Daxue Wuli Xiti
Taolunke Jiaocheng

高等学校“十五”规划教材

大学物理习题讨论课教程

赵军良 主编

中国矿业大学出版社

高等学校“十五”规划教材

大学物理习题讨论课教程

主　编　赵军良
副主编　崔燕岭　张培峰　关荣锋

中国矿业大学出版社

内容简介

本书根据全国工科大学物理教学基本要求的精神，在整理和总结多年教改实践经验的基础上编写而成。全书包括力、热、电、磁、光及近代物理基础知识，每章由〔目的、要求〕、〔内容提要〕、〔重点、难点分析〕、〔解题方法和要点〕、〔解题示例〕、〔讨论题〕、〔练习题〕组成，内容由浅入深，难度适宜。

本书可作为工科大学物理习题讨论课的用书，还可作为大学非物理类专业、职工夜大、电大及成人自学考试物理课的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理习题讨论课教程/赵军良主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2005.1

ISBN 7-81107-174-6

Ⅰ．大…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．物理学—高等学校—习题　Ⅳ．O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第104757号

书　　名　大学物理习题讨论课教程
主　　编　赵军良
责任编辑　王江涛
责任校对　周俊平
出版发行　中国矿业大学出版社
(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008)
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
排　　版　中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷　中矿大印发科技有限公司
经　　销　新华书店
开　　本　787×1092　1/16　**印张**　22.5　**字数**　548千字
版次印次　2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷
定　　价　30.80元

前　言

大学物理课是理工科大学的一门重要的基础理论课程。为了适应现代科学技术发展的需要，国内外各大学都在更新教学内容与改革教学方法方面作了不少努力。多年的教学经验证明，"物理习题讨论课"这一环节对学生明确课程重点，掌握主要概念、基本定理、定律及其灵活运用诸方面，起着举足轻重的作用。然而，目前国内外尚无适用于物理习题讨论课的教材。为此，我们编写本书，以供物理教师参考；同时也可供学生作为辅导自学用书。

本书根据全国工科大学物理教学基本要求的精神，在整理和总结多年教改实践经验的基础上编写而成。全书包括力、热、电、磁、光及近代物理基础知识，每章由〔目的、要求〕、〔内容提要〕、〔重点、难点分析〕、〔解题方法和要点〕、〔解题示例〕、〔讨论题〕、〔练习题〕组成，内容由浅入深，难度适宜。

〔目的、要求〕　按照工科物理教学指导委员会制定的《大学物理教学基本要求》，指出了学习该章后必须掌握、理解和了解的内容。

〔内容提要〕　简要列出了本章的基本内容，有的地方进行了归纳、对比，加强了知识的系统性。

〔重点、难点分析〕　是编者就基本内容的理解提出的一些看法，作了一定的分析，可能有助于读者。有些问题的讨论略为深入一些，并不属于基本要求，希望读者根据自己的情况自行取舍，汲取有益的部分。

〔解题方法和要点〕　这部分内容概括了各章理论所涉及的主要计算问题，以及解答这些问题时所应遵循的一般方法、主要步骤和注意事项。

〔解题示例〕　每章都有精选的典型例题，其解答注重解题思路，探讨解题规律，对计算结果多有讨论或引申，并尽可能给出第二种解法。对于完成作业比较困难的读者，可以适当多看些例题之后再去完成作业。学习比较主动的读者，最好自己去解答这些例题，然后再同书上的题解作比较。

〔讨论题〕　其选题参考了国内外著名教材和河南理工大学多年来的期中、期末考题，经过多次筛选，反复推敲后编辑的。许多综合分析讨论题无论在知识内容、解题方法及对重要概念的理解、运用方面都具有典型意义。

〔练习题〕　包括选择题、填空题和计算题几种题型，题目具有典型性、综合性，难易层次分明，选题目的明确，便于教师根据学生实际情况和不同教学要求选择使用。

全书共十九章，第一、二章由崔燕岭编写，第三、四、五章由张培峰编写，第六、七章由关荣锋编写，第八章至第十九章由赵军良编写，最后由赵军良负责全书的修改和定稿工作。本书的编写得到了张动天、张智、李凤云、薛中会、李卫彬、凡瑞霞、刘振深、杜保立、王学立、曹伟涛、王永强、王时茂、李旭升、张二磊、苏丽、左小刘的大力协助和支持，在此谨致以衷心的感谢。由于水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

