，得

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \mathrm{Arg}z_2,$$

于是得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2,$$

即

两个复数商的模等于它们模的商，两个复数商的辐角等于分子与分母辐角的差.

若利用复数的指数表示式

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0).$$

复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是：将 z_1 的辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$，再将 z_1 的模伸长(或缩短) $\frac{1}{|z_2|}$ 倍.

三、复数的方根

设复数 w 和 z，若 $w^n = z$(n 为正整数)，则称**复数 w 为 z 的 n 次方根**，记为

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

现令 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$，则由复数 n 次幂计算公式和复数相等的概念，可得

$$\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos\theta, \sin n\varphi = \sin\theta,$$

即有

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \end{cases}$$

从而

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$