

Continuum Damage Theory and Application

连续损伤理论与应用

唐雪松 郑健龙 蒋持平 著



人民交通出版社

China Communications Press

连续损伤理论与应用

唐雪松 郑健龙 蒋持平 著



人民交通出版社

China Communications Press

图书在版编目 (CIP) 数据

连续损伤理论与应用 / 唐雪松, 郑健龙, 蒋持平著.
北京: 人民交通出版社, 2006.8
ISBN 7-114-06079-3

I. 连... II. ①唐... ②郑... ③蒋... III. 损伤
(力学) IV. 0346.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 079318 号

书 名: 连续损伤理论与应用

著 作 者: 唐雪松 郑健龙 蒋持平

责任编辑: 李 斌

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpress.com.cn>

销售电话: (010) 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京交通印务实业公司

开 本: 787 × 980 1/16

印 张: 10.25

字 数: 172 千

版 次: 2006 年 8 月 第 1 版

印 次: 2006 年 8 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-114-06079-3

印 数: 0001 - 1000 册

定 价: 20.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

内 容 提 要

本书介绍了各类损伤材料的损伤本构关系与损伤演化方程、各向同性损伤与各向异性损伤问题和热弹性损伤问题的一般理论。另外,还对粘弹性各向同性损伤问题的本构关系进行了理论推导,介绍了材料细观损伤机理与材料宏观力学性能之间的联系及工程上实用有效的损伤本构模型,并对沥青混合料的疲劳问题、沥青路面的反射裂缝问题、金属构件的疲劳问题与钢筋混凝土结构的损伤破坏等若干工程实际问题,进行了理论分析与计算。

本书可供力学工作者、道路与桥梁工程的科技人员及其他专业科技工作者参考,亦可作为有关专业大学本科高年级学生和研究生教材或教学参考书。

前言

从 1958 年 Kachanov 研究金属蠕变破坏时提出材料损伤概念起, 损伤力学历经 40 多年的发展, 涌现出许多各种损伤力学理论, 但至今尚未出现比较公认的普遍理论。损伤力学已成为当前固体力学领域中一个活跃的研究分支。

Kachanov 损伤模型的核心思想是, 材料的损伤以材料有效承载面积的缩减来表征。由此引出损伤力学中的一个重要概念, 即有效应力的概念。在此基础上, 1971 年 Lemaitre 提出了著名的应变等效假设, 认为只要将无损材料本构方程中的 Cauchy 应力用有效应力代替, 即可得到含损伤材料的本构方程。经典损伤理论(或称 Kachanov 型损伤理论)也是在此基础上发展起来的, 由于有效应力定义的不一致性与各向异性情况下的不对称性, 将 Kachanov 损伤理论向各向异性损伤问题所作的推广就遇到很大的理论困难。另外, 经典损伤理论并不是严格遵循不可逆热力学基本理论建立的, 因此近些年来细观损伤力学的发展表明, 基于有效应力概念与应变等效假设的经典损伤理论具有局限性。

尽管对于耗散材料含内变量的普遍热力学理论在 20 世纪 70 年代初已经发展成熟, 以后经一批学者的努力, 损伤力学的研究被纳入到连续介质力学与不可逆热力学理论框架之内, 但不可逆热力学还没有被用于研究含损伤材料本构关系的一般形式。对于弹性、弹塑性、热弹性、粘弹性等损伤问题, 还没有像无损材料那样, 有一个统一的理论描述。而这无论从损伤力学理论体系的完整性与严密性, 还是从这门学科的工程应用来说, 都是至关重要的基本问题。

本书主要介绍如何在严格的不可逆热力学基础上,建立各类损伤材料的本构关系与损伤演化方程,并研究材料损伤的细观几何特征(微缺陷的分布、方向、形状等)与其宏观力学响应之间的关联,以及损伤力学在若干工程问题中的应用等问题。