主　编

2004 年 10 月

目　　录

第一章　质点运动学

目的、要求

▶ 掌握质点运动学物理量、运动方程和轨道方程的意义，以及它们之间的关系。

▶ 掌握 x—t 图、v_x—t 图、a_x—t 图的意义及其关系。

▶ 掌握法向加速度与切向加速度的意义和计算。

▶ 理解速度合成原理的意义及应用。

内 容 提 要

一、描述物体运动的三个必要条件

1. *参考系(坐标系)*

由于自然界的运动是绝对的，只能在相对的意义上讨论运动，因此需要引入参考系。为定量描述物体的运动又必须在参考系上建立坐标系。

2. *物理模型*

真实的物理世界是非常复杂的。在具体处理时必须分析各种因素对所涉及问题的影响，忽略次要因素，突出主要因素，提出理想化模型。质点和刚体是我们在物理学中遇到的最初的两个物理模型，以后我们还会遇到许多其他理想化模型。

读者在学习中要着重体会：每一个物理模型是在什么条件下提出的，如何根据具体问题建立理想化模型。培养这种能力对提高一个人的科学素养是非常重要的。

质点适用的范围是：或者是物体自身的线度远远小于物体运动的空间范围；或者是物体做平动。如果一个物体在运动时，上述两个条件一个也不满足，我们可以把这个物体看成由许多个都能满足第一个条件的质点所组成，这就是所谓的质点系模型。

如果在所讨论的问题中，物体的形状及其在空间的方位取向是不能忽略的，而物体的细小形变是可以忽略不计的，则须引入刚体模型。刚体是各质元之间无相对位移的质点系。

3. *初始条件*

初始条件指开始计时时刻物体的位置和速度(或角位置、角速度)，即运动物体的初始状态。在建立了物体的运动方程之后，若要想预知未来某个时刻物体的位置及其运动速度，还必须知道在某个已知时刻物体的运动状态，即初始条件。

二、描述质点运动和运动变化的物理量

1. *位置矢量*

由坐标原点引向质点所在处的有向线段，通常用 $\boldsymbol{r}$ 表示，简称位矢或矢径。在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-2}$$

在平面极坐标系中

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0 \tag{1-3}$$

2. 位移

由起始位置指向终止位置的有向线段，就是位矢的增量，即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1-4}$$

位移是矢量，只与始、末位置有关，与质点运动的轨迹及质点在其间往返的次数无关。

路程是质点在空间运动所经历的轨迹的长度，恒为正，用符号 s 表示。路程的大小与质点运动的轨迹形状有关，还与质点在其间往返的次数有关。故在一般情况下

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s \tag{1-5}$$

但在 $\Delta t \to 0$ 时，有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s \tag{1-6}$$

由于矢量的增量既有大小的改变又有方向的改变，故应区分 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 与 $\mathrm{d}r$。

3. 速度与速率

平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-7}$$

平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-8}$$

因此，平均速度的大小 $|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$（平均速率）。

质点在 t 时刻的瞬时速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-9}$$

质点在 t 时刻的速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

由式(1-6)知

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \tag{1-11}$$

可见瞬时速度的模就是瞬时速率。

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-12}$$

式中，$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$，分别称为速度在 x 轴、y 轴、z 轴的分量。

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}_0 \tag{1-13}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}_0$ 为轨道切线方向的单位矢量。

位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 是描述质点机械运动的状态参量。

4. 加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

加速度是描述质点速度变化率的物理量。

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-15}$$

式中，$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$，分别称为加速度在 x 轴、y 轴、z 轴的分量。

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0=a_\tau\boldsymbol{\tau}_0+a_n\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n \tag{1-16}$$

