■配人民教育A版■

普通高中课程标准实验教科书

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

高中数学

2006～2007

教学与测试

新教材

教师用书

必修4

苏州大学出版社

配人民教育A版
普通高中课程标准实验教科书

高中数学 教学与测试

教师用书
（必修4）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试.必修4:教师用书/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. —苏州:苏州大学出版社,2006.8

配人民教育A版普通高中课程标准实验教科书

ISBN 7-81090-706-9

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第083065号

高中数学教学与测试

教师用书

(必修4)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

江苏省新华书店经销

常州市武进第三印刷有限公司印装

(地址:常州市武进区湟里镇村前街 邮编:213154)

开本787×1092 1/16 印张8.25 字数200千

2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷

ISBN 7-81090-706-9/G·351 定价:13.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高中数学教学与测试》编委会

（人民教育A版·必修4）

前　　言

PREFACE

普通高中课程标准实验教科书(数学)已在广东、山东、宁夏、海南、江苏开始实验,并在全国部分省市扩大试用.为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书,我部聘请了部分参加教材编写的中学特级教师和高级教师,经过精心策划,编写了与人民教育A版教材配套的"高中数学教学与测试"系列用书.它既可作为学生的练习用书,也可作为教师的教学参考用书.根据广大师生的使用意见及建议,本次修订将"高中数学教学与测试"系列用书按必修5个模块重新划分,本书是必修1模块.

本模块分学生用书和教师用书两册.学生用书包含三角函数、平面向量、三角恒等变换三章.全书的编写依据课标,紧扣课本,配合课堂教学进行同步训练.原则上每节1课时,共40节.本次修订重新调整体例结构,每节新课按[双基演练]、[范例解读]、[归纳点拨]及[测试反馈]编排;习题课按[双基演练]、[范例解读]、[测试反馈]编排;复习课按[双基演练]、[测试反馈]编排.为方便使用,学生用书采用1+1模式:[双基演练]、[范例解读]、[归纳点拨]自成一册;[测试反馈]也独立成册,供课后练习使用.教师用书包括相应学生用书的全部题目及详细的例题、习题解答.同时,为方便教师使用,教师用书另设[教学建议],对重点、难点及教法作精要的解析.

本书由责任编委、执行编委及顾问策划,全体编委会集体讨论编写大纲,最后由三位特级(高级)教师执笔:李平龙(南京市外国语学校),第一章;寇恒清(连云港市教研室),第二章;王广余(连云港市新海中学),第三章.

各章由责任编委、执行编委及顾问把关.苏州大学数学科学学院的三位老师负责审校:杨建明,第一章;潘洪亮,第二章;邱尔依,第三章.

多年来,全国各地的中学教师、学生以及社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持,对于这次根据普通高中课程标准实验教科书编写的"高中数学教学与测试"提出了许多有益的建议,在此一并表示感谢.

我们真诚地希望使用本书的教师、学生和家长能及时地将使用的情况和意见反馈给我们,以便我们作进一步的修改和完善.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2006年6月

目　录

CONTENTS

第一章　三角函数

第二章　平面向量

第三章　三角恒等变换

第一章　三角函数

1. 任 意 角

教学建议

从实际问题的需要出发推广角的概念，进而引入正角、负角、零角，由于在直角坐标系中，角的始边是 x 轴的正半轴，因此抓住角的终边位置是分析角的性质的重要方法.

双基演练

1. $1000°$ 的角是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(A)

A. 第一象限角　　　　B. 第二象限角　　　　C. 第三象限角　　　　D. 第四象限角

解　$\because -1000°=-3\times360°+80°$，$\therefore$ 选 A.

2. 以下四个命题中，真命题是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(C)

A. 小于 $90°$的角是锐角　　　　　　　　　　B. 第二象限角是钝角

C. 钝角是第二象限角　　　　　　　　　　　D. 负角不能是第一象限角

3. 与 $-300°$角终边相同的角的集合是 $\underline{\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}}$.

