普通高等教育经济管理类专业规划教材

运筹学

学习指导及习题集

吴祈宗　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育经济管理类专业规划教材

运筹学学习指导及习题集

022
46C

主　编　吴祈宗
副主编　韩润春
参　编　肖继先　侯福均　常世彦

安徽建筑大学 藏书 图书馆

机械工业出版社

本书系与机械工业出版社出版的《运筹学》第2版（吴祈宗主编）教材相配套的学习指导及习题集，内容包括《运筹学》教材中各章节的学习要点及思考题、习题参考解答，以及补充练习题与解答等。这些内容的安排主要是为了能够帮助读者更好地学习《运筹学》教材，消化书中的知识，提高教学效果。本书内容是编者多年教学经验和体会的总结，内容安排上重视阐述基本思想、理论和方法，力求做到深入浅出、通俗易懂、适于自学。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学学习指导及习题集/吴祈宗主编 .—北京：机械工业出版社，2006.7

普通高等教育经济管理类专业规划教材

ISBN 7-111-19422-5

Ⅰ. 运 ... Ⅱ. 吴 ... Ⅲ. 运筹学－高等学校－教学参考资料
Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第067549号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：曹俊玲　责任编辑：冯　铁　版式设计：张世琴
责任校对：李秋荣　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷
2006年8月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 8.25印张 · 319千字
定价：22.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
编辑热线电话（010）88379711
封面无防伪标均为盗版

普通高等教育经济管理类
专业教材编审委员会

主任委员：	韩福荣（北京工业大学）	教授、博士生导师
副主任委员：	张　群（北京科技大学）	教授、博士生导师
	乞建勋（华北电力大学）	教授、博士生导师
	吴祈宗（北京理工大学）	教授、博士生导师
	佘元冠（北京科技大学管庄校区）	教授、博士生导师
	乔　忠（中国农业大学）	教授、博士生导师
	姚　飞（北京化工大学）	教授
	葛新权（北京机械工业学院）	教授
	孙义敏（北京机械工业学院）	教授
	刘家顺（河北理工大学）	教授
	林　松（机械工业出版社）	编审

委员单位：北京工业大学经济与管理学院
北京科技大学管理学院
华北电力大学工商管理学院
中国农业大学经济管理学院
北京理工大学管理与经济学院
北京科技大学管庄校区
北京化工大学经济管理学院
北京机械工业学院工商分院
河北理工大学经济管理学院
北京印刷学院经济管理系
北京信息工程学院经济管理系
北方工业大学经济管理学院
机械工业出版社

编 者 的 话

新世纪伊始，北京地区部分高等院校联合成立了经济管理类专业教材编审委员会，组织编写、出版一套适合各校情况、满足本科层次教学需要的管理类专业系列教材。在各校管理学院、系领导及教师的大力支持和参与下，经过一年多的努力，系列教材终于面世了。

改革开放以来，我国管理学科的发展极其迅猛。在这种形势下，各高等院校普遍设置了管理专业，其发展速度之快，规模之大，也是前所未有的。而教材建设一直是专业建设和教学改革的瓶颈。

据对参加编审委员会的院校管理专业的统计，在我们这支协作队伍中，有5个博士点，30多个硕士点，并拥有400多名专业教师，其中不乏教学经验丰富、学术造诣较深的老、中、青骨干力量。编审委员会认为，集中各校优势，通过合作方式实现教学资源优化配置，编出一套适合各校情况的教材，对加强各校的合作交流，推动师资培养，促进相关课程的教学改革，是一件一举多得的好事。

“质量第一，开拓创新”是我们编写这套教材的指导思想，出版精品是我们的奋斗目标。现阶段应该从教材特色做起。有特色才能有市场，才能为各校师生所接受和欢迎。这套教材具有以下特点：一是内容上有创新，在继承的基础上，反映了当代管理学科的新发展；二是适用、好用，教材编写精练，并留有余地，各教材每章后都附有相配套的作业题；三是有理工科特色，合作院校的教学对象多数是理工科学生。

为了确保教材质量，经过编审委员会遴选，各门课程教材都由资深的教授担任主编，同时各教材编写组成员相对稳定，教材根据使用情况及时修订，使其常用常新，不断提高。

为了配合各校开展多媒体教学的需要，某些教材编写组将合作制作与教材配套的课件，以方便广大师生使用。

机械工业出版社是我国于20世纪50年代初成立的中央出版社。数十年来，曾出版过许多在国内外有重大影响的科技和管理图书。改革开放以来曾经承担全国理工科院校管理工程专业全国统编教材的出版发行，为我国管理专业的建设和发展作出了重大贡献。这套系列教材的出版得到了机械工业出版社的大力支持，谨表示衷心感谢！