式中，$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$ 是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在轨迹切线方向和法线方向的分量式。a_τ 是速度大小变化而产生的加速度，a_n 是速度方向变化而产生的加速度。由 a_τ 和 a_n 可以判断质点的运动：

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=0\quad(\rho\to\infty)\ \text{直线运动}\quad\begin{cases}a_\tau\neq0 & \text{变速直线运动}\\ a_\tau=C & \text{匀变速直线运动}\\ a_\tau=0 & \text{匀速直线运动}\end{cases}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}\neq0\quad\text{曲线运动}\quad\begin{cases}a_\tau\neq0,\rho\neq C' & \text{一般曲线运动}\\ a_\tau\neq0,\rho=C' & \text{变速圆周运动}\\ a_\tau=C'',\rho=C' & \text{匀变速圆周运动}\\ a_\tau=0,\rho=C' & \text{匀速圆周运动}\end{cases}$$

式中，C，C'，C''分别为不同的常量。

从上面可以看出，法向加速度 a_n 是否为零，是判断质点做直线运动还是做曲线运动的充分必要条件。

对于加速度，应明确：

(1) 加速度具有矢量性，它的方向总是与速度变化($\Delta\boldsymbol{v}$)的方向一致，而不一定与速度($\boldsymbol{v}$)的方向一致。

(2) 加速度具有瞬时性。

(3) 要分清速度与加速度是两个不同的概念。速度大时，加速度不一定大；速度为零时，加速度不一定为零。反之，加速度为零时，速度不一定为零；速度增大时，加速度不一定也在增大，它可能在减小。这主要看速度的变化率$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$是大于零，还是小于零。

三、运动方程与轨道方程

质点的位置矢量随时间变化的函数关系式，称为质点的运动方程：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-17a}$$

在直角坐标系中为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t) \tag{1-17b}$$

对于描述质点运动规律来说，运动方程是至关重要的，确定质点的运动方程是运动学的重要任务之一。有了运动方程，我们就可以知道任意时刻质点的位置和速度，即知道该时刻质点的运动状态。如平抛运动，它的运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

或写成矢量式

$$\boldsymbol{r} = v_0 t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}$$

上式是选取水平初速度$\boldsymbol{v}_0$的方向为Ox轴的正向，铅垂向下为Oy轴的正向。

质点运动时在空间所经历的路径称为轨道。轨道的数学表达式称为轨道方程，在直角坐标系中为

$$y = f(x) \tag{1-18a}$$

或

$$x = g(y) \tag{1-18b}$$

如上述的平抛运动中，消去运动方程中的时间t，得到的轨道方程

$$y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

为一抛物线方程。

四、质点运动的图线描述

质点的运动可以用运动方程来描述，也可以通过图线形象直观地来描述。用图线描述运动或物理量之间的关系，是物理学中常用的方法，必须熟悉这种方法。

1. 位置—时间图线(x—t 图)

表示质点位置随时间变化关系的曲线。曲线上的某点(如图1-1中的点A)给出某时刻t质点的位置为x，曲线上该点切线的斜率表示该时刻质点(瞬时)速度的大小，即$v=\dfrac{dx}{dt}=\tan\alpha$。

如平抛运动，$x=v_0t$，$y=\dfrac{1}{2}gt^2$，x—t 图是一条过原点的直线[如图1-2(a)所示]，其斜率为v_0。y—t 图是一条过原点的抛物线[如图1-2(b)所示]，线上各点的斜率随时间逐渐增大，说明质点沿y轴做加速运动。

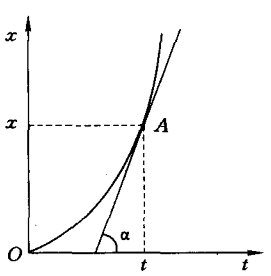


图1-1　质点的x—t图

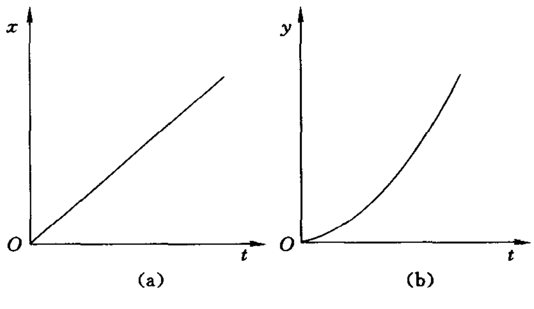


图1-2　平抛运动的位置—时间图线

2. 速度—时间图线(v—t 图)