4. 若 2α 与 $-120°$角的终边相同，则 $\alpha=$ $\underline{k\cdot180°-60°,k\in\mathbf{Z}}$.

解　$\because 2\alpha$ 与 $-120°$角的终边相同，$\therefore 2\alpha=k\cdot360°-120°,k\in\mathbf{Z}$.

从而 $\alpha=k\cdot180°-60°,k\in\mathbf{Z}$.

范例解读

例 1　写出满足下列条件的角的集合：

(1) 终边在 x 轴负半轴上的角的集合；

(2) 终边在坐标轴上的角的集合；

(3) 终边在第二象限的角的集合.

分析　根据任意角的概念知，终边相同的角之间相差 $360°$的整数倍，表示终边相同的角或落在某个区域内的角时，一般先写出 $0°\sim360°$满足条件的角，然后加上 $k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.

解　(1) 终边落在 x 轴负半轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) 终边落在 x 轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=m\cdot360°,m\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=m\cdot360°+180°,m\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$；同理可得，终边在 y 轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}$.

故终边在坐标轴上的角的集合是$\{\alpha|\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3) 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内终边在第二象限的角 α 满足 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. 所以终边在第二象限的角的集合是 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

说明 本例结果可作为基本结论在复杂问题中直接应用;需指出的是,终边在坐标轴上的角不属于任何象限.

例 2 若角 α 的终边与 30° 角的终边相同,求在 $[-360^\circ, 360^\circ)$ 内与 $\frac{\alpha}{3}$ 终边相同的角.

分析 先由条件写出 α 的表达式,推出 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围,再根据给定范围即可得到所求的角.

解 由角 α 的终边与 30° 角的终边相同,可得

$\alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ (k \in \mathbf{Z})$,故 $\frac{\alpha}{3} = k \cdot 120^\circ + 10^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

根据题意可得 $-360^\circ \leqslant k \cdot 120^\circ - 10^\circ < 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore$ k 的取值为 0,1,2,-1,-2,-3.

故所求角有 6 个,它们分别是 $10^\circ, 130^\circ, 250^\circ, -110^\circ, -230^\circ, -350^\circ$.

说明 在给定范围内确定角的问题,有两种处理思路:一种思路是根据条件 $k \in \mathbf{Z}$,采用观察和特殊值检验的方法求出 k 的值,求解时需注意不要漏解;另一种思路是解不等式,根据 $k \in \mathbf{Z}$ 求出 k 的值.

归纳点拨

角的概念推广以后,研究角不仅要考虑其大小,还更要注意其方向(正、负),否则易犯错误(如测试反馈 4);要判断一个角是第几象限角,只需在 0° 到 360° 或 -180° 到 180° 的范围内找出与其终边相同的角便可,写出终边落在某个区域内角的集合时,应按逆时针方向由小到大书写;总之,数形结合是学习的关键.

测试反馈

1. 若角 α,β 终边相同,则 $\alpha - \beta$ 的终边落在 (A)

A. x 轴的正半轴上　　B. y 轴的正半轴上

C. x 轴的负半轴上　　D. y 轴的负半轴上

解 因 $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$,故选 A.

2. 若 α 是第四象限角,则 $180^\circ - \alpha$ 是 (C)

A. 第一象限角　B. 第二象限角　C. 第三象限角　D. 第四象限角

解 取 $\alpha = -45^\circ$,可知 A,B,D 选项是错误的,从而选 C;也可从形上求解.

3. 与 -3020° 角的终边相同的最小正角是 $\underline{\quad 220^\circ \quad}$.

解 $\because$ $-3020^\circ = -9 \times 360^\circ = 220^\circ$,$\therefore$ 所求最小正角为 220°.

4. 若将时钟拨快 30 分钟,则时针转动的角为 $\underline{\quad -15^\circ \quad}$,分针转动的角为 $\underline{\quad -180^\circ \quad}$.