关于损伤本构关系与损伤演化方程的不可逆热力学研究,涉及到弹性、弹塑性、热弹性、粘弹性等材料的各向同性与各向异性损伤问题。研究的基本思想,是以 Helmholtz 比自由能作为损伤材料热力学状态空间上的本构泛函,通过将其在热力学状态空间中表示成多项式级数形式,由热力学第二定律出发,来建立损伤本构关系与损伤演化方程;将连续损伤理论置于严格的不可逆热力学理论基础之上,以克服经典损伤理论的缺陷与局限性;显示损伤对材料宏观力学性能的影响,由若干损伤效应函数来描述。经典损伤理论中 1—D 型的应力—应变本构方程只是普遍形式的一阶近似结果。

连续损伤力学与细观损伤力学是损伤力学中两个平行发展的分支,目前这两个分支显示出相互结合、嵌套的发展趋势。本书中对于材料损伤的细观几何与其宏观力学性能之间的关系进行了一些探讨。材料损伤本构方程与损伤演化方程中所含的损伤效应函数的具体形式,可由两个途径获得:一是可由细观损伤力学解答来确定,由此可得到宏细观相结合的损伤理论;二是可直接由实验观测结果来拟合。损伤效应函数为连续损伤力学与细观损伤力学提供了一个结合点,它们恰好反映了材料损伤的细观几何与宏观损伤效应之间的关联。针对几种典型的细观损伤类型,利用细观损伤力学的解答,确定出了相应的损伤效应函数的解析表达式,以此阐明了由细观损伤力学解答获得损伤效应函数具体形式的方法。研究表明,微缺陷的形状、分布等因素,对于损伤材料的宏观力学性能具有重要影响。

针对各类损伤问题所发展的一般理论,对于损伤力学理论体系的严密性与完整性具有重要意义,且对于损伤力学理论的工程应用具有重要的参考价值。在此基础上,针对具体的工程损伤问题的特点和不同的精度要求,可以建立工程上实用有效的近似损伤理论与分析计算方法。

从微观甚至原子模拟模型直接进行计算,所面临的问题,一是计算量太大,二是问题太复杂。因此它不大可能替代那种唯象的基于结构参数模型的并且是不太严格的方法。

这反映了损伤本构理论研究中宏—微观并行发展并相互联结的趋势。宏观唯象的损伤理论如何更好地与细观损伤力学研究成果相结合,发展宏细观相结合的损伤理论,是今后需要深入研究的重要课题。

作 者

2005 年 12 月于长沙理工大学

目录

MULU

第一章 绪论	1
1.1 损伤力学发展概况	1
1.2 材料损伤状态的描述	2
1.2.1 各向同性损伤	2
1.2.2 各向异性损伤	5
1.3 应变等效假设与经典损伤理论	10
1.4 常用的细观损伤力学方法	11
1.4.1 Eshelby 等效夹杂法	12
1.4.2 Mori-Tanaka 法	12
1.4.3 微分法	13
1.4.4 自洽法	13
1.4.5 广义自洽法	14
1.5 损伤力学在疲劳问题中的应用	15
1.6 本书特点	16
第二章 连续介质热力学基本理论	17
2.1 引言	17
2.2 热力学第一定律	18
2.3 热力学第二定律	18
2.4 热力学定律的微分形式	21

2.5 热力学与力学中有关概念的比较	23
第三章 各向同性弹性损伤	26
3.1 引言	26
3.2 不可逆热力学基本方程	27
3.3 损伤本构方程的推导	28
3.4 分析讨论	30
3.5 损伤效应函数的确定	30
3.6 耗散势与损伤演化方程	33
3.7 本章小结	34
第四章 二维损伤问题的损伤效应函数	35
4.1 引言	35
4.2 共焦点椭圆三相模型	35
4.3 平面问题的描述	36
4.4 基本问题的复变函数解答	38
4.5 有效弹性模量 B 、 G 的预测公式	42
4.6 损伤效应函数曲线	44
4.7 本章小结	46
第五章 沥青混合料梁的弯曲疲劳损伤分析	48
5.1 引言	48
5.2 疲劳裂纹形成阶段的损伤分析	49
5.3 损伤场分布与疲劳裂纹形成寿命的封闭公式	51
5.4 疲劳裂纹扩展分析与疲劳寿命预测	53
5.5 疲劳过程中的刚度衰减与位移变化规律	56
5.6 本章小结	57
第六章 沥青路面反射裂缝问题的损伤力学守恒积分	58
6.1 引言	58
6.2 问题的提法	59
6.3 损伤力学守恒积分 J_D	60
6.4 应变能密度的近似守恒性	61
6.5 反射裂缝形成寿命的预估方法	63
6.6 本章小结	65