表示质点速度大小随时间变化关系的曲线。曲线上的某点(如图1-3中点B)表示某时刻t质点的速度大小为v。曲线上某点(如点B)切线的斜率表示该时刻质点(瞬时)加速度的大小，即$a=\dfrac{dv}{dt}=\tan\beta$。曲线与纵坐标的交点表示$t=0$时刻质点的速度$v_0$。曲线与横坐标$Ot$所包围

的面积，即为从 0 到 t 这段时间间隔内质点的位移。面积在横坐标上方，则位移为正；若在下方，则为负。而面积的绝对值之和，则表示质点所经历的路程。

3. 加速度—时间图线（$a—t$ 图）

表示加速度随时间变化关系的曲线。曲线上的点表示该时刻质点加速度的大小。在匀变速直线运动中，加速度是一常量，则它的 $a—t$ 图应是一条与横坐标平行的直线，如图1-4所示。

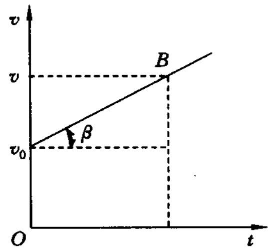


图1-3 质点的 $v—t$ 图

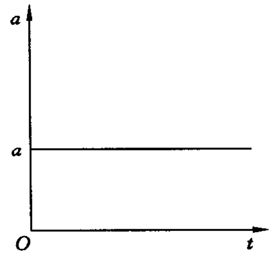


图1-4 匀变速直线运动的 $a—t$ 图

五、平面曲线运动

1. 斜上抛运动

若以抛出点为原点，水平前进方向为 x 轴正方向，向上为 y 轴正方向，则

（1）运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

（2）速度方程为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - g t \end{cases}$$

（3）在最高点时 $v_y = 0$，故达到最高点的时间为

$$t_H = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \tag{1-19}$$

所以射高为

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \tag{1-20}$$

飞行总时间 $t = 2t_H$。

水平射程为

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{1-21}$$

（4）轨道方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} x^2 \tag{1-22}$$

2. 圆周运动

（1）描述圆周运动的两种方法：

线量	角量
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}s\boldsymbol{\tau}_0$	$\mathrm{d}\theta$
$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}_0=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0$	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0+\dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}_0+\dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0$	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

(1-23)

(2) 线量与角量的关系：

$$\mathrm{d}r=R\mathrm{d}\theta$$

$$v=R\omega$$

$$a_\tau=R\beta,a_n=R\omega^2 \tag{1-24}$$

(3) 匀角加速(即 $\beta=$常数)圆周运动：可与匀加速直线运动类比，故有

$$\omega=\omega_0+\beta t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0) \tag{1-25}$$

(4) 匀速率圆周运动(即 $a_\tau=0$)：它在直角坐标系中的运动方程为

$$\begin{cases}x=R\cos\omega t\\ y=R\sin\omega t\end{cases} \tag{1-26}$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1-27}$$

3. 匀变速率(即 $a_\tau=$常数)的曲线运动

以轨道为一维坐标轴，以弧长为坐标，亦可与匀加速直线运动类比而有

$$v=v_0+a_\tau t$$

$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_\tau t^2$$

$$v^2-v_0^2=2a_\tau(s-s_0) \tag{1-28}$$

六、相对运动的概念

(1) 我们只讨论两个参考系的相对运动是平动而没有转动的情况。设相对于观察者静止的参考系为 S，相对于 S 系做平动的参考系为 S' 系，则运动物体 A 相对于 S 系和 S' 系的位矢、速度、加速度变换关系分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{AS}&=\boldsymbol{r}_{AS'}+\boldsymbol{r}_{S'S}\\ \boldsymbol{v}_{AS}&=\boldsymbol{v}_{AS'}+\boldsymbol{v}_{S'S}\\ \boldsymbol{a}_{AS}&=\boldsymbol{a}_{AS'}+\boldsymbol{a}_{S'S}\end{aligned} \tag{1-29}$$