解 因为 1 小时时针、分针分别按顺时针旋转了 30°、360°,所以考虑到旋转方向,时钟拨

快 30 分钟,时针、分针分别转了 $-15°$, $-180°$.

5. 已知角 α 的终边经过点 $P(1,1)$,试写出角 α 的集合 A,并把集合 A 中在 $-720°$ 到 $360°$ 间的角写出来.

解 由于终边经过点 $P(1,1)$的一个角是 $45°$,所以终边经过点 $P(1,1)$的角 α 的集合 $A=\{x|x=k\cdot 360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$. 集合 A 中在 $-720°$到 $360°$间的角分别为 $-675°$, $-315°$, $45°$.

6. 已知 α 角的终边与 $288°$的终边相同.试求在$[0°,360°]$内与$\frac{\alpha}{4}$的终边相同的角的集合.

解 $\because$ α 角的终边与 $288°$的终边相同,$\therefore$ $\alpha=k\cdot 360°+288°(k\in\mathbf{Z})$,

即 $\frac{\alpha}{4}=k\cdot 90°+72°(k\in\mathbf{Z})$,

又 $0°\leqslant\frac{\alpha}{4}\leqslant 360°$ 且 $k\in\mathbf{Z}$,$\therefore$ $k=0,1,2,3$,$\therefore$ 所求的集合为$\{72°,162°,252°,342°\}$.

7. 已知 $\alpha=120°$,写出满足下列条件的 β 角的集合:

(1) 角 β 终边与 α 终边关于原点对称;

(2) 角 β 终边与 α 终边关于 x 轴对称;

(3) 角 β 终边与 α 终边关于 y 轴对称;

(4) 角 β 终边与 α 终边关于直线 $y=x$ 对称.

分析 借助于图形直观找到一个满足条件的 β 角便可.

解 (1) β 角的集合是$\{\beta|\beta=k\cdot 360°-60°,k\in\mathbf{Z}\}$;

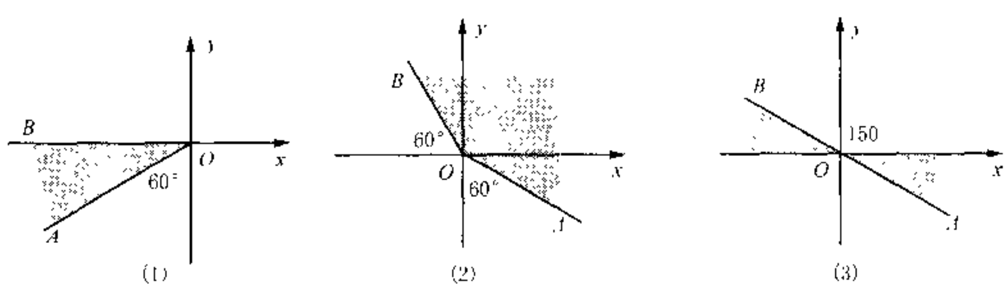
(2) β 角的集合是$\{\beta|\beta=k\cdot 360°-120°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(3) β 角的集合是$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(4) β 角的集合是$\{\beta|\beta=k\cdot 360°-30°,k\in\mathbf{Z}\}$.

说明 一般地,与 α 角终边关于原点、x 轴、y 轴、直线 $y=x$ 对称的角 β 的终边依次为$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+180°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{\beta|\beta=k\cdot 360°-\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+180°-\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+90°-\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

8. 如图,分别写出顶点在原点,始边为 Ox,终边落在阴影内(包括边界)的角 α 的集合.



