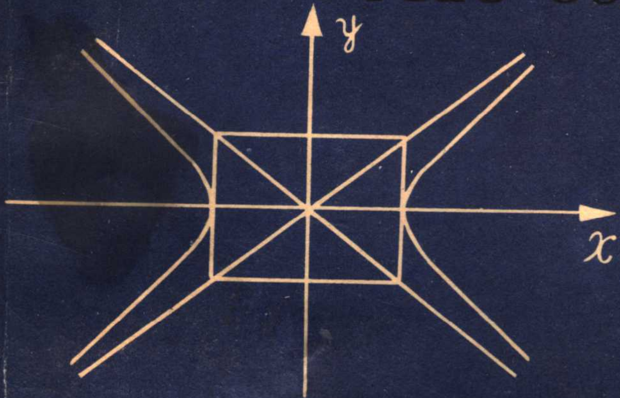
Zhongxue Kecheng
Fudao Congshu



中学课程辅导丛书

高中解析几何疑难解析

三立 编著

广西人民出版社

高中解析几何疑难解析

三 立 编著

广西人民出版社

责任编辑：谭文智
封面设计：谢顺景

高中解析几何疑难解析

三 立 编著

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 7.125印张 159千字
1983年5月第1版 1984年5月第4次印刷
印 数 216,001—521,500 册

书号：7113·456 定价：0.59元

出版说明

《中学课程辅导丛书》是我们中南五省（区）人民（教育）出版社继《中小学各科教学法丛书》协作出版之后，又一次协作出版供中学生学习用的丛书。丛书包括初、高中各科疑难解析共二十三种。初中部分有：政治、语文、英语、历史、地理、代数、几何、物理化学、生物，计九种。高中部分有：语文、政治、英语、历史、地理、代数、立体几何、解析几何、微积分、概率、三角、物理、化学、生物，计十四种。这套丛书计划在一九八三年二月底以前陆续出齐。

《中学课程辅导丛书》紧扣中学各科教学大纲和统编教材，按照中学生的一般水平，围绕重点，解决疑难，培养兴趣，发展智力，以期加强基础知识，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，都是执教多年，对本学科养之有素的教师和专家。编辑方法，一般以教材为序，一个疑难写一篇文章。有的用问答形式，有的用论证形式，各篇虽有联系，但都可以独立成篇，篇幅长短不一，本着要言不繁的原则，当长则长，宜短则短，力求文字生动活泼，内容明白易懂，并富有启发性。

以上数端，只是我们编辑、作者的愿望，出书以后，成败利钝，还有待于在学习中检验。我们热切希望听到专家、老师和同学们的意见，以便再版时修订补充。

广西 广东 湖南 湖北 河南 人民（教育）出版社

目　　录

1. 解析几何中有哪些基本公式？如何应用？

解析几何中的几个重要的基本公式是在初中课本内讲的，在高中课本内便很少提及了，高中的同学可能会忽视它们，也可能对它们的作用不甚了解，这里特别加以解析，并着重讲述其应用。

〈1〉有向线段数量运算的公式

有向线段数量运算的公式是解析几何的基础，其他的一些基本公式（如平面内任意两点间的距离公式和线段的定比分点公式等）都是根据它推出来的。要真正理解这个公式，首先要理解一个重要的概念——有向线段的数量。

一条线段有两个相反的方向，如图1所示的线段，如果以A为起点，B为终点，则从A到B是一个方向，记为AB；如果以B为起点，A为终点，则从B到A又是一个方向，记为BA。AB与BA的长度相等，但方向相反。象这样规定了起点和终点的线段叫做有向线段，从起点到终点的方向就是这条有向线段的方向。

图 1

对于数轴上的一条有向线段，若它的方向与数轴的方向一致，我们就说这条有向线段的方向是正的；若相反，就说它的方向是负的。在图2中，有向线段AB的方向为正，BA的方向为负。有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条线段的数量。为了简便，有向线段AB的数量也记为AB。在图2中，有向线段AB是正向的，其长