(2) 上述变换关系只在低速(即 $v\ll c$)运动条件下成立。如果 S' 系相对于 S 系有转动，则式(1-29)中的速度变换关系亦成立，而加速度变换关系不成立。

重点、难点分析

一、关于矢量性

(1) 注意区分矢量 $\boldsymbol{A}$ 的增量的模 $|\Delta\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1|$ 和模的增量 $\Delta A=|\boldsymbol{A}_2|-|\boldsymbol{A}_1|$。在运动学中要区分：

$$\begin{cases}\text{位矢的增量的模} & |\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| \\ \text{位矢的模的增量} & \Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{速度的增量的模} & |\Delta \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \\ \text{速度的模的增量} & \Delta v = |\boldsymbol{v}_2| - |\boldsymbol{v}_1|\end{cases}$$

上述关系可用图1-5表示。

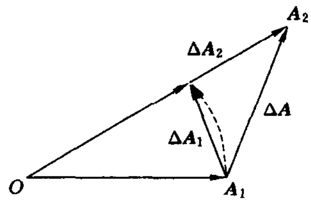


图1-5 矢量的增量

图中 $\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1$，表示矢量的增量，故矢量增量的模当然表示为 $|\Delta \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1|$，而 $\Delta A = |\Delta \boldsymbol{A}_2| = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1|$，表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模的增量。

由此可知

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \begin{cases}\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = v & \text{表示速度的大小} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r & \text{表示位矢的模的变化率，它表示速度径向分量的大小}\end{cases}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \begin{cases}\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a & \text{表示加速度的大小} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_\tau & \text{表示切向加速度大小}\end{cases}$$

（2）切忌将矢量与其模连等。例如，等式 $\Delta \boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} = 4.47\ \mathrm{m}$ 就是一种错误的书写形式。

（3）用矢量方法来描述物理规律，其优越性在于：① 具有鲜明的物理意义；② 简洁的数学形式及对于各种坐标系保持不变的形式。具体运算时，常将各矢量写成坐标分量式，如一个做平面曲线运动的质点，其加速度 $\boldsymbol{a}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$$

即如图1-6所示。

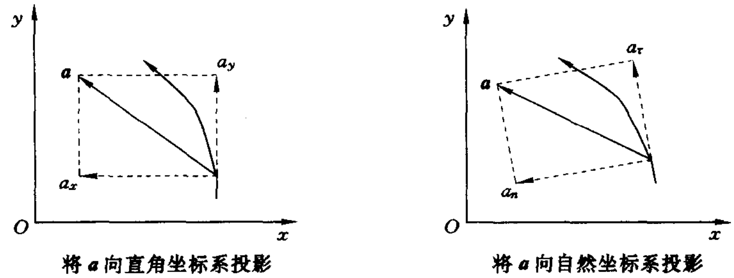


图1-6 加速度分解

二、关于瞬时性

在中学读者所遇到的物理量都是恒量，如匀加速度（即 $\boldsymbol{a}$＝常量），恒力作用（即 $\boldsymbol{F}$＝常量）。但在大学物理中我们接触到的基本上是变量，如 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ 等。因此，必须应用微积分的知识。