第七章 弹塑性损伤与金属轴对称构件中高周疲劳寿命预测	66
7.1 引言	66
7.2 局部塑性变形的处理	66
7.2.1 无损弹塑性本构关系	66
7.2.2 三角形轴对称单元	67
7.2.3 塑性附加荷载的有限元迭代计算格式	69
7.3 一种实用有效的弹塑性损伤本构关系与损伤演化方程	69
7.4 损伤力学—附加荷载—有限元法计算格式	70
7.5 算例与计算结果	71
7.6 本章小结	77
第八章 钢筋混凝土拱结构静载作用的损伤效应分析	79
8.1 引言	79
8.2 三参数损伤本构模型	80
8.3 损伤力学有限元数值算法	83
8.4 试验观测	84
8.5 数值结果与分析讨论	87
8.5.1 混凝土材料的损伤演化行为	87
8.5.2 垂向位移计算结果及与试验结果的比较	94
8.5.3 应变计算结果及与试验结果的比较	98
8.5.4 材料损伤对应力分布的影响	100
8.5.5 材料损伤对应变的影响	105
8.6 本章小结	107
第九章 各向异性弹性损伤	111
9.1 引言	111
9.2 连续热力学基本方程	112
9.3 比自由能的多项式级数表示与损伤本构关系	112
9.4 由细观力学解答确定损伤效应张量	115
9.5 损伤演化方程	118
9.6 本章小结	119
第十章 热弹性各向同性与各向异性损伤	120
10.1 引言	120

10.2	热弹性损伤问题的热力学基本控制方程	120
10.3	热弹性损伤本构关系的一般形式	122
10.4	热弹性损伤问题的损伤演化方程	126
10.5	本构方程与损伤演化方程的各向同性形式	126
10.6	本章小结	128

第十一章 粘弹性各向同性损伤 130

11.1	引言	130
11.2	本构泛函的多项式表示	131
11.3	本构方程与能量耗散率	132
11.4	粘弹性损伤演化方程	137
11.5	本章小结	138

参考文献 139

01		1.8
02		2.8
03		3.8
04		4.8
05		5.8
06		6.8
07		7.8
08		8.8
09		9.8
10		10.8
11		11.8
12		12.8
13		13.8
14		14.8
15		15.8
16		16.8
17		17.8
18		18.8
19		19.8
20		20.8
21		21.8
22		22.8
23		23.8
24		24.8
25		25.8
26		26.8
27		27.8
28		28.8
29		29.8
30		30.8
31		31.8
32		32.8
33		33.8
34		34.8
35		35.8
36		36.8
37		37.8
38		38.8
39		39.8
40		40.8
41		41.8
42		42.8
43		43.8
44		44.8
45		45.8
46		46.8
47		47.8
48		48.8
49		49.8
50		50.8
51		51.8
52		52.8
53		53.8
54		54.8
55		55.8
56		56.8
57		57.8
58		58.8
59		59.8
60		60.8
61		61.8
62		62.8
63		63.8
64		64.8
65		65.8
66		66.8
67		67.8
68		68.8
69		69.8
70		70.8
71		71.8
72		72.8
73		73.8
74		74.8
75		75.8
76		76.8
77		77.8
78		78.8
79		79.8
80		80.8
81		81.8
82		82.8
83		83.8
84		84.8
85		85.8
86		86.8
87		87.8
88		88.8
89		89.8
90		90.8
91		91.8
92		92.8
93		93.8
94		94.8
95		95.8
96		96.8
97		97.8
98		98.8
99		99.8
100		100.8

