

**WUTP** 普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材



Fundamentals of Electromagnetic Field and Wave

# 电磁场与电磁波理论基础

刘 岚 胡 钊 黄秋元 胡耀祖



武汉理工大学出版社

普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

# Fundamentals of Electromagnetic Field and Wave

# 电磁场与电磁波理论基础

刘 岚 武汉理工大学信息工程学院教授  
胡 钊 武汉大学电气工程学院教授  
黄秋元 武汉理工大学信息工程学院副教授  
胡耀祖 武汉理工大学信息工程学院副教授

武汉理工大学出版社

· 武 汉 ·

## 内 容 简 介

本书是按照电气信息类专业“电磁场与电磁波课程教学基本要求”,本着深入浅出、通俗易懂的原则而编写的。主要介绍电磁场与电磁波的基本理论、基本概念和基本分析方法。

全书共分 11 章,在介绍了矢量分析方法和场论、电磁场的基本方程、场的一般求解方法后,围绕着电磁波在自由空间中、在非导电介质中以及在导体中的传播展开了分析和讨论,最后对电磁波的导引和辐射进行了简要的介绍。每章之后均附有学习要点和习题。

本书是为大学本科电气信息类专业的学生编写的教材,内容围绕着电磁场与电磁波的基本理论而展开。期望本书能成为通信工程、电子信息、电子科学与技术、自动化、电气工程等专业学生学习有关课程的一本有用的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波理论基础/刘岚,胡朴,黄秋元,胡耀祖编. —武汉:武汉理工大学出版社, 2006. 9

普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

ISBN 7-5629-2437-6

I. 电…

II. ①刘… ②胡… ③黄… ④胡…

III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁场—高等学校—教材

IV. 0441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 102647 号

出版发行:武汉理工大学出版社

武汉市武昌珞狮路 122 号 邮编:430070

<http://www.techbook.com.cn>

E-mail:wutpbook@sohu.com

huangchun@mail.whut.edu.cn

wutbbailih@163.com

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:武汉理工大印刷厂

开 本:787×1092 1/16

印 张:19.25

字 数:493 千字

版 次:2006 年 9 月第 1 版

印 次:2006 年 9 月第 1 次印刷

印 数:3000 册

定 价:30.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:(027)87397097 87394412

# 普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

## 出版说明

世纪之交,我国高等学校的人才培养工作正处在一个关键的历史时期。为了适应我国改革开放和社会主义现代化建设特别是社会主义市场经济体制对高等教育人才培养工作的新要求,为了适应世界科学技术发展的新趋势和新特点,原国家教育委员会组织对普通高等学校本科专业目录进行了第四次全面修订,并于1998年7月由教育部正式颁布实施。修订后的专业目录中,自动化类专业的专业面大大拓宽,相应的专业培养目标、业务培养要求、主干学科、主要课程、主要实践性教学环节等都有了不同程度的变化。要适应新的专业培养目标和教学要求,组织一套新的自动化类专业系列教材就成了当务之急。为此,武汉理工大学出版社在广泛调研的基础上,组织国内近30所大学的近100位教授共同编写了《普通高等学校自动化类专业新编系列教材》。

经过了一轮的教学实践,许多学校的教授提出了一些修改和修订意见,并建议其中的《电路分析》、《电路实验指导书》、《模拟电子技术基础》、《数字电子技术基础》、《电子技术实验》五本书组成“普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材”,同时组织编写《电磁场与电磁波理论基础》、《信号与系统》等书以充实本套教材。本套教材具有如下特点:

**观念新**——主动适应教学改革的需要和市场经济对人才培养的要求;

**内容新**——电气信息技术在近20年来进展巨大,这套教材尽可能反映了这些内容;

**体系新**——在以前的基础上重构和重组,而非重建。各门课程及内容的组成、顺序、比例更加优化,避免遗漏和不必要的重复;

**与国际接轨**——电气信息类专业教育要面向世界,面向未来,面向区域经济。在借鉴发达国家高等教育的专业模式和课程设置的同时,适当兼顾当前各地区经济文化发展不平衡的现状;

**教学手段现代化**——本套教材力求具有网络化、电子化、数字化的特色,大力推进电子讲稿和多媒体课件的出版工作。这也是近五年来我们受到困惑最多、难度最大的事情。近两年来我们取得了突破性的进展,无论是多媒体教学的理念还是精湛的制作技术,都赢得广泛关注和赞同。