在运动学中，从运动方程求速度、加速度主要是求导的方法；从速度、加速度和初始条件求

运动方程主要是用积分的方法。当被积函数的变量与积分元的变量不一致时要通过恒等变换使得两者一致。

例如，一质点的加速度 $a=3-5x$，求其速度表示式。

显然，若只是简单地写成下式：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3-5x$$

$$\mathrm{d}v=(3-5x)\mathrm{d}t$$

是不能完成题目所求的。因为等式右边被积函数$(3-5x)$是 x 的函数，而积分变量是 t。为完成这个积分，须进行下面的恒等变换：

因为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

所以

$$v\mathrm{d}v=(3-5x)\mathrm{d}x$$

若设初始条件为 $x_0=0$，$v_0=0$，则有

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(3-5x)\mathrm{d}x$$

积分解得

$$v=\sqrt{6x-5x^2}$$

三、关于相对性

式(1-29)描述的是同一个运动在两个平动参考系中的运动学量之间的转换关系。正确运用式(1-29)的关键是明确每个运动学量与观察者之间的关系，即要区分“牵连”、“相对”、“绝对”等物理量。例如，$\boldsymbol{r}_{S'S}$为牵连位矢，$\boldsymbol{r}_{AS'}$为相对位矢，$\boldsymbol{r}_{AS}$为绝对位矢。

遵从式(1-29)适用的条件和范围是正确运用的另一个关键。

四、自然坐标系

大家不太熟悉，因而是难点之一。这里的关键是记住下面一组公式并能熟练应用：

$$\begin{cases}v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\[2ex] a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex] a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=\dfrac{v^2}{R}\end{cases}$$

例如：一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=bt-\frac{1}{2}ct^2$运动，b，c 均为常数，且 $b>\sqrt{Rc}$，则其切向加速度和法向加速度相等所经历的最小时间是多少？

解　由于 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b-ct$，$a_\tau=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-c$，$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$

故　当 $a_\tau=a_n$ 时，

$$\frac{(b-ct)^2}{R}=|-c|$$

$$t_{\min}=\frac{b}{c}-\sqrt{\frac{R}{c}}$$

解题方法和要点

一、运动学的两类问题

（1）已知运动方程求速度、加速度和轨道，这是运动学的第一类问题。求解这类问题应用微分法，如题目已给出运动方程，这时可直接应用式(1-12)和式(1-15)，由微分法求出速度和加速度(例1-1)；如题目只规定了质点的运动状态，则应当先建立运动方程，然后再求速度和加速度。

（2）已知加速度和初始条件求速度、运动方程和轨道，这是运动学的第二类问题。求解这类问题应用积分法，通过一次积分求出速度，再积分一次便得到运动方程(例1-2)。

二、相对速度的计算

（1）几何法：首先搞清楚题目所涉及的各个速度是哪个物体相对于哪个参照系(或哪个物体)的速度，然后依据速度合成定理认真画出矢量图，最后由矢量图判断和计算待求速度的大小和方向。采用几何法，一般无须建立坐标系。

（2）分析法：和几何法一样，首先弄清题中所言速度是谁对谁的速度，然后建立适当的坐标系，由已知速度矢量画出草图，利用草图计算各投影量，最后依据速度合成定理求合成速度(例1-3)。

解 题 示 例

例1-1 已知质点的运动方程为 $x=2b\cos\omega t$，$y=b\sin\omega t$，其中 b 和 ω 是常数。

（1）写出质点的 $\boldsymbol{r}(t)$ 表达式；

（2）求质点运动的轨道、速度和加速度，并图示之；

（3）求$\boldsymbol{v}$ 和$(-\boldsymbol{r})$的夹角；

（4）在一个周期内，哪些时刻速度与加速度互相垂直？

解 （1）质点的 $\boldsymbol{r}(t)$ 表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=2b\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

（2）由质点的运动方程消去时间 t，得轨道方程

$$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

可见，质点的轨道为一椭圆，其长半轴为$2b$、短半轴为 b。

由速度和加速度的定义，易知

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=-2b\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=-2b\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$=-\omega^2(2b\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j})=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

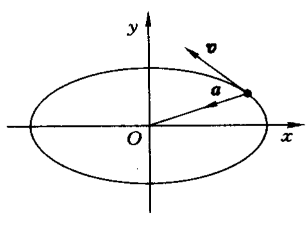


图1-7

据轨道方程，可画出质点的运动轨道，如图1-7所示。速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向沿轨道切线，由上面的计算结果知，加速度 $\boldsymbol{a}$ 平行于径矢 $\boldsymbol{r}$，指向椭圆的中心 O 点。