普通高等教育经济管理类专业教材编审委员会

2001年10月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

我们编写的《运筹学》教材出版发行以来，受到众多读者的关爱，在支持、鼓励我们的同时，许多读者提出希望，建议出版配套的学习指导及习题集。我们一直有顾虑：由于运筹学本身的应用学科特点，许多问题有着多种解题途径和思路，需要一定的创新思维，如果不慎，极易给读者造成误导。提出要求的人多了，使得我们进一步思考，看到读者中有相当一部分是以自学为主的，运筹学的学习对他们困难非常大，因此提供解答给这些读者以参考还是有益的。为此，我们编写了这本配套的《运筹学学习指导及习题集》。我们希望读者以挑战心态来看待这本书，即把它仅放在参考的地位来看。我们希望以此“砖”来引读者的“玉”。在这里，特别要提醒读者的是，本书中提出的解题方法和过程不是惟一的。作为学习指导，本书弥补了教材中缺乏每章小结的缺陷。对各章的内容学习指导，融入了编者多年的教学经验和体会，能够给读者的学习理解提供一定的帮助。

本书教学指导部分由北京理工大学的吴祈宗、侯福均、常世彦编写，练习与解答部分由河北理工大学的韩润春和肖继先编写。

在本书的编写过程中，得到了来自多方面的支持和帮助，并参考了大量的国内外有关文献资料，这些文献资料对本书的成文起了重要作用。在此，对一切给予我们支持和帮助的朋友、同事、有关人员以及参考文献的作者一并表示衷心感谢。

限于编者水平，书中难免有不当或失误之处，敬请广大读者批评指正。

编者

目　录

第一部分

运筹学学习指导

第1章　绪论学习要点

1.1　运筹学及其应用、发展

（1）运筹学的英文通用名称为“Operations Research”（简称OR），按照原意应译为运作研究或作战研究，是一门基础性的应用学科。运筹学主要研究系统最优化的问题，通过对建立的模型求解，为决策者进行决策提供科学依据。

（2）运筹学在早期主要应用在军事领域，第二次世界大战后运筹学的应用转向于民用。经过几十年的发展，运筹学的应用已经深入到社会、政治、经济、军事、科学、技术等各个领域，发挥了巨大作用。

（3）运筹学的研究和应用越来越广泛和深入。美国前运筹学会主席邦特（S.Bonder）认为，运筹学应在三个领域发展：运筹学应用、运筹科学和运筹数学、他在建议着重发展前两者的同时，强调这三个领域应从整体上协调发展。

目前运筹学工作者面临的大量新问题是：经济、技术、社会、生态和政治等因素交叉在一起的复杂系统。因此，早在20世纪70年代末80年代初就有不少运筹学家提出：要注意研究大系统，注意运筹学与系统分析相结合。

目前，运筹学领域工作者比较一致的共识是运筹学的发展应注重以下三个方面：理念更新、实践为本、学科交融。

1.2　运筹学的内容及特点

1. 运筹学的分支

运筹学的三个来源：军事、管理和经济。

运筹学的三个组成部分：运用分析理论、竞争理论和随机服务理论。

运筹数学的飞快发展，促使并形成了运筹学的许多分支。通常提到的有：线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划、模糊规划等，以上人们常常统称之为数学规划。此外还有：图论与网络、排队论（随机服务系统理论）、存储论、对策论、决策论、搜索论、维修更新理论、排序与统筹方法、可靠性和质量管理等。

2. 运筹学定义

运筹学的几个较有影响的提法：

1）为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础

的科学方法（P.M.Morse & G.E.Kimball）。

2）运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。

3）运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术，否则的话问题的结果会更坏。

3. 运筹学应用的原则

1）合伙原则。是指运筹学工作者要和各方面人士，尤其是同实际部门的工作者合作。

2）催化原则。在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法。

3）互相渗透原则。要求多部门彼此渗透地考虑问题，而不是只局限于本部门。

4）独立原则。在研究问题时，不应受某人或某部门的特殊政策所左右，应独立从事工作。

5）宽容原则。解决问题的思路要宽，方法要多，而不是局限于某种特定的方法。

6）平衡原则。要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡。

1.3 运筹学研究的工作步骤与运筹学的学习

1. 运筹学研究的工作步骤

运筹学与许多科学领域、各种有关因素有着横向和纵向的联系。为了有效地应用运筹学，根据运筹学的特征，人们把运筹学研究的工作步骤归纳为以下几个内容：

(1) 目标的规定。确定决策者期望从方案中得到什么。

(2) 方案计划的研制。实施一项运筹学研究的过程常常是一个创造性过程，计划的实质是规定出要完成某些子任务的时间，然后创造性地按时完成这一系列子任务。

(3) 问题的表述。这项任务的目的是为研究中的问题提供一个模型框架，并为以后的工作确立方向。在这里，第一要考虑问题是否能够分解为若干串行或并行的子问题；第二要确定模型建立的细节，如问题尺度的确定、可控制决策变量的确定、不可控制状态变量的确定、有效性度量的确定和各类参数、常数的确定。

