代　数

（苏联中学用）

上　册

阿·恩·巴尔苏科夫 著

人民教育出版社

阿·恩·巴尔苏科夫 著

代　　数

（苏联中学用）

上　册

呂 学 礼 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社出版的阿·恩·巴尔苏科夫著的“代数”1957年版譯出的。原书經苏联教育部批准作为七年制和十年制中学六、七年級代数課本之用。本书可供我国中学数学教学的參考。

*

А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 6 И 7 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
УЧПЕДГИЗ
МОСКВА 1957

*

代　数

（苏联中学用）

上　册

阿·恩·巴尔苏科夫 著

吕 学 祁 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新 华 书 店 发 行

北京市印刷一厂印刷

統一书号：7012·395　字数：136千

开本：850×1168公厘　1/32　印张：$5\frac{3}{8}$

1958年6月第一版

1958年10月第一次印刷

北京：1—5,600册

*

定价（6）0.55元

目 录

第一章　代数式. 方程

§1. 字母的使用

在代数里，数目常常不用数字表示，而用字母来表示. 举例如下.

例 1. 在算术里我們知道, 数目的加法适合于交换律: 交换加数的位置, 它們的和不变.

例如:

$$5+7=7+5=12;$$

$$11+20=20+11=31;\text{等等}.$$

这个定律不仅对于数目 5 和 7 或者 11 和 20 是正确的, 对于任何数目也都是正确的. 怎样把这个事实写出来呢? 我們可以这样来做: 用字母 a 表示一个加数, b 表示另一个加数; 并且象平常一样写出这些数目的和: $a+b$. 那末加法交换律就可以写成:

$$a+b=b+a.$$

这就指出, 我們任意取两个数目 a 和 b, 不論把 b 加到 a 上去还是把 a 加到 b 上去, 所得的和都是一样的.

例 2. 解三个类似的应用题: "哥哥比妹妹大 3 岁. 如果妹妹是: 1) 5 岁; 2) 11 岁; 3) 24 岁; 那末哥哥是几岁?"

我們得到下面的解答:

1) $5+3=8$;　　2) $11+3=14$;　　3) $24+3=27$.

一般地, 不管妹妹的年龄是多少, 都要加上 3 岁, 才能得到哥哥的年龄. 因此我們可以把应用题写成: "哥哥比妹妹大 3 岁. 如果妹妹是 m 岁, 那末哥哥是几岁?"

这里字母 m 表示妹妹的年龄. 于是, 哥哥的年龄就等于 $(m+3)$ 岁.

在上面第一个应用题里 $m=5$, 第二题里 $m=11$, 第三题里

$m=24$.

我們用一般的形式解答了这个应用题．把m换成各个不同的数目，就得到許多类似的，或者說，同类的应用题，而 $m+3$ 这个写法就給出了这些应用题的解答的一般公式．

例 3. 在算术习题汇編里可以遇到下面这样的練习:

$$x+3=11,\ 求\ x.$$

这里字母 x 表示未知的数目——未知的加数．我們知道，两个加数里的任何一个等于它們的和减去另一个加数，因此可以求得 x:

$$x=11-3=8.$$

这里字母 x 所表示的数目，我們起初并不知道，而是用算术的法则把它确定的．

在例 1 里用字母 a 和 b 表示任意的数目．我們說，在这种情况字母 a 和 b 可以取任意的数値．

在例 2 里字母 m 也可以取許多不同的値，然而不是任意的．例如，給字母 m 以 $m=500$ 就沒有意义，因为一个人不能活到这个年龄

最后，在例 3 里字母 x 只能取唯一的値 8，因为对于 x 的一切其他的値，等式 $x+3=11$ 都不正确．

§2. 代数式

解下面的应用题．

“一个学生买了每本 20 戈比的 n 本練习本和每本 85 戈比的 1 本課本．他一共要付多少錢？”