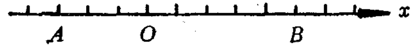


图 2

度等于8，它的数量就是8：$AB=8$；有向线段BA的方向是负的，其长度也等于8，它的数量就是－8：$BA=-8$。

有向线段的数量既表示了它的长度，也指出了它的方向。对于任意两条有向线段AB和BA的数量，都有如下的关系：

$$AB=-BA,$$

或

$$AB+BA=0。$$

若把有向线段AB的长度记为$|AB|$，则

$$|AB|=|BA|。$$

我们已经知道，数轴上的点集和实数集之间有着一一对应的关系。对于数轴上的任一点P，总可以把OP看作是以O为起点、P为终点的有向线段。和点P相对应的实数x就是有向线段OP的数量：$OP=x$。

设数轴上任意两点A和B的坐标分别为x_A和x_B，则有向线段AB的数量等于终点坐标x_B与起点坐标x_A之差：

$$AB=x_B-x_A。\qquad ①$$

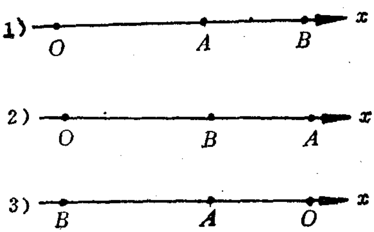
证明：若点A与原点重合，则$x_A=0$，

$$AB=OB=x_B=x_B-x_A;$$

若点B与原点重合，则$x_B=0$，

$$AB=AO=-OA=-x_A=x_B-x_A。$$

在一般情形，A和B两点以及原点O有以六下种不同的排列：



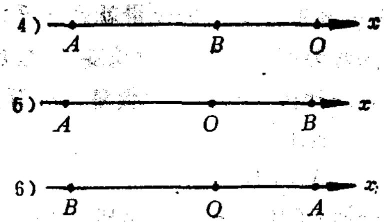


图 3

在每一种情形，都可找到三条正向线段。根据平面几何中线段的加法，得到这三条正向线段的关系。在1)中，

$$OA+AB=OB, \quad AB=OB-OA=x_B-x_A;$$

在2)中，

$$OB+BA=OA, \quad OB-AB=OA,$$
$$AB=OB-OA=x_B-x_A;$$

在3)中，

$$BA+AO=BO, \quad -AB-OA=-OB,$$
$$AB=OB-OA=x_B-x_A;$$

在4)中，

$$AB+BO=AO, \quad AB-OB=-OA,$$
$$AB=OB-OA=x_B-x_A;$$

在5)中，

$$AO+OB=AB, \quad AB=OB-OA=x_B-x_A;$$

在6)中，

$$BO+OA=BA, \quad -OB+OA=-AB,$$
$$AB=OB-OA=x_B-x_A。$$

所以，不论A、B两点在数轴上的位置如何，公式①总成立。

如果要计算数轴上A、B两点间的距离，只要在求出有

向线段AB的数量之后再取它的绝对值即可：

$$|AB| = |x_B - x_A|。$$

例 1 已知$AB = -9$，且$x_A = 4$，求x_B。

解：$AB = x_B - x_A$，

$x_B = AB + x_A = -9 + 4 = -5$。

例 2 设A、B、C、D是同一直线上的四个点，求证不论它们的位置排列顺序如何，总有如下的关系：

$AB + BC + CD + DA = 0$。

证明：取A、B、C、D这四个点所在的直线为数轴，并设它们的坐标分别为x_A、x_B、x_C、x_D，根据公式①，

$AB + BC + CD + DA$

$= x_B - x_A + x_C - x_B + x_D - x_C + x_A - x_D = 0$。

例 3 设A、B、C、D四点同在一直线上，其中C是BD的中点，求证：

$$AC = \frac{1}{2}(AB + AD)。$$

证明：取A、B、C、D这四个点所在的直线为数轴，并设它们的坐标分别为x_A、x_B、x_C、x_D。C是BD的中点，所以BC与CD的长度相等，方向相同，因而这两条有向线段的数量相等：

$BC = CD$。

$x_C - x_B = x_D - x_C$，

$x_C = \frac{1}{2}(x_B + x_D)$。

于是$\frac{1}{2}(AB + AD) = \frac{1}{2}(x_B - x_A + x_D - x_A)$

$= \frac{1}{2}(x_B + x_D) - x_A = x_C - x_A$。

又 $AC = x_C - x_A$。

所以 $AC = \frac{1}{2}(AB + AD)$。

例 4 设A、B、C、P四点同在一直线上，求证不论这四个点的位置排列顺序如何，都有：

$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0$。

证明：取A、B、C、P这四个点所在的直线为数轴，并设它们的坐标分别为x_A、x_B、x_C、x_P，根据公式①，

$$\begin{aligned}&PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB\\&=(x_A - x_P)(x_C - x_B) + (x_B - x_P)(x_A - x_C)\\&\quad + (x_C - x_P)(x_B - x_A)\\&= x_A(x_C - x_B) + x_B(x_A - x_C) + x_C(x_B - x_A)\\&\quad - x_P(x_C - x_B + x_A - x_C + x_B - x_A) = 0。\end{aligned}$$