“用信息化改造传统教学,让传统教学现代化”,“让教学中只有重点,没有难点”是我们的工作目标,近百所大学使用过的交互式智能型多媒体课件就是最好的证明。我们将高度重视,兢兢业业,保证质量,恳请选用本套教材的广大师生在使用过程中给我们多提意见和建议,以便我们不断修订、补充、完善全套教材。

21世纪已经到来,知识经济的曙光已经初现。面向新世纪的中国高等教育正在经历前所未有的变革和发展,人文与理工相通,科学与技术相融,教学与研究并重,知识与智慧同尊,以培养社会经济文化发展所需要的复合型人才,这是我国建立知识创新体系的重大挑战和空前机遇。我社愿与各位专家、读者真诚合作,共同努力,为新世纪的中国高等教育事业做出更大的贡献。

武汉理工大学出版社

2006年9月

普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列  
编审委员会

顾问：

郑大钟 熊有伦 戴冠中 萧德云 陈伯时 周祖德  
项国波 席裕庚 褚 健

主任委员：

萧蕴诗 张崇巍 陈大钦 吴 坚 雷绍锋

委员(按姓氏笔画顺序)：

马建国 王 辉 王孝武 王明阳 王建华 王俊杰  
王 姮 文 方 方康玲 卢京潮 龙 伟 申功璋  
叶春生 全书海 吕 锋 刘 岚 刘 泉 刘涤尘  
刘崇新 李汉强 李磊民 李裕能 宋靖雁 林 都  
林 辉 林锦国 杨 波 杨天怡 杨家本 周泽义  
胡 钊 胡 超 胡耀祖 赵英凯 赵曾贻 侯朝楨  
钟 珞 须文波 翁维勤 夏承铨 郭圣权 徐科军  
黄秋元 黄席樾 章卫国 彭容修 程耕国 温阳东  
曾庆军 谢克明 熊前兴 樊亚东 黎明森 戴文进

编委会秘书：

黄 春

总责任编辑：

杨学忠 徐秋林

# 前 言

电磁场与电磁波理论是近代自然科学中,理论相对最完整、应用最广泛的支柱学科之一。电磁场与电磁波技术已遍及人类的科学技术、政治、经济、军事、文化以及日常生活中的各个领域。

人类对电磁现象的认识源远流长,但其知识与应用开始系统化和理论化则始于18世纪,伽伐尼、伏打、高斯、富兰克林、卡文迪什、库仑等著名科学家对电磁现象所作的卓有成效的研究启动了电磁世界这一巨轮的运转。

19世纪是电磁研究蓬勃开展的时代,法拉第、欧姆、傅立叶、基尔霍夫、奥斯特、安培、毕奥、萨伐尔、麦克斯韦、斯托克斯、汤姆森、赫兹、楞次、雅可比、西门,单单从这些名字和科学家的阵容,你就可以感受到这一时期的电磁科学取得了多么辉煌的成就。

19世纪,科学界将物质间的作用力归结为三大类:引力、电力和磁力。伽利略,尤其是牛顿在引力方面所获得的成果曾经几乎覆盖了整个科学领域,对人类科学技术的发展产生了巨大的影响作用和推动作用。然而,这种并不直接接触、也不需要媒质而瞬时就能产生作用的牛顿引力的背后还隐藏着什么呢?19世纪的许多科学家在被迫接受和承认牛顿引力的超距作用的同时,却拒不接受电力和磁力。于是,法拉第和麦克斯韦提出了场的概念,即场是以有限速度传播的能够作为物体间相互作用的媒介。由此而出现的场论,看似毁坏了牛顿物理的根基,实则是开辟了通向电磁学而后是相对论的道路。

麦克斯韦的电磁理论这时就成为了电磁世界的理论核心,这一伟大理论简明扼要并严格地统一了电与磁的关系,这看起来好像是简化了物理学的理论,但实际上却使问题变得更加复杂了,因为它使伽利略和牛顿所构筑的宇宙图像“顿起祸端”。

20世纪以来,在对电磁场的理论和实验进行深入研究的过程中,人们所提出的两个看似简单的问题使得电磁学理论沿着两个方向开始发展。第一个问题是:电磁辐射的本质是什么?麦克斯韦的理论将电磁辐射作为纯粹的波来处理,但许多实验却表明辐射并不连续。于是,普朗克假设,电磁波只能是以一种能量包的形式被发射或吸收,他由此创立了量子力学,这种能量包就被称为能量子。1905年,爱因斯坦用光量子理论成功地解释了光电效应,并指出所有物质和辐射都具有波粒二象性。这一结论随后即从物理学家们的理论分析和精密实验中得到了证实,这个结论复活了牛顿的光微粒论,同时也使力学与电磁学近二十年的明显对立消除了。第二个问题是:电磁波在什么媒质中传播?对于这个问题的研究产生了爱因斯坦的相对论。