(3) 据矢量数量积的公式，有

$$\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{r}) = vr\cos\alpha$$

式中，α 即 $\boldsymbol{v}$ 与 $(-\boldsymbol{r})$ 的夹角，由上式得

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{r})}{vr} = \frac{(-2b\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j})(-2b\cos\omega t\boldsymbol{i} - b\sin\omega t\boldsymbol{j})}{b\omega\sqrt{1+3\sin^2\omega t}\cdot b\sqrt{1+3\cos^2\omega t}}$$

$$= \frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\sin^2 2\omega t}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\sin^2 2\omega t}}$$

(4) 由矢量代数知，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 垂直的条件为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$$

在本题中，因 $\boldsymbol{a}//(-\boldsymbol{r})$，所以上述条件化为

$$\sin 2\omega t = 0$$

由上式解得

$$t = k\frac{T}{4}$$

令 $k=0,1,2,3$，得一个周期内 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 垂直的时刻为 $t=0, T/4, T/2, 3T/4$。

例1-2 一个正在行驶的汽艇在关闭发动机后，具有一个与速度相反的加速度，其大小与速度平方成正比，即 $a=-kv^2$，式中 k 为常数，证明

(1) 在发动机关闭后，汽艇在 t 时刻的速度可表示为 $\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt$；

(2) 在时间 t 内，汽艇行驶的距离为 $x=\frac{1}{k}\ln(kv_0t+1)$；

(3) 汽艇在行驶距离 x 后的速度为 $v=v_0e^{-kx}$。

证 (1) 根据加速度的定义和初始条件，有

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

即

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -k\int_0^t dt$$

得汽艇的速度 v 和时间 t 的关系为

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt \tag{1}$$

(2) 由速度的定义和上面计算的结果，有

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{v_0}+kt}, \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{dt}{\frac{1}{v_0}+kt}$$

积分后，便是到汽艇行驶距离 x 和时间 t 的关系为

$$x = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) \tag{2}$$

(3) 由式(1)和式(2)可得

$$v = \frac{1}{\frac{1}{v_0}+kt}, \quad kt = \frac{e^{kx}-1}{v_0}$$

将后式代入前式，便得到

$$v = v_0 e^{-kx}$$

如果本题只需求证速度 v 和距离 x 的关系，也可按下述方法来证明，因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\int_0^k \mathrm{d}x$$

得

$$v = v_0 e^{-kx}$$

例1-3 飞机在某高度的水平面上飞行，机身的方向是向西偏南15°，飞机在飞行时遇上西南风，风速大小为100 km/h，结果飞机向正西方向运动，求飞机相对于地面及相对于风的速度。

解法一 由几何法求解

由题意知：$\boldsymbol{v}_{机风}$（即$\boldsymbol{v}_{pa}$）与东西方向夹角为15°；

$\boldsymbol{v}_{风地}$（即$\boldsymbol{v}_{ae}$）由西南指向东北，大小为100 km/h；

$\boldsymbol{v}_{机地}$（即$\boldsymbol{v}_{pe}$）指向正西。

按速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{pe} = \boldsymbol{v}_{pa} + \boldsymbol{v}_{ae}$$

据此作速度矢量图（图1-8），由正弦定理得

$$\frac{v_{pe}}{\sin 30^\circ} = \frac{v_{ae}}{\sin 15^\circ}$$

故

$$v_{pe} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}v_{ae} = 193.2 \quad \mathrm{km/h}$$

同理

$$v_{pa} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}v_{ae} = 273.2 \quad \mathrm{km/h}$$