〈2〉线段的定比分点

一点P把有向线段P_1P_2分成P_1P和PP_2两部分。有向线段P_1P与PP_2的数量之比，通常用λ表示，即$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$。若点P在线段的内部，则称P为$P_1P_2$的内分点，或者说P内分$P_1P_2$。这时，$P_1P$与$PP_2$同向，$\lambda > 0$。若点P在线段$P_1P_2$的外部，则称P为$P_1P_2$的外分点，或者说P外分$P_1P_2$。这时，$P_1P$与$PP_2$反向，$\lambda < 0$。

设$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$是两个已知点，点P(x, y)是有向线段P_1P_2的分点，且$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$，则分点P的坐标是：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases} \qquad ②$$

其中$\lambda \neq -1$。

证明：从P_1、P、P_2分别向x轴作垂线P_1M_1、PM、P_2M_2，如图4所示，根据平面几何中平行线截得比例线段定理，

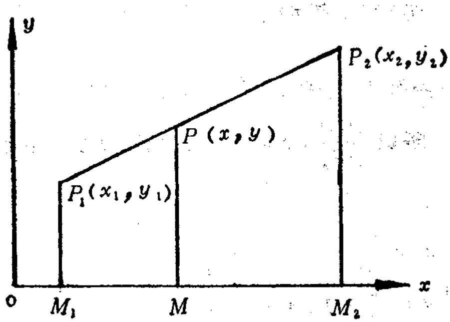


图 4

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|P_1P|}{|PP_2|},$$

若P在P_1与P_2之间，则M也在M_1与M_2之间；若P在P_1P_2这个方向的延长线上，则M也在M_1M_2这个方向的延长线上；若P在P_1P_2的反向延长线上，则M也在M_1M_2的反向延长线上。所以，$\frac{M_1M}{MM_2}$与$\frac{P_1P}{PP_2}$同号。于是有

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda。$$

根据有向线段数量运算公式，

$$M_1M = x - x_1, \quad MM_2 = x_2 - x。$$

所以
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \ (\lambda \neq -1)。$$

从P_1、P、P_2分别向y轴作垂线，仿此即可求得：

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq-1)。$$

公式②叫做线段的定比分点公式。应用这个公式时应当注意，与定比λ相乘的那个坐标是有向线段P_1P_2的终点的坐标。

当P是线段P_1P_2的中点时，P_1P与PP_2的长度相等，且方向相同，所以$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda=1$。由公式②得出线段的中点坐标的公式：

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)。\end{cases}\qquad ③$$

例5　已知$P_1(-3,-6)$和$P_2(3,0)$两点。延长P_2P_1到P，使$|P_1P|=\frac{1}{3}|P_1P_2|$，求点$P(x,y)$的坐标。

解法一：因P在P_2P_1的延长线上，所以

$$|PP_2|=|PP_1|+|P_1P_2|=|PP_1|+3|PP_1|=4|P_1P|,$$

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{1}{4}。$$

因P外分P_1P_2，所以P_1P与PP_2的方向相反，

$$\lambda=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=-\frac{1}{4}。$$

$$x=\frac{-3+(-\frac{1}{4})\cdot 3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-12-3}{4-1}=-5,$$

$$y=\frac{-6+(-\frac{1}{4})\cdot 0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-24}{4-1}=-8。$$

解法二：把P_1看作是PP_2的内分点，则$\lambda=\dfrac{PP_1}{P_1P_2}=\dfrac{1}{3}$。

$$-3=\frac{x+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}},\quad -6=\frac{y+\frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}}。$$

因此求得：

$x=-5$，$y=-8$。

例6 已知同在一直线上的三个点A(-3,3)、B(3,1)和C(6,0)。求点D(x, y)，使$\dfrac{AD}{DC}=-\dfrac{AB}{BC}$。