要知道練习本一共値多少錢，应該把每本練习本的单价乘以練习本的本数．就是說，練习本的价錢是 $20\cdot n$ 戈比．

全部的价錢就是，

$$(20\cdot n+85)\ 戈比.$$

要注意，在用字母表示的乘数前面，乘号通常是略去不写的．因此上面括号里的写法可以改成：

$$20n+85.$$

这样，我們就得到了应用題的解答的公式．这个公式指出，要解答这应用題，应当把每本練习本的单价乘以所买的練习本的本数而在所得的积上加上課本的价錢．

对于类似这样的写法，除了用“公式”这个詞以外，也用“代数式”这个名称．

定义 1．**由数字或者字母表示的数以及把它們連結起来的运算符号所組成的写法叫做代数式．**

为了簡单起見，“代数式”也簡称为“式”．

再举几个代数式的例子：

$$\frac{a+3}{b-1};\ 3mn;\ 9(p+q);\ \ a;\ \ (3+8)\cdot 7;\ 4.5.$$

从这些例子可以看到，代数式可以只由一个字母組成；也可以完全不含有用字母表示的数目（最后两个例子）．这种情况的式子也叫做算术式．

在我們上面得到的代数式 $20n+85$ 里面，給字母 n 以数值 5（就是說，学生买了 5 本練习本）；用 5 去代 n，得到：

$$20\cdot 5+85,$$

这等于 185（就是 1 卢布 85 戈比）．

185 这个数叫做在 n 等于 5 的时候，这个代数式的数值．

定义 2．**如果在一个代数式里，用字母的值代入，并且进行所指定的运算，那末所得的数目就叫做在字母取这些值的时候，这个代数式的数值，或者簡单地叫做这个代数式的值．**

例如，我們可以說：在 $n=2$ 的时候，式子 $20n+85$ 的值等于 125（1 卢布 25 戈比）．

在 $n=3$ 的时候，这个式子的值等于 145（1 卢布 45 戈比），等等．

我們看到，代数式的值随着我們所給它所含的字母的值而变化．但是也有例外．代数式的值并不随它所含字母的值而变化．例如，式

子 $2(a+3)-2a$ 对于 a 的任意的値都等于 6.

作为举例，让我們来求当字母 a 和 b 有各种不同的值的时候，代数式 $3a+2b$ 的数值.

設 $a=4, b=2$.

在式子里用 4 去代 a，用 2 去代 b，而計算所得的式子.

$$3\cdot4+2\cdot2=12+4=16.$$

就是，在 $a=4$ 和 $b=2$ 的时候，$3a+2b$ 这个式子的值等于 16.

同样可以求得，在 $a=5$ 和 $b=7$ 的时候，这个式子的值等于 29，在 $a=0$ 和 $b=1$ 的时候，它的值等于 2，等等.

計算的結果可以写成表格的形式，用表格形式可以一目了然地看出，式子的值怎样随着它所含字母的值的变化而变化.

列出一个有三个横行的表.

第一横行里写 a 的值，第二横行里写 b 的值，第三横行里写 $3a+2b$ 这个式子的值. 就得到这样的表:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a+2b$	16	29	2	19	11

在 §1 里講到加法交換律的时候，我們曾經說过两个式子 $a+b$ 和 $b+a$ 相等:

$$a+b=b+a.$$

这种写法叫做等式.

定义 3. **两个代数式用等号連結在一起，叫做等式.**

在数学里，除了等号，还使用不等号:

$>$——这个符号表示大于，

$<$——这个符号表示小于.

例如:

$5>2$——讀做: 5 大于 2;

$$3<7$$——讀做：3 小于 7.

定义 4. **两个式子，用“大于”号或者“小于”号連結在一起，叫做不等式.**

应当記住，不等号总是把尖端指着較小的数目的.

例. 量一条綫段，得到它的长度 d 大于 5 厘米而小于 6 厘米. 度量的結果可以写成双重不等式的形式：

$$5\text{ 厘米}<d<6\text{ 厘米}.$$

§3. 字母的許可值

在 §1 所举的例子里，我們看到，一个代数式所含的字母，有时可以取任意的值（例 1），有时只能取某些值，而不能取任意的值（例 2），有时只能取唯一的一个值（例 3）.

定义. **一个代数式的字母所能取的数值，叫做这些字母的許可值.**

如果式子是由解答应用题的結果而得到的，那末，字母的全部許可值，或者，象在数学里通常說的，字母的許可值的集合，是由这个应用题的条件来决定的.

例如，在 §2 里得到的 $20n+85$ 这个式子里，对于 n 的許可值的集合只是自然数的集合，因为練习本的本数只能是一个自然数.

如果在一个式子里关于字母的值沒有什么規定，那末对于这个式子，字母的許可值就認为是不致于使这个式子沒有意义的所有的值.