(1) (2) (3)

解 (1) 图中以 OB 为终边的角可表示为 $k\cdot 360°-180°(k\in\mathbf{Z})$,因让 OB 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 $30°$后便与 OA 重合,故以 OA 为终边的角为 $k\cdot 360°+210°(k\in\mathbf{Z})$,故终边落在阴影部分角的集合为$\{\alpha|k\cdot 360°+180°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+210°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 图中以 OA 为终边的角可表示为 $k\cdot 360°-30°(k\in\mathbf{Z})$,因让 OA 经过阴影区域并按逆

时针方向旋转 150°得 OB，故以 OB 为终边的角为 $k\cdot 360^\circ+120^\circ(k\in\mathbf{Z})$，故终边落在阴影部分角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot 360^\circ-30^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360^\circ+120^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 180°而得到的，故终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha\mid k\cdot 180^\circ-150^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 180^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 弧度制

教学建议

本课的重点是弧度的概念，单位弧度的规定是产生角的弧度制度的关键；应引导学生通过比较两种度量制度，体会它们各自的特点以及在弧度制下弧长公式、扇形面积公式的简捷性以及引入弧度制的必要性.

双基演练

1. 5 rad 的角是 (D)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

2. 若 1°的圆心角所对的弧长为 1 m，那么这个弧所在圆的半径约为 (B)

A. 56 m　　B. 57 m　　C. 58 m　　D. 59 m

3. $-\frac{5}{3}\pi$ 的角化为角度制的结果为 <u>-300°</u>，135°的角化为弧度制的结果是 <u>$\frac{3\pi}{4}$</u>.

4. 若三角形的三内角之比为 $1:2:3$，则此三角形的最小内角的弧度数为 <u>$\frac{\pi}{6}$</u>.

范例解读

例 1 已知圆上的一段弧的弧长等于该圆内接正方形的边长，求这段弧所对圆周角的弧度数.

解 设圆的半径为 R，其内接正方形的边长为 a，则 $2R=\sqrt{2}a$，所以这段弧所对的圆心角为 $\theta=\frac{a}{R}=\sqrt{2}$，从而该弧所对圆周角的弧度数为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

说明 本题中先设圆半径 R，它在求解中起一个桥梁的作用，这也是"设而不求"策略的一种体现. 事实上，本题中的圆半径 R 可以是任意的，也是无法求出来的.

例 2 若扇形的周长为 30，当它的圆心角和半径各取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

分析 要求扇形面积的最大值，应建立关于扇形面积的目标函数.

解 设扇形的圆心角为 α，半径为 r，面积为 S，弧长为 l.

因为 $l+2r=30$，所以 $l=30-2r$.

$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(30-2r)\cdot r=-r^2+15r=-\left(r-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}$.

所以半径 $r=\frac{15}{2}$ 时，扇形的面积最大值为 $\frac{225}{4}$，此时扇形的圆心角为 $\frac{l}{r}=2\text{rad}$.

说明 以扇形的半径为自变量，面积是变元的二次函数，最值易于求解；而以中心角为自变量，则面积是变元的分式函数，较难求解. 因此，变元的选取显得尤为重要.

归纳点拨

在弧度制下角的大小是其所对的圆弧长与圆弧半径的比值，它与圆弧半径无关. 由于角与实数之间的一一对应关系，也可将角看成实数. 因此学习角必须双管齐下；根据 $\pi\text{rad}=180^\circ$ 可在两种度量制度间进行互化，应能够在弧度制下对相关结论进行重新表述，如终边相同的角的集合，弧长公式与扇形的面积公式.

测试反馈

1. -300° 的弧度数为 (C)

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{4\pi}{3}$　　C. $-\frac{5\pi}{3}$　　D. $-\frac{11\pi}{6}$

2. 把 $-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $2k\pi+\theta(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，使 $|\theta|$ 最小的 θ 值是 (A)

A. $-\frac{3\pi}{4}$　　B. $-\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

3. 若角 α 的终边经过点 $P(-1,-1)$，则用弧度制表示角 α 的集合是 $\underline{\left\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}}$.

4. 周长为 8，面积为 4 的扇形中心角的弧度数为 $\underline{2}$.

解 设扇形的中心角为 θ，半径为 R，则由题意知，

$2R+R\theta=8$，$\frac{1}{2}R^2\cdot\theta=4$，$\therefore R=2$，$\theta=2$.

5. 把下列各角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角：

(1) $\frac{101}{3}\pi$；(2) -10；(3) 880°，(4) -420°.