由此看来,在任何意义上,我们都不能轻视一个多世纪来电磁场理论对科学技术以及人类社会所作出的巨大贡献。可以毫不夸张地说,没有电磁场理论的发展,就不可能有现代信息化社会的出现。由于电磁场理论对整个电子和信息技术的发展所起到的如此强大的推动作用,迫使人们必须去了解并解决各种复杂条件下的电磁工程中的技术和设计问题,从这个意义上来说,学习电磁场理论就成为了整个行动的第一步。

目前,电磁场与电磁波是电气信息类本科各专业学生必修的一门重要的专业基础课程,它

所涉及的内容是电气信息类本科学生知识结构的必要组成部分。通过该课程的学习,可使学习者在建立场与路的统一认识的基础上,从集总参数电路理论过渡到分布参数的高频电路理论,为学习半导体技术、光电子技术、微波技术、天线理论、光纤通信、移动通信等专业课程或从事电磁工程研究奠定必要的基础。尤其是在当今光电子与信息技术高速发展的时代,不断升高的工作频率或信号速率成为了电子产品开发中不可忽视的技术前提,这时许多技术问题用集总参数电路的理论已难以解决,必须使用电磁场和波的观点才能得到完整的解释,电磁技术成为了光电子产品性能的决定因素。在光电子与通信领域中,不管是光还是电子、有线通信还是无线通信、数字通信还是模拟通信,在频率较高或信号速率较高时,其信号在信道中的传输与处理过程都离不开电磁场与电磁波的理论知识。

但是,由严密的数学推证、精确的实验和科学的抽象所构成的电磁场理论却实在是一门既难教又难学的课程,它在数学方法和物理概念不断相互交融中所表现出来的轮廓和内涵,常常会令人感到望而生畏,从而使学习难以提高学习兴趣。

数年来,我们一直希望能出版一本既通俗易懂,又重点突出的教材。这个重点就是与电气信息类专业较为密切的电磁波学,虽然,电磁场与电磁波密不可分,但是,在给出场的基本概念后,我们希望能围绕着波的理论进行较为广泛和深入的探讨,本书就是在这样的指导思想下编写的,但愿我们的这一愿望离目标不远。

本书在编写过程中融入了如下的考虑:

(1) 在学生已有的理论基础上由浅入深地展开教学,强调基础,重视基本概念,并及时总结,让学生感到经过努力,能够掌握所学内容,从而增强学生的学习信心;

(2) 从各个不同角度反复强调基本理论和计算公式的适用条件,帮助学生建立清晰的物理概念,并培养学生良好的科学习惯,避免学生盲目套用公式;

(3) 处处以麦克斯韦方程组这一描述宏观电磁现象的基本理论为指导,对一些宏观电磁现象和问题进行定性分析与定量计算,培养学生正确的思维方法和分析问题的方法,提高学生运用理论解决实际问题的能力;

(4) 帮助学生掌握“类比”这一科学的分析方法,使学生不断巩固所学内容,缩短新内容的学习过程;

(5) 在内容编排中,既有从特殊到一般的归纳方法,又有从一般到特殊的演绎方法,既能使学生易于接受新内容,又能培养学生的抽象思维能力;

(6) 紧跟时代步伐,调整教学内容,使学生看到科学技术的不断发展,产生努力学习的紧迫感。

本书的编写借鉴了国内外优秀教材的成功之处,以及编者在教学和研究方面所积累的经验。本书有如下特点:

(1) 以场的理论为基础进行分析,以波的特性为重点展开论述;

(2) 采用新的论述体系。从力的类比入手引入场,从大学物理的基础导出电磁场与电磁波的基本理论和基本方程;

(3) 引入位函数,并以静态场为例介绍位场的求解方法;

(4) 在不同的介质条件下反复分析场与波的基本规律;

(5) 结合工程实际情况,对波的产生、导波以及辐射进行分析讨论。

全书共分 11 章,即矢量分析,电场、磁场与麦克斯韦方程,介质中的麦克斯韦方程,矢量位

与标量位,静态场的解,自由空间中的电磁波,非导电介质中的电磁波,导体中的电磁波,波的反射与折射,导行电磁波,辐射系统简介。每章之后均附有学习要点和习题。教学中可根据具体情况决定内容取舍。