第一章

绪 论

损伤力学发展概况

损伤力学作为一门学科分支的出现,是近二十多年的事情。它是当前国际上固体力学中一个活跃的研究领域,是材料与结构变形和破坏理论的重要组成部分。材料内部存在的缺陷,如位错、微裂纹、微孔洞等都可统称为损伤^[1]。材料损伤劣化的过程为不可逆的耗散过程。材料内部分布的缺陷在外载与环境因素的综合作用下不断地演化,最终会导致材料的破坏。损伤力学是研究含损伤材料的力学性质,以及在变形过程中损伤的演化发展直至破坏的力学过程的科学。目前损伤力学正在发展之中,已涌现出许多各种的损伤力学理论,但在国际上尚未出现比较公认的普遍理论^[1, 2]。

损伤力学有两个平行发展的分支,即连续损伤力学和细观损伤力学,这两个分支目前呈现出相互融合、交叉的发展趋势。连续损伤力学是利用不可逆热力学与连续介质力学的唯象学方法,研究损伤的力学过程。它着重考察损伤对材料宏观力学性质的影响及材料损伤劣化的过程和规律,而不细察其损伤演化的细观物理机制,只求预计的宏观力学行为能符合实验结果与实际情况。细观损伤力学是根据材料损伤的细观物理机制,通过建立材料的细观力学模型和采用某种力学平均化方法,获得材料宏观力学行为与细观损伤参量之间的关系。

自 1958 年 Kachanov^[3] 提出研究金属蠕变寿命的连续度概念,1963 年 Rabotnov^[4] 提出连续损伤因子的概念以来,经过 Lemaitre 等一大批学者的发展,逐步形成了连续损伤力学的框架,并在工程领域中获得了广泛的应用。

这方面的研究综述可参见参考文献[5-8]。这一领域中已取得的研究成果,主要反映在这些年来国内外陆续出版的一些专著与教材之中^[2, 9-21]。

另一方面,材料学家揭示了材料细微观的微裂纹、微孔洞、剪切带等作为损伤基元的事实,为力学家提供了从细观角度来研究其力学行为的可能。材料细观损伤的物理机制与特征,类型繁多且相当复杂,比较典型的有微裂纹和微孔洞损伤。国内外对这两种类型的损伤进行了大量比较深入的研究,可参见参考文献[22-29]。细观损伤力学方法与连续损伤力学的一个重要差别在于,在细观力学中必须采用一种平均化方法,以把细观结构损伤机制的研究结果反映到材料的宏观力学行为的描述中去。比较典型的细观力学方法有 Eshelby 等效夹杂理论^[30, 31]、自治理论^[32, 33]、广义自治理论^[34-37]、Mori-Tanaka 方法^[38]、微分介质法^[39],以及利用变分原理求上、下限的 Hashin-Shtrikman 界限法^[40, 41]等。这方面的研究综述可参见参考文献[35, 42-47]。

材料损伤状态的描述

材料损伤状态的描述问题,是损伤力学的基本问题之一,也是难题之一。材料的损伤状态用损伤变量来描述。在损伤力学几十年的发展过程中,出现了许多互不相同的损伤变量的定义,有标量、矢量、2 阶张量、4 阶张量,甚至 8 阶张量,等等,这造成了实际应用的困难。本节将就这一问题作一综述,并简要介绍所取得的重要研究进展。