解 (1) $\frac{101}{3}\pi=32\pi+\frac{5}{3}\pi$，是第四象限角；

(2) $-10=-4\pi+(4\pi-10)$，是第二象限角；

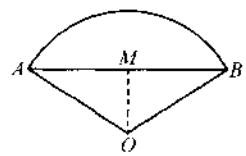
(3) $880^\circ=4\pi+\frac{8\pi}{9}$，是第二象限角；

(4) $-420^\circ=-4\pi+\frac{5\pi}{3}$，是第四象限角.

6. 在直径是 10 cm 的轮子上有一长为 6 cm 的弦，P 是弦的中点，轮子以 5 弧度/秒的角速度旋转，求经过 5 秒后点 P 转过的弧长.

解 由平面几何知，该弦的弦心距为 $\sqrt{5^2-3^2}=4$ cm.
设圆心为 O，则 OP 转过的角的大小为 $5\times5=25$ rad.
所以点 P 所转过的弧长为 $4\times25=100$ cm.
答 经过 5 秒后点 P 转过的弧长为 100 cm.

7. 一个半径为 R 的扇形，它的周长为 $\left(2+\frac{2\pi}{3}\right)R$. 求这个扇形所对应的弓形的面积.



解 如图，设扇形的中心角为 θ，
则 $2R+R\theta=\left(2+\frac{2\pi}{3}\right)R$，$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMA$ 中，$OM=R\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}R$，$AM=R\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

$\therefore S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{\pi}{3}R^2$，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$，

$\therefore S_{弓形}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}R^2$.

8. 设半径为 12 cm，弧长为 8πcm 的弧所对的圆心角为 α，其中 $0<\alpha<2\pi$，求出与角 α 终边相同的角的集合 A，并判断集合 A 是否为集合 $B=\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 的真子集.

解 由题意知 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{8\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi$. 与 α 角终边相同的角的集合为 $A=\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$. 设 $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{(4k+1)\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，由 $k\in\mathbf{Z}$，可知 $4k+1\in\mathbf{Z}$.

故 $x\in\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，即 $x\in B$. 又 $\frac{\pi}{6}\in B$，但 $\frac{\pi}{6}\notin A$. 所以 A 是 B 的真子集.

说明 可利用终边判断是否是真子集.

3. 任意角的三角函数(1)

教学建议

任意角的三角函数的意义是全章的基础，突出重点的关键在于使学生理解任意角的三角函数值(实为比值)是由该角的终边所在的位置确定的，而与角的终边上点的位置无关；三角函数值在各个象限内的符号可总结为：一正二正弦、三切四余弦.

双基演练

1. 使 $\lg(\cos x)$ 有意义的角 x 的终边在　　　　(D)

A. x 轴上方　　B. x 轴下方　　C. y 轴左方　　D. y 轴右方

2. $\sin2\cdot\cos3\cdot\tan4$ 的值　　　　(A)

A. 小于 0　　B. 大于 0　　C. 等于 0　　D. 不存在

3. 若角 α 的终边与单位圆交于 $P\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，则 $\sin\alpha=$ $\underline{\frac{4}{5}}$；$\cos\alpha=$ $\underline{-\frac{3}{5}}$；$\tan\alpha=$ $\underline{-\frac{4}{3}}$.

4. 若 α 为第三象限角，且 $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=-\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第__四__象限角.

解　∵ α 是第三象限角，∴ $\frac{\alpha}{2}$ 为第二、四象限的角，又 $\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant0$，∴ $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

范例解读

例 1　求函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

分析　要求原函数的值域，必须去掉函数解析式中的绝对值的符号，为此应对角 x 所在象限进行分类讨论.

解　若角 x 是第一象限角，则由 $\cos x>0$，$\tan x>0$ 知 $y=2$.

若角 x 是第二象限角，则由 $\cos x<0$，$\tan x<0$ 知 $y=-2$.