本书将配电子教案和交互式智能型多媒体课件。有需要者请通过版权页上的电子邮件与出版社联系。

武汉理工大学刘岚教授编写了本书的第 2、3、6、7、8 章,武汉大学胡朴教授编写了本书的第 4、9 章,武汉理工大学黄秋元副教授编写了本书的第 1、5 章,武汉理工大学胡耀祖副教授编写了本书的第 10、11 章。全书由刘岚教授统稿。

限于编者的水平和经验,书中难免有错误和不妥之处,敬请广大同仁及读者批评指正。

编 者

2006 年 6 月于武汉



# 目 录

<b>1 矢量分析</b> .....	(1)
1.1 矢量代数 .....	(1)
1.1.1 矢量与标量 .....	(1)
1.1.2 矢量的代数运算 .....	(2)
1.1.3 标量场与矢量场 .....	(3)
1.2 正交坐标系 .....	(4)
1.2.1 正交曲面坐标系的概念 .....	(4)
1.2.2 直角坐标系 .....	(5)
1.2.3 圆柱坐标系 .....	(6)
1.2.4 球坐标系 .....	(7)
1.2.5 三种坐标系中单位矢量之间的关系 .....	(9)
1.3 矢量函数的通量与散度 .....	(11)
1.3.1 矢量的通量 .....	(11)
1.3.2 散度 .....	(12)
1.3.3 高斯散度定理 .....	(14)
1.4 矢量函数的环量与旋度 .....	(16)
1.4.1 矢量的环量 .....	(16)
1.4.2 旋度 .....	(16)
1.4.3 斯托克斯定理 .....	(20)
1.5 标量函数的方向导数与梯度 .....	(21)
1.5.1 标量场与等值面 .....	(21)
1.5.2 方向导数 .....	(21)
1.5.3 梯度 .....	(22)
1.6 格林公式 .....	(25)
1.7 亥姆霍兹定理 .....	(26)
本章小结 .....	(28)
习题 .....	(30)
<b>2 电场、磁场与麦克斯韦方程</b> .....	(32)
2.1 电场力、磁场力与洛伦兹力 .....	(33)
2.2 由电通量与高斯定律导出麦克斯韦第一方程 .....	(34)
2.2.1 电通量 .....	(34)
2.2.2 自由空间的高斯定律 .....	(34)
2.3 由法拉第电磁感应定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第二方程 .....	(35)
2.4 由磁通量与高斯定律导出麦克斯韦第三方程 .....	(36)

2.5	由安培环路定律与斯托克斯定律导出麦克斯韦第四方程	(36)
2.5.1	关于传导电流、运流电流和位移电流	(36)
2.5.2	电流连续性原理	(37)
2.5.3	磁场强度与安培环路定律	(38)
2.6	微分形式的麦克斯韦方程组	(39)
2.7	麦克斯韦方程的积分形式	(43)
2.8	麦克斯韦方程的时谐形式	(45)
2.9	电磁场的能量与坡印廷矢量	(46)
	本章小结	(49)
	习题	(51)
3	介质中的麦克斯韦方程	(60)
3.1	电介质及其极化	(60)
3.2	单个分子的模型	(61)
3.3	极化矢量 $P$	(62)
3.4	介质的分子模型与极化矢量	(65)
3.5	高密度介质中的电场	(66)
3.6	折射率与相对介电常数	(68)
3.7	磁化的概念	(70)
3.8	磁化电流与磁化矢量	(71)
3.9	磁场强度	(71)
3.10	磁介质	(72)
3.11	介质中的麦克斯韦方程组	(73)
3.12	电磁场的边界条件	(74)
	本章小结	(80)
	习题	(82)
4	矢量位与标量位	(84)
4.1	矢量位 $A$	(84)
4.2	标量位 $\phi$	(84)
4.3	用位函数 $\phi$ 和 $A$ 表示的非均匀波动方程	(85)
4.4	利用场源 $\rho$ 和 $J$ 求解位函数 $\phi$ 和 $A$	(88)
4.5	理纳德-威切特位函数	(90)
	本章小结	(94)
	习题	(95)
5	静态场的解	(97)
5.1	泊松方程和拉普拉斯方程	(97)
5.1.1	静态场中的麦克斯韦方程组	(97)
5.1.2	泊松方程和拉普拉斯方程	(99)
5.2	对偶原理	(101)
5.3	叠加原理和唯一性定理	(102)