1.2.1 各向同性损伤

1958 年, Kachanov^[3]提出用连续度的概念来描述材料的逐渐劣化,从而使材料中复杂的、离散的劣化耗散过程得以用一个简单的连续变量来模拟。如图 1-1 所示,考虑一均匀受拉的直杆,认为材料劣化的主要机制是由于微缺陷导致的有效承载面积的减小。设无损状态的横截面面积为 A ,损伤后的有效承载面积减小为 $\tilde{A}$,则连续度 φ 的物理意义为有效承载面积 $\tilde{A}$ 与无损状态的横截面面积 A 之比,即

$$\varphi = \tilde{A}/A \quad (1.1)$$

将外加荷载 P 与有效承载面积 $\tilde{A}$ 之比定义为有效应力 $\tilde{\sigma}$,即

$$\tilde{\sigma} = P/\tilde{A} = \sigma/\varphi \quad (1.2)$$

式中 $\sigma = P/A$ 为 Cauchy 应力。连续度 φ 单调减小,假设当 φ 达到某一临界值 φ_c 时,材料发生断裂,于是材料的破坏条件可表示为

$$\varphi = \varphi_c \quad (1.3)$$

Kachanov 取 $\varphi_c = 0$, 但实验表明对于大多数材料, 有 $0.2 \leq \varphi_c \leq 0.8$ 。

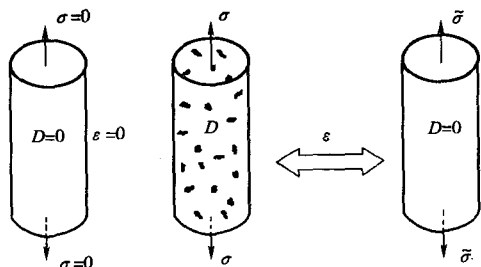


图 1-1 均匀拉伸直杆的损伤

Kachanov 这一工作的重要性在于推动了损伤力学的建立和发展, 此后众多的损伤模型都不同程度地借鉴了 Kachanov 损伤模型的思想。1963 年, Rabotnov^[4] 同样在研究金属的蠕变本构关系时建议采用连续损伤因子 D

$$D = 1 - \varphi \quad (1.4)$$

来描述材料的损伤。对于完全无损状态, $D = 0$; 对于完全丧失承载能力的状态, $D = 1$ 。实际上, D 达到某一临界值 $D_c = 1 - \varphi_c$ 时, 材料即失效, $0 \leq D \leq D_c < 1$ 。由式(1.1)、式(1.4)可得

$$D = (A - \tilde{A})/A = A_D/A \quad (1.5)$$

式中 A_D 表示由于微缺陷导致的失效面积。于是有效应力 $\tilde{\sigma}$ 与损伤因子 D 的关系为

$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D) \quad (1.6)$$

不少学者直接将以上一维状态下的损伤概念推广到三维状态下^[7, 48-52]。考虑图 1-2 所示三维状态下损伤材料的代表性体积单元, n 方向上损伤度的定义为

$$D(n, X) = A_D/A = (A - \tilde{A})/A \quad (1.7)$$

式中 X 为空间坐标, D 为 n 与 X 的标量值函数。式(1.7)与式(1.5)形

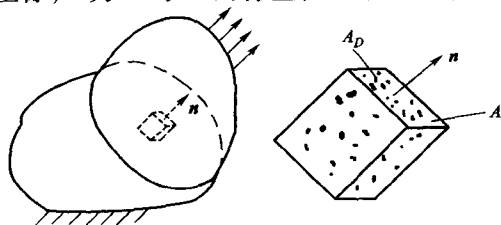


图 1-2 损伤材料的代表性细观体积单元

式上相同,但式(1.7)是定义在 $\mathbf{n}$ 方向上的。假设材料的损伤状态是各向同性的,则由式(1.7)所定义的损伤变量 D 成为一个标量变量,仅与空间坐标 $\mathbf{X}$ 有关,而与方向 $\mathbf{n}$ 无关。即损伤对所有方向上有效面积的缩减是相同的。在三维状态下,有效应力的定义为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D) \quad (1.8)$$

式中 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 为有效应力张量, σ_{ij} 为 Cauchy 应力张量。