(4) 模型的研制。模型是对各变量关系的描述，是正确研制成功解决问题的关键。构成模型的关系有几种类型，常用的有定义关系、经验关系和规范关系等。

(5) 模型求解。在这一步，应充分考虑现有的计算机应用软件是否适应模型的条件，解的精度及可行性是否能够达到需要。若没有现成可直接应用的计算机软件，则需要以下两步工作：

1) 计算手段的拟定。

2) 程序明细表的编制，程序设计和调试。

(6) 数据收集。把有效性试验和实行方案所需的数据收集起来加以分析，研究输入的灵敏性。

(7) 解的检验（验证）。验证包括两个方面：第一是确定验证模型，包括为验证一致性、灵敏性、似然性和工作能力而设计的分析和实验；第二是验证的进行，即把前一步收集的数据用来对模型作完全试验。

(8) 解方案的实施。一项研究的真正困难往往出现在方案实施的这最后一步，很多问题常常在这时暴露出来，它们会涉及到研制方案的全过程。因此，必须由参与整个过程的有关人员参与才能解决。

2. 运筹学建模的一般思路

(1) 运筹学工作者应具有以下几个方面的知识和能力：熟悉典型运筹模型的特征和它的应用背景；有广博的知识，有分析、理解实际问题的能力，有搜集信息、资料和数据的能力；有抽象分析问题的能力，有善于抓主要矛盾，善于逻辑思维、推理、归纳、联想、类比等能力；有运用各类工具知识的能力；有试验校正和维护修正模型等能力。

(2) 运筹学中用得最多的是符号或数学模型。建立、构造模型是一种创造性劳动。常见的构模方法和思路有以下几种：直接分析法，类比法，模拟法，数据分析法，试验分析法和构想法等。

3. 如何学好运筹学

运筹学是一门基础性的应用学科，主要研究系统最优化的问题。本课程的主要任务是：要求学生掌握运筹学的基本概念、基本原理、基本方法和解题技巧；培养学生根据实际问题建立运筹学模型的能力及求解模型的能力；培养学生分析解题结果及经济评价的能力；培养学生理论联系实际能力及自学能力。

要学好运筹学，在认真听课的同时，学习或复习时要掌握以下三个重要环节：

(1) 认真阅读教材和参考资料，以指定教材为主，同时参考其他有关书籍。一般每一本运筹学教材都有自己的特点，但是基本原理、概念都是一致的。注意主从，参考资料会帮助你开阔思路，使学习深入。但是，把时间过多地放在参考资料上，会导致思路分散，不利于学好。

(2) 要在理解了基本概念和理论的基础上研究例题。要懂得例题是为了帮助理解概念、理论的。作业练习的主要作用也是这样，它同时还具有检查自己学习

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

效果的作用。因此，做题要有信心，要独立完成，不要怕出错。因为，整个课程是一个整体，各节内容有内在联系，只要学到一定程度，知识融会贯通起来，做题的正确与否自己就有判断。

（3）要学会做学习小结。每一节或一章学完后，必须学会用精炼的语言来概括所学内容。这样，才能够从较高的角度来看问题，更深刻地理解有关知识和内容，这就称作“把书读薄”。若能够结合自己参考大量文献后的深入理解，把相关知识从更深入、更广泛的角度进行论述，则称之为“把书读厚”。

第 2 章　线性规划建模及单纯形法

2.1　学习要点及思考题

2.1.1　学习要点

1. 线性规划的模型及标准型

(1) 线性规划模型的一般形式。设决策变量 x_j，$j=1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{cases}
\text{Max(Min)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & (2\text{-}1) \\
\text{s.t.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 & \\
\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 & (2\text{-}2) \\
\quad \vdots & \\
\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m & \\
\quad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 & (2\text{-}3)
\end{cases}
$$