5.3.1	边界条件的分类 .....	(102)
5.3.2	叠加原理 .....	(102)
5.3.3	唯一性定理 .....	(103)
5.4	镜像法 .....	(103)
5.4.1	点电荷与无限大的平面导体的合成场计算 .....	(103)
5.4.2	电介质分界面的镜像电荷 .....	(105)
5.4.3	球形边界问题 .....	(107)
5.4.4	圆柱形边界问题 .....	(108)
5.5	分离变量法 .....	(109)
5.5.1	直角坐标系中的分离变量法 .....	(109)
5.5.2	圆柱坐标系中的分离变量法 .....	(111)
5.6	格林函数法 .....	(114)
5.6.1	静电场边值问题的格林函数法表达式 .....	(114)
5.6.2	简单边界的格林函数 .....	(116)
5.7	有限差分法 .....	(118)
	本章小结 .....	(120)
	习题 .....	(121)
6	自由空间中的电磁波 .....	(124)
6.1	波 .....	(124)
6.2	平面波 .....	(125)
6.3	三维波动方程 .....	(126)
6.4	电波 .....	(126)
6.5	磁波 .....	(127)
6.6	自由空间中的平面电磁波 .....	(128)
6.6.1	随时间变化的波 .....	(128)
6.6.2	平面电磁波必定是横波 .....	(129)
6.6.3	相伴而生的 $B$ 波 .....	(130)
6.7	波的极化 .....	(133)
6.8	电磁波谱 .....	(137)
	本章小结 .....	(139)
	习题 .....	(140)
7	非导电介质中的电磁波 .....	(142)
7.1	非导电介质中的电磁波方程 .....	(142)
7.2	平面电磁波在无损耗介质中的传播 .....	(144)
7.3	平面电磁波在有损耗介质中的传播 .....	(145)
7.3.1	等效介电系数 .....	(146)
7.3.2	波动方程及其解 .....	(146)
7.4	低密度气体中的电磁波 .....	(147)
7.5	高密度介质中的电磁波 .....	(149)

7.6	复数折射率的相关结论	(150)
7.7	相速度与能流速度	(151)
7.8	色散	(153)
7.9	群速	(154)
	本章小结	(156)
	习题	(156)
<b>8</b>	<b>导体中的电磁波</b>	(158)
8.1	金属介质的一般模型	(158)
8.2	金属介质在高频或低频时的特性	(159)
8.3	等离子体对波的反射	(162)
8.4	导波	(164)
	本章小结	(169)
	习题	(170)
<b>9</b>	<b>波的反射与折射</b>	(172)
9.1	电磁波传播的边界条件	(172)
9.2	传播矢量	(175)
9.3	平面边界的反射与透射	(176)
9.4	反射波的极化	(185)
9.5	法向入射	(186)
9.6	全折射与全反射	(188)
9.6.1	全折射	(188)
9.6.2	全反射	(189)
9.7	反射波的相位变化	(190)
9.8	各向异性介质中的平面波	(192)
	本章小结	(193)
	习题	(196)
<b>10</b>	<b>导行电磁波</b>	(199)
10.1	电磁波在均匀导波装置中传播的一般特性	(199)
10.1.1	电磁波在均匀导波装置中的传播	(199)
10.1.2	均匀导波装置中的 TEM 波、TE 波、TM 波	(201)
10.1.3	均匀导波装置中的导行波传输特性	(203)
10.2	TEM 传输线	(205)
10.2.1	传输线方程及其时谐稳态解	(205)
10.2.2	传输线的传输特性参数	(209)
10.2.3	无损耗传输线的工作状态	(211)
10.3	矩形波导	(218)
10.3.1	TM 波( $H_z=0$ )	(218)
10.3.2	TE 波( $E_z=0$ )	(219)
10.3.3	矩形波导中的 $TE_{10}$ 波	(221)