設有式子：

$$\frac{2x-15}{2}.$$

求它在 $x=2$ 的时候的数值. 在这个式子里用 2 去代 x，得到：

$$\frac{2\cdot2-15}{2}=\frac{4-15}{2}.$$

在分子里得到了一个小于减数的被减数. 所以这个式子在 $x=2$

的时候沒有意义．就是說，2 这个数目不是 x 的許可值．容易看到，这里的 x 只能大于或者等于 $7\frac{1}{2}$．对于 x 的小于 $7\frac{1}{2}$ 的所有的值，式子都沒有意义．x 的这些許可值可以簡单地写成：$x \geqslant 7\frac{1}{2}$．符号 $\geqslant$ 表示“大于或者等于”．

在式子

$$\frac{2}{a-3}$$

里，a 的許可值只是大于 3 的数目，因为在 $a=3$ 的时候分母里成了零，而在算术里我們已經知道，零是不能做除数的．我們把这写成：$a>3$．

§4. 系数

解应用題：“一枝鉛笔值 a 戈比．6 枝这样的鉛笔值多少？”

答：$a \cdot 6$ 戈比．

在积的写法里，通常把用数字表示的因数写在字母因数的前面（交换因数的位置，它們的积不变）．因此上面的式子写成这样：$6a$．

因数 6 叫做这个式子的系数．

定义．**在字母因数前面的数字因数，叫做系数．**

如果一个式子里只有字母因数，那末我們說，它的系数等于 1．事实上，例如，ab 和 $1 \cdot ab$ 这两个式子是相等的，因为一个数乘以 1 以后，它的大小不变．因此，系数 1 通常不写出来．

系数可以是整数，也可以是分数．

設有式子：

$$ab+ab+ab.$$

在这个式子里 ab 这个数重复 3 次作为加数．但是把一个数重复 3 次作为加数，是和把它乘以 3 完全一样的．就是說，可以写成：

$$ab+ab+ab=ab \cdot 3.$$

因为我們約定把数字因数写在前面，所以就得到式子 $3ab$，这里

3 是系数. 反过来, 如果有一个式子, 例如 $4a$, 这里 4 是系数, 那末可以把它写成:

$$4a=a+a+a+a.$$

就是說, 如果系数是整数, 那末它就表示, 在它后面的式子要重复多少次作为加数.

如果系数是分数, 那末它表示, 应当要取在它后面的式子的值的几分之几. 例如, 在 $1\frac{1}{2}ab$ 这个式子里, 系数 $1\frac{1}{2}$ 表示, 对于 a 和 b 的任意的值, 应当取它們的积的 $\frac{3}{2}$. 例如, 在 $a=5, b=6$ 的时候得:

$$1\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=1\frac{1}{2}\cdot30=45.$$

§5. 乘方

在算术里, 把一个合数分解質因数的时候, 我們把这个数写成質数的幂的积的形式. 幂是利用幂指数来写出的.

我們来回忆一下这些概念.

定义 1. **若干个相等的因数的积叫做幂.**

例如, 下面这些数目,

$$49=7\cdot7;$$

$$\frac{9}{25}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5};$$

$$32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$$

分别是 7、$\frac{3}{5}$ 和 2 的幂.

相同的字母所表示的因数的积也是幂, 例如:

aa, $xxxx$. 等等.

按照因数个数的不同而有二次幂、三次幂和更高次幂, 例如:

$36=6\cdot6$ ———— 6 的二次幂;

$\frac{1}{27}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ ———— $\frac{1}{3}$ 的三次幂;

$$625=5\cdot5\cdot5\cdot5——5 \text{ 的四次幂；等等.}$$

在算术里，我們把相等的数目的加法規定为一种新的运算——乘法.

这时，作为加数的数目只写出一次，而在它的后面(在乘号后面)写出乘数，这个乘数就表示，应当把第一个数目取多少次作为加数.例如：

$$3+3+3+3+3=3\cdot5;$$

$$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\cdot3.$$

和这相象，相同数目的乘法也可以規定为一种新的运算.

定义 2. **若干个相等的数目的乘法叫做乘方.**

因此，乘方是第五种算术运算.

定义 3. **进行乘方的这个数，叫做幂的底.**

例如，$64=4\cdot4\cdot4$ 是 4 的三次幂. 数目 4 是幂的底.

在算术里已經知道，幂可以这样簡单地写出：写出幂的底并且在右上角写出(用較小的字)那个等于相乘的因数的个数的数目.

例如：$3\cdot3\cdot3\cdot3=3^4$.

定义 4. **指出底要进行乘方到多少次幂的那个数，叫做幂指数.**

在上面的例子里幂指数是 4.

在 8^2 这个式子里 8 是幂的底，2 是幂指数，而 8^2 或者就是 64，是幂，就是 8 的二次幂.

我們同时举出乘法和乘方的例子以便比較.

乘　法:	乘　方:
$13\cdot2=13+13=26$	$13^2=13\cdot13=169$
$\left(2\frac{1}{2}\right)\cdot3=2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$	$\left(2\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}$
$3\cdot4=3+3+3+3=12$	$3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$
$a\cdot2=a+a=2a$	$a^2=aa$
$x\cdot3=x+x+x=3x$	$x^3=xxx$

从幂的定义(若干个相等的因数的积)得出，幂指数可以等于 2、3、4、等等，就是說，只能是大于 1 的自然数.