应当指出,以上基于有效承载面积的缩减而定义的损伤变量对于描述另一类重要的各向同性损伤状态——随机均匀分布的微裂纹损伤,是不太适当的,因为微裂纹引起的失效面积是模糊不清的。一些学者^[53-55]通过将裂纹方向密度函数展开成 Fourier 级数,严格证明了对于随机均匀分布的微裂纹损伤状态,仍可用一个标量损伤变量来描述。设图 1-2 中材料所含的损伤为微裂纹,在代表性细观体积单元内所含第 i 个微裂纹的特征长度为 l_i ,微裂纹总数目为 N ,单元体积为 V_c ,则裂纹密度参数 ρ 可定义为

$$\rho = \sum_{i=1}^N l_i^3 / V_c \quad (1.9)$$

此时,最简单的方法是将损伤变量 D 直接定义为裂纹密度参数 ρ 。设导致代表性细观体积单元完全失效的微裂纹密度临界值为 ρ_c ,则归范化的损伤变量 D 可定义为

$$D = \rho / \rho_c \quad (1.10)$$

$D=0$ 表示材料完好无损, $D=1$ 表示材料完全失效。

另一方面,损伤的宏观效应表现为材料刚度与强度的下降,承载能力的降低。从唯象学的角度,材料的损伤程度可由材料弹性模量的下降来度量。在各向同性损伤下,材料只有两个独立的弹性常数,此时唯象定义的损伤变量为两个标量变量(双标量损伤变量)^[10, 56, 57]。例如,双标量损伤变量可定义为

$$D_E = \tilde{E}/E, D_G = \tilde{G}/G \quad (1.11)$$

式中 E, G 分别为材料无损时的杨氏与剪切模量, $\tilde{E}, \tilde{G}$ 分别为损伤后的有效值。

综上所述,对于各向同性损伤状态,无论是微孔洞损伤还是微裂纹损伤,可用细观定义的单标量损伤变量来描述,亦可用唯象定义的双标量损伤变量来描述。通过第二章的分析将会看到,实际上这两类损伤变量之间具有内在联系,且存在确定的函数关系。

另外,还可根据材料的剩余寿命等来定义损伤变量。

1.2.2 各向异性损伤

对材料各向异性损伤状态的描述,要比对各向同性损伤状态的描述复杂得多。众所周知,在材料的损伤劣化过程中,微孔洞与微裂纹等的形成、增长与汇集,明显与作用应力(或应变)的方向有关,具有一定的方向性。因此,材料的损伤往往是各向异性的。

作为描述各向异性损伤状态的早期尝试,采用的是矢量型损伤变量^[58-63]。然而,采用矢量型损伤变量在应用中具有很大的局限性,一是不能作为一般各向异性损伤状态的普遍描述;二是各向同性标量损伤变量不能通过矢量型损伤变量的特例来获得^[64]。因此,目前很少采用矢量型损伤变量。

众多学者^[44, 65-74]提出应采用2阶对称损伤张量 D 来描述材料的各向异性损伤状态。其原因,一是因为在大多数情况下材料的损伤状态可以用一个2阶对称损伤张量来描述;二是对于各向同性损伤,可以方便地退化为标量损伤变量;三是可以在实际应用与数学处理上带来很大的方便。

下面首先介绍 Murakami(村上澄男)^[73]所做的工作。Murakami 继承了 Kachanov 的损伤思想(即有效承载面积的缩减),并将其成功地推广到三维各向异性损伤的情况。如图 1-3b)所示,从损伤材料中选取一个面积单元 PQR ,称为即时损伤构形 B_t 。假设 B_t 中应力、应变是均匀的,线段 PQ 、 PR 及面元 PQR 的面积分别用三维欧氏空间中的矢量 dx 、 dy 、 $v dA$ 表示。该单元初始无损伤时的构形记作 B_0 (图 1-3a),相应的线段和面积分别用 dx_0 、 dy_0 、 $v_0 dA_0$ 表示。从 B_0 到 B_t 的变形梯度记为 F 。