解：设$\dfrac{AB}{BC}=\lambda$。这里，B是AC的分点。根据公式②，得：

$$3=\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda}。$$

由此求得：$\lambda=2$。于是$\dfrac{AD}{DC}=-2$。再应用公式②，得：

$$x=\frac{-3+(-2)\cdot 6}{1-2}=15,$$

$$y=\frac{3+(-2)\cdot 0}{1-2}=-3。$$

所求点为D(15, -3)。

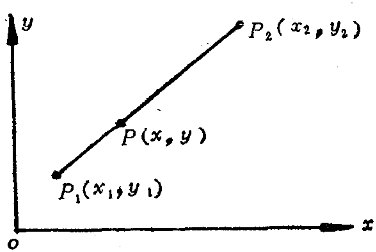


图 5

例7 在点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$处分别放置质量是m_1和m_2的两个质点，求它们的重心的坐标。

解：设点P(x, y)为所给两个质点的重心。根据力矩相等的道

理，

$$m_1|P_1P|=m_2|PP_2|,$$

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{m_2}{m_1}。$$

因P_1P与PP_2同向，所以

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m_2}{m_1}。$$

根据定比分点公式，重心P的坐标为：

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}\cdot x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}\cdot y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}。$$

例 8 在点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$处分别放置质量是m_1、m_2、m_3的三个质点，求它们的重心的坐标。

解： 设P_1与P_2两个质点的重心为$P'(x',y')$。根据例7，

$$x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y'=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}。$$

P_1与P_2两个质点可以看作是集中放置在它们的重心$P'(x',y')$处的一个质点，其质量是：

$$m'=m_1+m_2。$$

这样一来，P_1、P_2、P_3这三个质点的重心$P(x,y)$就是P'和P_3这两个质点的重心。再应用例7的结果，即得所求重心的坐

标：

$$x=\frac{m'x'+m_3x_3}{m'+m_3}=\frac{(m_1+m_2)\cdot\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$x=\frac{m'y'+m_3y_3}{m'+m_3}=\frac{(m_1+m_2)\cdot\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}。$$

在点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、…$P_n(x_n,y_n)$处分别放置质量为m_1、m_2、…m_n的n个质点，则它们的重心的坐标是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}, \\ y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}。\end{cases} \qquad ④$$

应用数学归纳法，即可证明这个公式。

例 9　有四个方向相同的平行力作用在一物体上，$F_1=5\,kg$，$F_2=8\,kg$，$F_3=3\,kg$，$F_4=10kg$，它们的作用点之间的距离依次是36cm，30cm，40cm，如图 6 所示。求这四个力的合力的作用点。

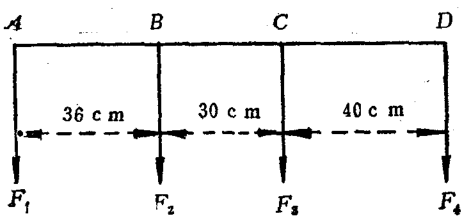


图　6

解：取点A为原点，直线AD为x轴，则A、B、C、D这四个点的坐标为：

A(0，0)；B(36，0)；C(66，0)；D(106，0)。

根据公式④，合力的作用点的坐标为：

$$x=\frac{5\cdot 0+8\cdot 36+3\cdot 66+10\cdot 106}{5+8+3+10}=\frac{773}{13},$$

$$y=0。$$

合力的作用点与点A的距离为$\frac{773}{13}$cm。

例10 有一个用铁线围成的直角三角形线框，两直角边的长分别为120cm和50cm，求这线框的重心。

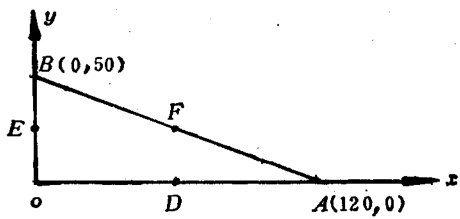


图 7

解：取三角形的直角顶点为原点，两直角边为坐标轴，如图7所示。斜边的长为：

$$|AB|=\sqrt{120^2+50^2}=130。$$

OA边的重心在它的中点D(60，0)，OB边的重心在它的中点E(0,25)，AB边的重心在它的中点F(60,25)。

设铁线的质量为m/cm，则

OA边的质量 = 120m，

OB边的质量 = 50m，

AB边的质量 = 130m。