其中，式 (2-1) 称为**目标函数**，它只有两种形式：Max 或 Min；式 (2-2) 称为**约束条件**，它们表示问题所受到的各种条件，一般有三种形式："大于等于"、"小于等于"（这两种情况又称**不等式约束**）或"等于"（又称**等式约束**）；式 (2-3) 称为**非负约束**条件。

在线性规划模型中，也直接称 z 为目标函数；称 x_j，$j=1, 2, \cdots, n$ 为**决策变量**；称 c_j，$j=1, 2, \cdots, n$ 为**目标函数系数**或**价值系数**或**费用系数**；称 b_i，$i=1, 2, \cdots, m$ 为**约束右端常数**或简称**右端项**，也称**资源常数**；称 a_{ij}，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$ 为**约束系数**或**技术系数**。这里，c_j，b_i，a_{ij} 均为常数。

线性规划的数学模型可以表示为下列矩阵形式，即向量和矩阵：

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad
\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

为了书写方便，可把列向量记为行向量的转置，如 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，"T" 表示转置，是 Transform 的缩写；对于 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，用符号表示为：$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$；$\boldsymbol{A}$ 是 m 行 n 列的矩阵，称 $m \times n$ 矩阵。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有时表示为：$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，其中 $\boldsymbol{p}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots,$

$a_{mj})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^m$，于是有：

$$\begin{cases} \text{Max(Min)} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-4}$$

这里，向量的等式与不等式表示所有分量有一致的关系，即当 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$ 时，$\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 表示对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $x_i \leqslant y_i$；其他也类似。

于是，在线性规划模型中，称 $\boldsymbol{c}$ 为**目标函数系数向量**或**价值系数向量**或**费用系数向量**；称 $\boldsymbol{b}$ 为**约束右端常数向量**或简称**右端项**，也称**资源常数向量**；称 $\boldsymbol{A}$ 为**约束系数矩阵**或**技术系数矩阵**。

（2）线性规划问题的规范形式。设 $b_i \geqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，称以下形式的线性规划问题为线性规划的规范形式：

$$\begin{cases} \text{Max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-5}$$

（3）线性规划标准型

$$\begin{cases} \text{Max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-6}$$

矩阵形式：

$$\begin{cases} \text{Max} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-7}$$

线性规划的标准形式有如下四个特点：**目标最大化、约束为等式、决策变量均非负、右端项非负**。

2. 线性规划的图解法

图解法求解两个决策变量的线性规划问题的步骤如下：

1）分别取决策变量 x_1，x_2 为坐标向量建立直角坐标系。

2）对每个约束（包括非负约束）条件，先取其等式在坐标系中作出直线，

通过判断确定不等式所决定的半平面。各约束半平面交汇出来的区域（存在或不存在）若存在，其中各点表示的解称为此线性规划的**可行解**，这些符合约束限制的点集合，称为**可行集**或**可行域**，进行3)；否则该线性规划问题无可行解。

3）任意给定目标函数一个值作一条目标函数的等值线，并确定该等值线平移后值增加的方向。平移此目标函数的等值线，使其达到既与可行域有交点又不可能使值再增加的位置（有时交于无穷远处，此时称无有限最优解）。若有交点时，此目标函数等值线与可行域的交点即**最优解**（一个或多个），此目标函数的值即**最优值**。

3. 线性规划解的有关概念

以下讨论线性规划标准形式的基、基本解、基本可行解。

考虑线性规划标准形式的约束条件：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 的矩阵，$n > m$，秩（$\boldsymbol{A}$）$= m$，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^m$。

设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中的一个非奇异（可逆）的 $m \times m$ 子矩阵，则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划的一个基。一般地，任取 $\boldsymbol{A}$ 中的 m 个线性无关列向量 $\boldsymbol{p}_{jk} \in \mathrm{R}^m$ $k = 1, 2, \cdots, m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_{j1}, \boldsymbol{p}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{jm})$。那么 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划的一个基。

称对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的变量 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}$ 为**基变量**；而其他变量称为**非基变量**。

可以用矩阵来描述这些概念。

设 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划的一个基，则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为：$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})$

$\boldsymbol{x}$ 也可相应地分成：
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{x}_B$ 为 m 维列向量，它的各分量称为**基变量**，与基 $\boldsymbol{B}$ 的列向量对应；$\boldsymbol{x}_N$ 为 $n - m$ 列向量，它的各分量称为**非基变量**，与非基矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的列对应。这时约束等式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 可表示为：

$$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \quad 或 \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