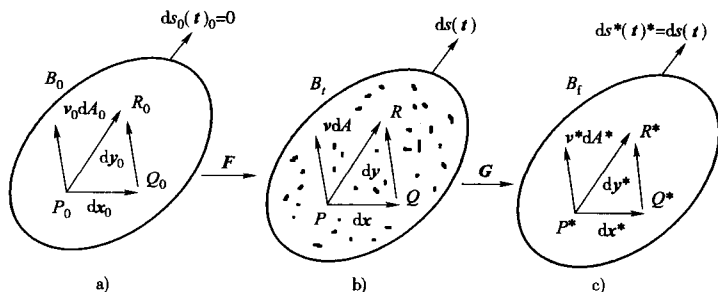


图 1-3 欧氏三维空间中材料的三种构形

a) 初始无损构形; b) 即时损伤构形; c) 虚拟等分无损构形

由于微缺陷的空间分布,面积单元 PQR 的净承载面积将减小,因此假定存在一个虚拟的无损等价构形 B_f ,线段 P^*Q^* 、 P^*R^* 和面积单元 $P^*Q^*R^*$ 的面积分别用 dx^* 、 dy^* 、 $v^* dA^*$ 表示。 B_f 中的面积单元 P^*Q^*

R^* 和 B_i 中的面积单元 PQR 具有相同的净承载面积,但由于损伤的各向异性性质,矢量 νdA 和 $\nu^* dA^*$ 的方向一般不重合。如果从构形 B_i 到构形 B_j 的变形梯度为 G ,则有

$$dx^* = G \cdot dx, dy^* = G \cdot dy \quad (1.12)$$

根据 Nanson 定理,在构形 B_i 和 B_j 中的面元矢量 νdA 和 $\nu^* dA^*$ 具有如下关系

$$\nu^* dA^* = \frac{1}{2} dx^* \times dy^* = \frac{1}{2} (G \cdot dx) \times (G \cdot dy) = K(G^{-1})^T \cdot (\nu dA) \quad (1.13)$$

式中 $K = \det(G)$, $(\)^T$ 表示 2 阶张量的转置。

上述分析表明,构形 B_i 的损伤状态可以用式 (1.13) 中的线性变换 $K(G^{-1})^T$ 来描述。引入一个 2 阶张量 $(I - D)$ 来表示 $K(G^{-1})^T$, 即

$$K(G^{-1})^T = (I - D) \quad (1.14)$$

或

$$G = K[(I - D)^T]^{-1} = K(I - D)^{-T} \quad (1.15)$$

于是式 (1.13) 可以写成

$$\nu^* dA^* = (I - D) \cdot (\nu dA) \quad (1.16)$$

式中 I 是 2 阶恒等张量, D 是一个表示构形 B_i 损伤状态的 2 阶张量,称为损伤张量,它是在有效承载面积等价的基础上由构形 B_i 和 B_j 定义的。

下面讨论损伤张量 D 的性质。由于 $\nu^* dA^*$ 是与构形 B_i 中 νdA 相等价的面积矢量,因此 $\nu^* dA^*$ 与 νdA 的点积应为正值,即

$$(\nu^* dA^*) \cdot (\nu dA) > 0 \quad (1.17)$$

将式 (1.16) 代入式 (1.17) 中,得

$$[(I - D) \cdot (\nu dA)] \cdot (\nu dA) > 0 \quad (1.18)$$

因此 $(I - D)$ 应是正定的 2 阶张量。进而将 $(I - D)$ 分解为对称部分 $(I - D)^S$ 与反对称部分 $(I - D)^A$, 即

$$(I - D) = (I - D)^S + (I - D)^A \quad (1.19)$$

如果只考虑反对称部分,则有

$$\begin{aligned} (\nu^* dA^*) \cdot (\nu dA) &= [(I - D)^A \cdot (\nu dA)] \cdot (\nu dA) \\ &= -(\nu dA) \cdot (I - D)^A \cdot (\nu dA) = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