若角 x 是第三象限角，则由 $\cos x<0$，$\tan x>0$ 知 $y=0$.

若角 x 是第四象限角，则由 $\cos x>0$，$\tan x<0$ 知 $y=0$.

若角 x 是轴线角，则原函数没有定义.

综上知，原函数的值域为 $\{-2,0,2\}$.

说明　三角函数值的符号是由角所在象限确定的. 本题还可改编为：求函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

例 2　已知角 θ 的终边经过点 $P(-\sqrt{3},m)(m\neq0)$，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$. 试判断 θ 所在的象限，并求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

分析　先根据条件求出 m 的值，然后由三角函数的定义求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

解　由题意，得 $r=\sqrt{3+m^2}$，∴ $\frac{m}{\sqrt{3+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，∵ $m\neq0$，∴ $m=\pm\sqrt{5}$.

故角 θ 是第二或第三象限角.

当 $m=\sqrt{5}$时，$r=2\sqrt{2}$，点 P 的坐标为 $P(-\sqrt{3},\sqrt{5})$。

$\therefore \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$。

当 $m=-\sqrt{5}$时，$r=2\sqrt{2}$，点 P 的坐标为 $P(-\sqrt{3},-\sqrt{5})$。

$\therefore \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

说明 在本题中，由于求出的 m 值有两个，因此在求角 θ 的余弦和正切值时要分两种情况进行讨论.

归纳点拨

根据角的终边上任意一点的坐标，便可求出该角的三角函数值；当角的终边在 y 轴上时其正切函数值不存在；由于角与实数可建立一一对应，因此三角函数既可以看做以角为自变量的函数，又可以看做以实数为自变量的函数；要确定三角函数值的符号，只要确定该角所在的象限.

测试反馈

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(4,-3)$，则下列各式中正确的是 (C)

A. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$　　B. $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$　　C. $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$　　D. $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$

2. 若点 $P(\sin\alpha,\tan\alpha)$在第四象限，则角 α 为 (B)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

解 $\because P(\sin\alpha,\tan\alpha)$在第四象限，$\therefore \sin\alpha>0$ 且 $\tan\alpha<0$，$\therefore \alpha$ 为第二象限角.

3. $\cos 0+\sin\frac{\pi}{2}+\tan\pi+\cos\pi=$ __1__.

4. 当 α 为第三象限角时，式子$\frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}-\frac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}$的值为 __0__.

5. 判断下列三角函数式的符号：(1) $\frac{\sin 330^\circ\cdot\tan 53^\circ}{\cos 235^\circ\cdot\tan 145^\circ}$；(2) $\sin 3\cdot\cos 4\cdot\tan 5$.

解 (1) $\because 330^\circ,53^\circ,235^\circ,145^\circ$分别为第四、第一、第三、第二象限角，所以 $\sin 330^\circ<0$，$\tan 53^\circ>0$，$\cos 235^\circ<0$，$\tan 145^\circ<0$，从而$\frac{\sin 330^\circ\cdot\tan 53^\circ}{\cos 235^\circ\cdot\tan 145^\circ}<0$.

(2) 因为 3，4，5 弧度分别是第二、第三、四象限角，所以 $\sin 3>0$，$\cos 4<0$，$\tan 5<0$，从而 $\sin 3\cdot\cos 4\cdot\tan 5>0$.

6. 求函数 $f(x)=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{-\cos x}$的定义域.

解 由题意知$\begin{cases}-\sin x\geqslant 0,\\ -\cos x\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sin x\leqslant 0 & ①,\\ \cos x\leqslant 0 & ②.\end{cases}$

由①知，角 x 的终边在 x 轴及其下方；

由②知，角 x 的终边在 y 轴及其左方.