10.4	圆柱形波导	(225)
10.4.1	TM波	(225)
10.4.2	TE波	(227)
10.5	波导系统中的功率传输与损耗	(231)
10.5.1	波导的功率传输和功率容量	(231)
10.5.2	波导的损耗和衰减	(232)
10.6	谐振腔	(234)
10.6.1	同轴谐振腔	(234)
10.6.2	矩形谐振腔	(235)
10.6.3	谐振腔的品质因素 $Q$	(237)
10.7	介质波导和光纤简介	(237)
10.7.1	介质波导	(237)
10.7.2	光纤	(238)
	本章小结	(240)
	习题	(240)
<b>11</b>	<b>辐射系统简介</b>	(242)
11.1	缓慢移动的加速点电荷的辐射	(242)
11.2	自由电荷的能量散射	(246)
11.3	束缚电荷辐射的散射	(247)
11.4	电偶极子天线的辐射	(249)
11.5	天线的辐射电阻	(251)
11.6	天线的增益	(251)
11.7	磁偶极子天线的辐射	(251)
	本章小结	(252)
	习题	(257)
	<b>附录</b>	(259)
	附录 A 参考文献	(259)
	附录 B 一些有用的数学结论	(260)
	附录 C 矢量 $D$ 、 $H$ 、 $E$ 、 $B$ 、 $P$ 、 $M$ 之间的关系	(265)
	附录 D 符号表	(266)
	附录 E 国际单位	(270)
	附录 F 物理常数	(271)
	附录 G 词汇表	(273)
	附录 H 习题参考答案	(286)

# 1 矢量分析

也许你会发现,在这门课程中,我们几乎总是在和“场”打交道。实际上,周围的物理世界中也的确存在着各种各样的场,例如自由落体现象,说明存在一个重力场;指南针在地球磁场中的偏转,说明存在一个磁场;人们对冷暖的感觉说明空间分布着一个温度场等等。场是一种特殊的物质,它是具有能量的,场中的每一点的某一种物理特性,都可以用一个确定的物理量来描述。

电磁场理论着重于研究电磁现象及场的基本规律,其中所涉及的一些物理量,如电场强度、磁场强度等都具有确切的物理意义。当对这些物理量的描述与空间坐标或方向性有关时,通常需要使用矢量来描述它们,这些矢量在空间的分布就构成了所谓的矢量场。分析矢量场在空间的分布和变化情况,需要应用矢量的分析方法和场论的基本概念,为了后面各章学习方便,本章首先介绍在分析矢量场时所需要的一些矢量代数和场的相关知识。

## 1.1 矢量代数

### 1.1.1 矢量与标量

只有大小,不包含方向的物理量叫做标量(scalar),如:温度、电位、能量、长度、时间等。由标量所描述的场称为标量场。

既有大小,同时又需要有方向来描述的物理量称为矢量(vector),也称作向量,如:力、速度、加速度等。电磁场中的许多物理量,如电场强度、磁场强度、电流密度等都是矢量,它们都是既有大小、又有方向的物理量。由矢量所描述的场称为矢量场。

在许多书籍和文献中,常常使用黑体字母来表示矢量,如  $\mathbf{A}$ ;但在手写矢量时,一般是在该物理量的上方用箭头标注,如  $\vec{A}$ 。矢量的大小称为矢量的模,表示为  $|\mathbf{A}|$  或  $A$ ,矢量的方向可用单位矢量表示,如  $\mathbf{e}_a$ 。单位矢量是模为 1 个单位的矢量,所以可用它表示方向。在几何描述上,一般用一个带箭头的有向线段来表示矢量,如图 1.1 所示,线段长度代表矢量的大小(模),线段的方向表示矢量的方向。

矢量在一维坐标系中表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_a A$$

$A$  为  $\mathbf{A}$  的大小,即  $A = |\mathbf{A}|$ ,称为矢量  $\mathbf{A}$  的模。

$\mathbf{e}_a$  为单位矢量,其模为 1,方向则为  $\mathbf{A}$  的方向。

在二维坐标系中,矢量  $\mathbf{A}$  表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

其中,  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  分别为  $x$  轴和  $y$  轴方向上的单位矢量。

在三维坐标系中,矢量  $\mathbf{A}$  表示为

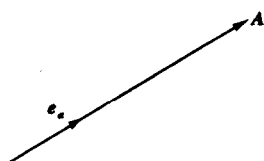


图 1.1 矢量的表示

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad \text{其模为 } |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

其中  $e_x, e_y, e_z$  分别为直角坐标系  $x, y, z$  轴三个方向上的单位矢量。 $A_x, A_y, A_z$  分别为矢量  $\mathbf{A}$  的直角坐标系  $x, y, z$  轴三个方向上的分量,也可以说是矢量函数  $\mathbf{A}$  的三个分量函数。

### 1.1.2 矢量的代数运算

#### (1) 矢量的加法和减法

矢量加法是矢量之和,两个矢量之和服从平行四边形规则,如图 1.2(a)所示。从代数运算的角度来看,两个矢量之和是两矢量的对应坐标分量的和,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)e_x + (A_y + B_y)e_y + (A_z + B_z)e_z \quad (1.1)$$