如果对非基变量 $\boldsymbol{x}_N$ 取确定的值，则 $\boldsymbol{x}_B$ 有惟一的值与之对应：

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$$

特别地，当取 $\boldsymbol{x}_N = 0$，这时有 $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。称这个解为一个**基本解**；若得到的基变量的值均非负，则称为**基本可行解**，同时称这个基 $\boldsymbol{B}$ 为可行基。

矩阵描述为，对于线性规划的解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$，称为线性规划与基 $\boldsymbol{B}$ 对应的基本解。若其中 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$，则称以上的基本解为一基本可行解，相应的

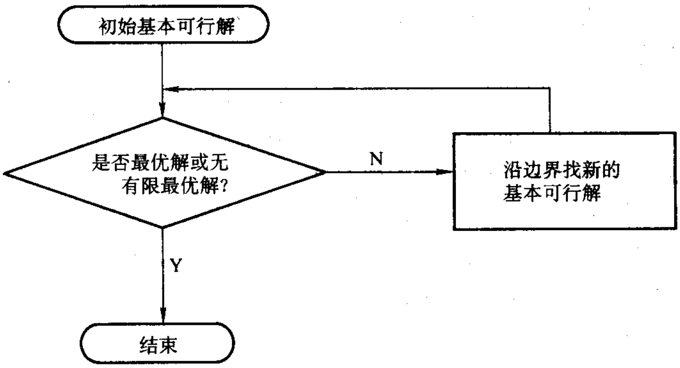
基 $\boldsymbol{B}$ 称为可行基。

我们可以证明以下结论：线性规划的最优解存在，则一定存在基本可行解是最优解。

4. 单纯形法

单纯形法的基本思路是有选择地取基本可行解。即是从可行域的一个基本可行解出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的基本可行解，要求新基本可行解的目标函数值不比原目标函数值差。

单纯形法的基本过程如下图所示。



考虑标准形式的线性规划问题：

$$\begin{cases} \text{Max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

这里，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示为：$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$，其中 $\boldsymbol{p}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^m$。

若找到一个可行基，无防设 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m)$，则 m 个基变量为 x_1，

x_2，…，x_m，$n-m$ 个非基变量为 x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_n。通过运算，所有的基变量都可以用非基变量来表示：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b'_1 - (a'_{1m+1}x_{m+1} + a'_{1m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{1n}x_n) \\
x_2 &= b'_2 - (a'_{2m+1}x_{m+1} + a'_{2m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{2n}x_n) \\
&\vdots \\
x_m &= b'_m - (a'_{mm+1}x_{m+1} + a'_{mm+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{mn}x_n)
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

把它们代入目标函数，得：

$$z = z' + \sigma_{m+1}x_{m+1} + \sigma_{m+2}x_{m+2} + \cdots + \sigma_n x_n \tag{2-9}$$

其中，$\sigma_j = c_j - (c_1 a'_{1j} + c_2 a'_{2j} + \cdots + c_m a'_{mj})$

我们把由非基变量表示的目标函数形式称为基 B 相应的目标函数**典式**。

单纯形法的基本步骤可描述如下：

第一步，寻找一个初始的可行基和相应基本可行解，确定基变量、非基变量以及基变量、非基变量（全部等于0）和目标函数的值，并将目标函数和基变量分别用非基变量表示，即写出目标函数**典式**。

第二步，在目标函数典式中，称非基变量 x_j 的系数为**检验数**，记为 σ_j。若 $\sigma_j>0$，那么可选定这个非基变量 x_j，称为"进基变量"，转第三步。如果任何一个非基变量的值增加都不能使目标函数值增加，即所有 σ_j 非正，则当前的基本可行解就是最优解，计算结束。

第三步，确定使基变量的值在进基变量增加过程中首先减少到0的变量 r，使满足

$$\theta = \mathrm{Min}\{b'_i/a'_{ij} \mid a'_{ij} > 0\} = b'_r/a'_{rj}$$

这个基变量 x_r 称为"出基变量"。当进基变量的值增加到 θ 时，出基变量 x_r 的值降为0时，可行解就移动到了新的基本可行解，转第四步。如果进基变量的值增加时，所有基变量的值都不减少，即所有 a'_{ij} 非正，则表示目标函数值随进基变量的增加可以无限增加。此时，不存在有限最优解，计算结束。

第四步，将进基变量作为新的基变量，出基变量作为新的非基变量，确定新的基、新的基本可行解和新的目标函数值。这一步在实际操作时，是利用初等行变换进行的。在新的基变量、非基变量的基础上重复第一步至第四步。

考虑规范形式的线性规划问题：设 $b_i>0 \quad i=1,\cdots,m$

$$
\begin{cases}
\mathrm{Max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\mathrm{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{cases}
$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com