故角 x 的终边在第三象限或坐标轴的负半轴上，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid 2k\pi-\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi-\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

7. 已知角 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a \neq 0)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

解 ∵ $r=\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}=5|a|$，

∴ 当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；

当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

8. 已知 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha>0$. (1) 求角 α 的集合； (2) 求 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在象限；

(3) 试判断 $\tan\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

解 (1) 因为 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha>0$，所以角 α 的终边在第三象限，

故角 α 的集合为 $\left\{\alpha \mid 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2) 由(1)知 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}(k \in \mathbf{Z})$.

当 $k=2m(m \in \mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2m\pi+\frac{3\pi}{4}(m \in \mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角，

当 $k=2m+1(m \in \mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2m\pi+\frac{7\pi}{4}(m \in \mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

(3) 由 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角可知，$\tan\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}<0$.

4. 任意角的三角函数(2)

教学建议

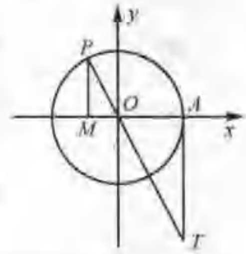
本课的难点是三角函数线的作法及其依据，抓住任意角三角函数的定义便可突破难点，单位圆中的三角函数线是三角函数值的几何表示，利用单位圆中的三角函数线可以简捷、直观地解决一些三角函数问题.

双基演练

1. 若角 α 的正弦线与余弦线的数量互为相反数，那么 α 的终边在 (D)

A. x 轴上　　B. y 轴上　　C. 直线 $y=x$ 上　　D. 直线 $y=-x$ 上

2. 若 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，则下列不等式中成立的是 (A)



A. $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$　　B. $\sin\theta>\tan\theta>\cos\theta$

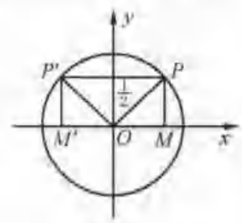
C. $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$　　D. $\cos\theta>\tan\theta>\cos\theta$

解　如图，θ 角的正弦线、余弦线、正切线依次为 MP，OM，AT，由图知 $MP>0$，$-1<OM<0$，$AT<-1$，故选 A.

3. 利用单位圆中的三角函数线比较大小：

(1) $\sin25^\circ$ __$<$__ $\sin150^\circ$；(2) $\cos\frac{\pi}{7}$ __$>$__ $\cos\frac{9\pi}{5}$；(3) $\tan\frac{\pi}{5}$ __$=$__ $\tan\frac{6\pi}{5}$.

4. 利用单位圆中的三角函数线确定满足 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的角 α 的集合是



$\left\{x\left|2k\pi+\frac{\pi}{6}\text{或 } x=2k\pi+\frac{5\pi}{6},x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

解　利用正弦线作出角 α 的终边如右图所示.

$\because$ 第一象限内满足条件的角与 $\frac{\pi}{6}$ 的终边相同，$\therefore$ $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$；

而在第二象限内满足条件的角与 $\frac{5\pi}{6}$ 的终边相同，$\therefore$ $\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

范例解读

例 1　利用单位圆中的三角函数线，确定下列各角的取值范围.

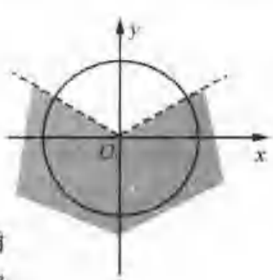
(1) $\sin\theta<\frac{1}{2}$；　(2) $\sin\theta<\cos\theta$.

解　(1) θ 的取值范围是：

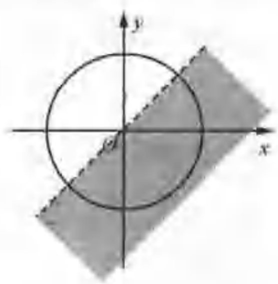
$\left\{\theta\left|2k\pi-\frac{7}{6}\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2) θ 的取值范围是：

$\left\{\theta\left|2k\pi-\frac{3}{4}\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.



(1)



(2)

说明　根据单位圆中的三角函数线求角的范围时，应先根据三角不等式作出角的终边所在的区域，然后再由此写出相应的角的集合.