矢量相加满足交换律与结合律,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{结合律}) \quad (1.3)$$

矢量减法是矢量加法的特例,如

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

通常  $(-\mathbf{B})$  称为矢量  $\mathbf{B}$  的逆矢量,它的大小与矢量  $\mathbf{B}$  相等,但方向相反,如图 1.2(b)所示。从代数运算的角度来看,两矢量相减等于两矢量的对应坐标分量之差,即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)e_x + (A_y - B_y)e_y + (A_z - B_z)e_z$$

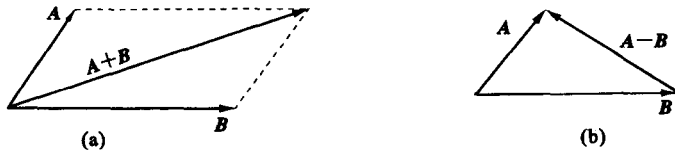


图 1.2 两矢量之和与差  
(a) 两矢量之和;(b) 两矢量之差

#### (2) 标量与矢量相乘

标量  $\eta$  乘以矢量  $\mathbf{A}$ ,其积仍为矢量,并满足以下关系

$$\eta \mathbf{A} = \eta A_x e_x + \eta A_y e_y + \eta A_z e_z \quad (1.4)$$

$$\eta \mathbf{A} = \begin{cases} |\eta \mathbf{A}| e_a, \eta \geq 0 \\ |\eta \mathbf{A}| (-e_a), \eta < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

式(1.5)中,  $\mathbf{A} = e_a A$ 。

#### (3) 矢量的标积

两矢量相乘,其积有两种情况:一种积为标量,称为标积(scalar product);另一种其积仍为矢量,称为矢积(vector product)。

两矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的标积记为  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,因此,标积也称作点积或点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦,也等于两矢量的对应直角坐标分量积之和,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.6)$$

式中,  $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  的夹角。由此式可知,两矢量进行标积后的结果变成了无方向性的数量值。

如果作用在某一物体上的力为  $\mathbf{A}$ ,当  $\mathbf{A}$  使该物体发生位移时,位移矢量为  $\mathbf{B}$ ,则  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  表示力  $\mathbf{A}$  使物体位移所作的功。由式(1.6)可以看出,两矢量的标积满足交换律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.7)$$

显而易见,标积不但与两矢量的大小有关,还与其之间的夹角有关。当两矢量相互垂直时,其标积为零;当两矢量平行,即  $\theta=0$  时,标积的绝对值最大,等于两矢量的模之积,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos 0^\circ = AB \quad (1.8)$$

#### (4) 矢量的矢积

两矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的矢积记为  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , 因此,矢积也称作叉积或叉乘。两矢量进行矢积后的结果仍是一个矢量,其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦,其方向为两矢量所在面的法线方向(用  $e_n$  表示),即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1.9)$$

矢积的方向  $e_n$  符合右手定则,即右手四指从  $\mathbf{A}$  旋转到  $\mathbf{B}$ , 拇指的方向即为  $e_n$  的方向,如图 1.3 所示。

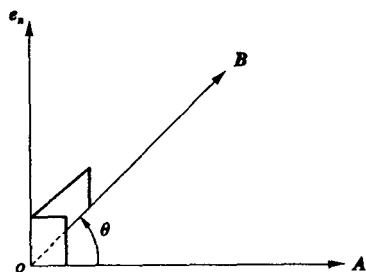


图 1.3 矢积的方向

矢积与两矢量的直角坐标分量的关系为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) e_x + (A_z B_x - A_x B_z) e_y + (A_x B_y - A_y B_x) e_z \quad (1.10)$$

通常,上式可写成行列式的形式来进行记忆,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

矢积的几何意义:以两矢量为邻边所围成的平行四边形的面积为矢积的大小,以该平行四边形的法向(normal direction)为矢积的方向。当  $\mathbf{B}$  表示作用在一物体上的力, $\mathbf{A}$  表示力臂矢量,则矢积表示作用于物体的力矩。由上式可以看出

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.12)$$

这说明矢积不满足交换律。矢积不但与两矢量的大小有关,也与它们之间的夹角有关。两矢量平行时,矢积为零;两矢量垂直时,矢积的模最大。

#### (5) 矢量的混合运算

常用的矢量混合运算恒等式如下

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1.13a)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1.13b)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.13c)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (1.13d)$$