我們也采用等于 1 的这种指数，把任意一个数的一次幂認为是这个数本身，例如：

$$5^1=5;\ \ 8.35^1=8.35;\ \ a^1=a.$$

要注意，指数 1 通常不写出来，对于每一个数它都是隱含着的.

采用指数 1 是在以后有用处的.

在算术里我們已經知道，二次幂又叫做平方，三次幂又叫做立方，这是跟用面积单位和体积单位来表示面积和体积有关系的. 因此，把一个数乘方到二次幂和乘方到三次幂也簡单地叫做把这个数平方起来和立方起来.

在实际中常常需要把一个数平方起来和立方起来. 因此，为了减輕和加速計算起見，編印了数的平方表和立方表.

注. 零的任何次幂都等于零，1 的任何次幂都等于 1，証实这一点并且記住它是很有用的.

§6. 运算的順序

在算术里，要对于数目进行各种运算的时候，我們是按照由特别規定的法則所确定的順序来进行这些运算的. 这些法則在代数里仍然有效. 这里应当考慮到現在出現了一种新的运算——乘方.

要記住：

加法和减法叫做第一級运算；

乘法和除法叫做第二級运算；

乘方叫做第三級运算.

現在再記住关于运算順序的法則.

法則 1 **同一級运算要按照所写出的順序来进行.**

例 1

$$17-11+8=6+8=14$$

$$8\div2\cdot3=4\cdot3=12.$$

但是有时候不照这个顺序可以方便一些.

例如,設有式子:

$$51-27+19.$$

按照写出的顺序进行运算,得到:

$$51-27=24;\ 24+19=43.$$

但是如果按照下面这样的顺序来进行,計算就更容易:

$$51+19=70;\ 70-27=43.$$

例 2.

$$25\div10\cdot4.$$

把 25 除以 10,得到分数 $2\frac{1}{2}$,这个分数还要乘以 4.

如果我們改变运算顺序而象下面这样来进行,計算就簡單得多:

$$25\cdot4\div10=100\div10=10.$$

我們看到,同一級运算的顺序有时可以把它改变(要在改变后一切运算仍然是可能的这个条件之下). 但是如果沒有必要的話,那末运算还是按照所写出的顺序来进行.

法則 2. **如果式子里含有不同級的运算,那末先进行較高級的运算,再进行較低級的运算.**

我們来举例說明这个法則.

例 1.

$$3+5\cdot7=3+35=38.$$

先进行乘法(第二級运算),再做加法.

例 2.

$$4\cdot5^2\div2=4\cdot25\div2=100\div2=50.$$

先进行第三級运算(乘方).

例 3.

$$5\cdot2^3-6^2\div12=5\cdot8-36\div12=40-3=37.$$

先进行第三級运算,再进行第二級运算,最后进行第一級运算.

但是有时候也需要不照法则2所指出的順序来进行. 我們举一个应用題来說明这一点.

应用題. "两輛自行車从两地出发相对而行. 它們的速度一輛是每小时 a 公里, 另一輛是每小时 b 公里. 如果 t 小时后两輛自行車相遇, 两地間的距离是多少?"

用分步提問来解答这个应用題.

1) 两輛自行車每小时一共走多少距离?

$$a+b.$$

2) 两地間的距离是多少?

要回答这个問題, 应当把所得的距离 $a+b$ 乘以 t. 如果我們把这个运算写成这样:

$$a+bt,$$

那末答案就錯了, 因为按照法則2我們在这个式子里应当把 b 乘以 t, 再把所得的結果加到 a 上去. 我們需要指出, 在这里应該先进行加法(第一級运算), 再做乘法(第二級运算). 这可以用括号来表明, 把式子写成:

$$(a+b)t.$$

法則3. **如果需要先进行較低級的运算, 那末就用括号来表明. 先进行括号里的数目的运算.**

举例如下.

$11-2\cdot4=11-8=3,$	但是	$(11-2)\cdot4=9\cdot4=36.$
$5\cdot2^3=5\cdot8=40,$	但是	$(5\cdot2)^3=10^3=1000.$
$2+3^2=2+9=11,$	但是	$(2+3)^2=5^2=25.$
$ab^2=abb,$	但是	$(ab)^2=(ab)(ab)=abab$ $=aabb=a^2b^2.$

如果有一个用分数綫写出的分数的式子, 那末分数綫也代替括号, 表示应当先分別計算分子里和分母里的式子, 然后把所得的第一个結果除以第二个結果.