式 (1.20) 表明张量 $(I - D)^A$ 将面积矢量 νdA 变换到与之垂直的 $\nu^* dA^*$, 而对有效承载面积的减小没有反映。因此,可将损伤张量对称化,而不会影响有效承载面积的等价性。这样,张量 D 必有 3 个正交的主方向 n_i 与 3 个对应的主值 D_i , 并可表示为

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 D_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (1.21)$$

在构形 B_i 和 B_f 中, 各取张量 $\mathbf{D}$ 的一组主坐标系 $Ox_1 x_2 x_3$ 和 $O^* x_1 x_2 x_3$, 坐标轴分别通过点 P, Q, R 和 P^*, Q^*, R^* , 如图 1-4 所示。从而得到两个四面体 $OPQR$ 和 $O^* P^* Q^* R^*$, 分别由面积单元 $PQR, P^* Q^* R^*$ 以及 x_1, x_2, x_3 轴相垂直的 3 个侧面组成。将式(1.21)代入式(1.16), 得

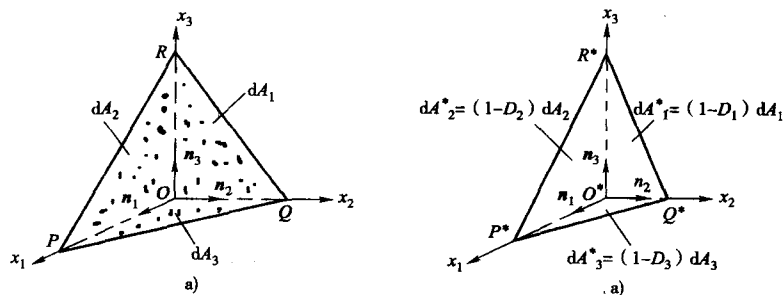


图 1-4 2 阶损伤张量 $\mathbf{D}$ 的几何表示

a) 即时损伤构形; b) 虚拟无损等效构形

$$\mathbf{v}^* d\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^3 (1 - D_i) d\mathbf{A}_i \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_1 d\mathbf{A}_1^* + \mathbf{n}_2 d\mathbf{A}_2^* + \mathbf{n}_3 d\mathbf{A}_3^* \quad (1.22)$$

式中

$$d\mathbf{A}_i^* = (1 - D_i) d\mathbf{A}_i \quad (1.23)$$

$d\mathbf{A}_i = v_i d\mathbf{A}$ 和 $d\mathbf{A}_i^* = v_i^* d\mathbf{A}^*$ 分别表示构形 B_i 和 B_f 中四面体的 3 个侧面的面积 (图 1-4)。由式(1.23)可知, 2 阶对称损伤张量 $\mathbf{D}$ 的 3 个主值 D_i 可以解释为构形 B_i 和 B_f 中 $\mathbf{D}$ 的 3 个主平面上有效承载面积的减少, 如图 1-5 所示。

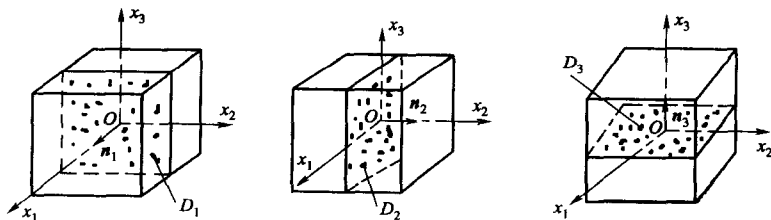


图 1-5 损伤张量 $\mathbf{D}$ 主平面上有效承载面积的缩减

综上所述, 微缺陷引起的材料损伤可以用净承载面积的缩减来表征, 无论微缺陷如何分布, 损伤状态都可以用 2 阶对称损伤张量 $\mathbf{D}$ 来描述。

作为式(1.8)的直接推广, 三维各向异性损伤下有效应力张量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 可以定义为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \quad (1.24)$$

值得注意的是, 由式(1.24)定义的有效应力张量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 一般情况下是不