### 1.1.3 标量场与矢量场

在火炉、暖气片等热源周围空间的每一点上,都存在着温度的某种分布,于是我们就说空间存在温度场;在江河中,各处水域存在水流速的某种分布,我们就说那里存在流速场;在地球周围各点,存在对各种物体的引力,我们说地球周围存在引力场,或者说地面上有重力场;在电荷周围各点,存在对电荷的作用力,我们就说电荷周围有电场等等。显然,“场”是指某种物理量在空间的分布。具有标量特征的物理量在空间的分布是标量场,具有矢量特征的物理量在空间的分布是矢量场。例如,温度场是标量场,电场、流速场与重力场都是矢量场。



物理量在空间的分布构成了场,但除了空间分布之外,物理量还可能随时间发生变化。因此,在数学上,场是由空间特征物理量和时间坐标变量的多元函数来描述的,即标量场用空间和时间变量的标量函数表示,而矢量场则用空间和时间变量的矢量函数表示。例如,作为标量场的温度场可表示为  $T(x, y, z, t)$ 、电位场可表示为  $\varphi(x, y, z, t)$  或  $\phi(x, y, z, t)$ ; 作为矢量场的流速场可表示为  $v(x, y, z, t)$ 、电场表示为  $E(x, y, z, t)$ 、磁场表示为  $B(x, y, z, t)$ 。在电磁场中,若描述场的物理量随时间变化,则将场称为时变场。而当描述场的物理量与时间无关时,就将场称为静态场,也就是说,静态场只是空间坐标的函数。例如,静电场可表示为  $E(x, y, z)$ 。

为了形象和直观地描述标量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化情况,常借助于画出其一系列等值间隔的等值面方法,不同等值面的形状及其间隔能较直观地表现标量场的空间分布情况。而为了形象和直观地描述矢量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化情况,则常借助于画出其场线(力线)的方法。场线是一簇空间有向曲线,矢量场较强处场线稠密,矢量场较弱处场线稀疏,场线上的切线方向代表该处矢量场的方向。

场是物理量的分布,应服从因果律。其因,称之为场源,场都是由场源产生的。例如,温度场由热源产生;静电场由电荷产生。场在空间的分布形式不但取决于产生它的场源,而且还与周围物质环境密切相关。例如,炉膛中的温度分布,不仅取决于火力大小及分布,还与炉膛的结构、材料特性以及周围环境有关;带电体周围的电场分布不仅与带电体的电荷分布和电量有关,也与周围的物质特性有关。场、源、场的环境这三者之间的关系可用一组微分方程描述,电磁场及其源的关系的方程就是被称为麦克斯韦方程组,它是一组矢量偏微分方程组。

## 1.2 正交坐标系

当物理量是空间位置的函数,或者说场是与空间分布有关的场时,为了描述某一场量在空间的分布和变化规律,就必须引入坐标系(coordinate system),以表示物理量的空间位置或方向。我们通常用得较多的是直角坐标系,但有时考虑到被研究的物理量的空间分布及其变化规律不同,或物体的几何形状不同等等,也经常采用其他坐标系,以便使问题的分析更为简便,如圆柱坐标系、球坐标系等。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是最常用的三个正交坐标系。

### 1.2.1 正交曲面坐标系的概念

在广义正交坐标系中,坐标变量用  $u_1$ 、 $u_2$  和  $u_3$  表示,相应地,在空间一点  $P$  的坐标为  $P(u_1, u_2, u_3)$ ,它是  $u_1 = C_1$ (常数),  $u_2 = C_2$ (常数)和  $u_3 = C_3$ (常数)三个曲面的交点,这三个曲面称为坐标面。广义正交坐标系中,三个坐标面相互正交,简称正交坐标系。正交坐标系具有以下几个特点:

(1) 正交曲面坐标系是三组坐标面在空间每一点都相互正交,即相互垂直的坐标系

描述三维空间中的任一点,可用三个独立变量来确定,即可以有三个独立的坐标变量  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,则空间一点  $P$  的坐标用  $P(u_1, u_2, u_3)$  来表示。空间中的一点,在直角坐标系、圆柱坐标系或球坐标系中可分别表示为:  $P(x, y, z)$ 、 $P(r, \varphi, z)$  或  $P(R, \theta, \varphi)$ ,每一组的三个独立变量所构成的坐标面都相互垂直。

(2) 单位矢量两两正交,相互垂直,且满足右手螺旋法则

在正交坐标系中,设单位矢量分别为  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$ ,它们的方向分别以其变量增大的方向为正