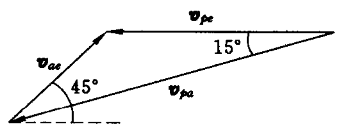


图1-8

解法二 由分析法求解

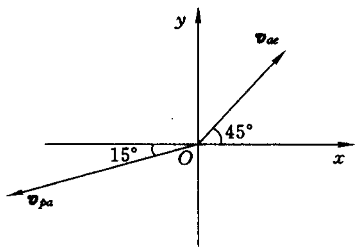


图1-9

选坐标系如图1-9，x 轴沿正东方向，y 轴沿正北方向，按题设作草图，求各速度的投影量

$$v_{aex} = 100\cos 45^\circ = 70.71 \quad \mathrm{km/h}$$

$$v_{aey} = 100\sin 45^\circ = 70.71 \quad \mathrm{km/h}$$

$$v_{pax} = v_{pa}\cos(180^\circ + 15^\circ) = -v_{pa}\cos 15^\circ$$

$$v_{pay} = v_{pa}\sin(180^\circ + 15^\circ) = -v_{pa}\sin 15^\circ$$

按速度合成定理

$$v_{pex} = v_{pax} + v_{aex} = 70.71 - v_{pa}\cos 15^\circ \qquad (1)$$

$$v_{pey} = v_{pay} + v_{aey} = 70.71 - v_{pa}\sin 15^\circ = 0 \qquad (2)$$

由式(2)和式(1)，解得

$$v_{pa} = 273.2 \quad \mathrm{km/h}$$

$$v_{pe} = v_{pex} = -193.2 \quad \mathrm{km/h}$$

讨 论 题

1. 两辆车 A 和 B，在笔直的公路上同向行驶，它们从同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行驶的距离 x 与行驶时间 t 的函数关系式：$x_A=4t+t^2$，$x_B=2t^2+2t^3$(SI)。

(1) 它们刚离开出发点时，哪一辆车行驶在前面？

(2) 出发后，两辆车行驶距离相同的时刻是多少？

(3) 出发后，B 车相对 A 车速度为零的时刻是多少？

2. 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$(SI)，已知 $t=0$时，质点位于 $x_0=10$ m 处，初速度 $v_0=0$。试求其位置和时间的关系式。

3. 一人自原点出发，25 s 内向东走 30 m，又10 s 内向南走 10 m，再 15 s 内向正西北走 18 m。求在这 50 s 内，

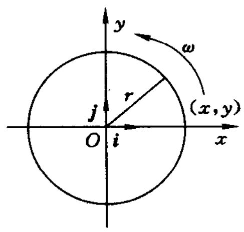
(1) 平均速度的大小和方向；

(2) 平均速率的大小。

4. (1) 对于在 xy 平面内，以原点 O 为圆心做匀速圆周运动的质点，试用半径 r，角速度 ω 和单位矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示其 t 时刻的位置矢量(已知在 $t=0$时，$y=0$，$x=r$，角速度 ω 如题4图所示)；

(2) 由(1)导出速度 $\boldsymbol{v}$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 的矢量表示式；

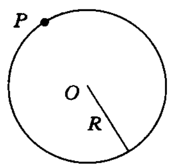
(3) 试证加速度指向圆心。



题4图

5. 一物体以初速度$\boldsymbol{v}_0$、仰角 α 由地面抛出，并落回到与抛出处同一水平面上。求地面上方该抛体运动轨道的最大曲率半径与最小曲率半径。

6. 如题6图所示，质点 P 在水平面内沿一半径为 $R=2$ m 的圆轨道转动。转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega=kt^2$(k 为常量)。已知 $t=2$ s 时，质点 P 的速度值为32 m/s。试求$t=1$ s时，质点 P 的速度与加速度的大小。



题6图

7. 一飞机驾驶员想往正北方向航行，而风以60 km/h 的速度由东向西刮来，如果飞机的航速(在静止空气中的速率)为180 km/h，则驾驶员应取什么航向？飞机相对于地面的速率为多少？

练 习 题

一、选择题

1-1 一质点沿 x 轴做直线运动，其 v—t 曲线如题1-1图所示，如 $t=0$ 时，质点位于坐标原点，则 $t=4.5$ s 时，质点在 x 轴上的位置为 (　　)

(A) 5 m　　(B) 2 m　　(C) 0　　(D) −2 m　　(E) −5 m

1-2 题1-2图中 p 是一圆的竖直直径 pc 的上端点，一质点从 p 开始分别沿不同的弦无摩擦下滑时，到达各弦的下端所用的时间相比较是 (　　)

(A) 到 a 用的时间最短　　(B) 到 b 用的时间最短

(C) 到 c 用的时间最短　　(D) 所用时间都一样