平面弹性复变方法（第三版）

路见可 著

复变函数是研究平面弹性和断裂力学的一种极为有效的工具。本书将各种问题用复变方法化为积分方程求解，并证明其惟一可解。书中大部分内容为著者研究成果。

武 汉 大 学 学 术 丛 书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY
▸ 全 国 优 秀 出 版 社 ▸ 武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

平面弹性复变方法

（第三版）

路见可 著

武汉大学出版社

1

内 容 提 要

本书简明扼要地说明了平面弹性理论中的复变函数方法，并提出各种重要基本问题，特别是断裂力学中的一些问题(包括复合材料问题)的求解方法。书中有不少内容是作者多年来的科研成果。本书可作为应用数学专业和力学专业高年级大学生和研究生的教材，也可供从事应用数学和弹性力学教学和科研的同志参考。

图书在版编目(CIP)数据

平面弹性复变方法/路见可著.—3版.—武汉:武汉大学出版社,2005.4
(武汉大学学术丛书)
ISBN 7-307-04508-7

Ⅰ.平…　Ⅱ.路…　Ⅲ.弹性力学—高等学校—教材　Ⅳ.O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第033769号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:卢　建　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本:880×1230　1/32　印张:8.875　字数:241千字　插页:3
版次:2005年4月第1版　　2005年4月第1次印刷
ISBN 7-307-04508-7/O·320　　定价:20.00元

第一版序

用复变函数论工具求解平面弹性问题是非常有效的方法。国际上，特别是前苏联学派，在这方面有大量的工作。N. I. Muskhelishvili 的专著 [34] 就是这方面的代表著作，其中阐述了它的基本理论并概括了 20 世纪 50 年代及以前的许多研究工作。该书是经典的标准著作，但篇幅过大，初学者常常望而生畏。日本学者森口繁一的专著 [11] 则为一本总结性著作，又失之过简，许多问题的讨论并未展开，不易为初学者所掌握。此外，还有一些英文专著，如 [13]，各有特点，在国内不多见，就不一一列举了。

本书将用较少篇幅，介绍怎样把平面弹性问题化为解析函数边值问题，并说明如何进一步转化为积分方程以及从理论上说明后者解的存在和惟一。所用方法是构造性的，因而容易具体求解（虽然本书并未列入数字例子）。书中有不少内容是作者在 20 世纪 60 年代以来的研究成果，但有关周期弹性问题方面的内容则全未提及，因为已在作者和蔡海涛同志合著的 [10] 一书中专门讨论。本书中有关断裂力学的内容（尤其是复合材料的问题）特别值得注意，因为这是在实际应用中最为重要的课题。

阅读本书基本部分只需具备复变函数论的知识和弹性力学中的一些最基本的概念，还要用到 Fredholm 积分方程的备择定理。在某些章节中需涉及其他方面的知识时，当随时指出，以方便读者。

作者希望本书能引起函数论工作者对应用的兴趣，也希望应用数学和力学工作者能更深入了解复变函数工具的作用，以促进这两方面的同志之间的互相了解，使这两方面的工作互相渗透，都得到提高和发展。

由于作者才力、学识所限，书中难免有错误和不妥之处，谨希广大读者不吝指正。

路见可

1985 年 4 月

第二版序

本书第二版作了较大修订。除改正了一些第一版中排印错误外，增加了作者近十多年来的科研成果，如 3.6,3.7,6.5,6.6 各节等；特别对循环对称问题增加了不少具有裂纹的情况，因此单独另辟一章。此外，还增加了一个附录二，以方便读者阅读本书。本版仍难免存在不妥与谬误之处，尚祈广大读者指正。

路见可

2002 年 5 月

第三版序

本书第三版对第二版（包括其序）的少量误植进行了改正，个别文字有所变动，但所有内容均未变。

路见可

2005 年 3 月

目　　录

第 1 章　一 般 理 论

1.1　基本概念与公式

我们假定读者已对弹性理论有一定的基础知识，因此这里只概括地阐述一下以后要讨论的平面弹性理论中的一些基本概念与公式.

设在空间已取定一右手直角坐标系 $Oxyz$，用 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 分别表示弹性体中各点在 x,y,z 轴方向的正应力，$\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}$ 等为相应的剪应力. 这样，在某点处与 x 轴垂直的微面积上应力向量在 x,y,z 轴方向的分量分别为 $\sigma_x,\tau_{xy}(=\tau_{yx}),\tau_{xz}(=\tau_{zx})$，它们都是该点的位标$(x,y,z)$的函数. 我们用 u,v,w 分别表示弹性体中各点在 x,y,z 轴方向的位移分量，当然它们也都是(x,y,z)的函数. 称

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}(=\varepsilon_x) &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ e_{yy}(=\varepsilon_y) &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ e_{zz}(=\varepsilon_z) &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

为(单向)拉伸形变，而

$$\left.\begin{aligned} e_{yz}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{yz}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ e_{zx}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{zx}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ e_{xy}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

称为(纯)剪切形变.

在线弹性理论中，起重要作用的广义胡克定律是：应力是诸形变的齐次线性函数，反之，形变也是诸应力的齐次线性函数.

对于弹性体，我们假定是各向同性的，用 $E\ (>0)$ 表示其弹性(杨氏)模数，用 $\nu\ \left(0<\nu<\frac{1}{2}\right)$ 表示其泊松比.

所谓平面弹性问题可分为以下两种情况.

1° 平面形变状态 设想有一两端无限长的弹性柱体，其母线平行于 z 轴. 由于某种原因，弹性体内各点产生水平的位移 u,v，且其值仅是 x,y 的函数，与坐标 z 无关：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

而 $w\equiv 0$；换句话说，位移只发生在与 z 轴垂直的平面内，且与 z 轴垂直的各个截面上，位移的分布状况是相同的. 这种情况称为**平面形变状态**，因为这时只存在形变 e_{xx},e_{yy},e_{xy}，而下标与 z 有关的形变 $e_{zx}=e_{zy}=e_{zz}=0$.

在实际问题中，当然不会有无限长的弹性柱体，但若物体长度尺寸远远大于横断面尺寸而位移又符合上述要求，就可近似地看做这类问题. 例如相当长的水坝坝体往往就可看做这种问题.

在这种情况下，广义胡克定律为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y},\\ \sigma_y&=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y},\\ \tau_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\end{aligned}\right\}\tag{1.1.3}$$

其中 λ,μ 称为拉梅常数，由下二式确定：

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},\tag{1.1.4}$$

μ 称为弹性体的剪切模数.

注意，在这种情况下，应力也必然是 x,y 的函数而与 z 无关. 要当心的是，这时虽然 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$，但 σ_z 一般不为零而由下式

给出:

$$\sigma_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{1.1.5}$$

设弹性体内有体积力 $\boldsymbol{F}=(X,Y,0)$, 即分布于弹性体的各点处外力的强度(单位面积上所受的力), 它在 x,y 轴方向的分量已分别记为 X,Y, 它们都是 x,y 的函数, 而在 z 轴方向的分量 $Z=0$ (这才可能是平面形变问题). 以后我们只限于讨论弹性静力学问题. 根据静力学平衡原理, 可得**平衡方程**:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

由(1.1.3)易得

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=2(\lambda+\mu)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{1.1.7}$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子. ①

又以(1.1.3)代入(1.1.6), 可得

$$-X=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)+\mu\Delta u,$$

$$-Y=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\mu\Delta v.$$

因此,

$$-\frac{\partial X}{\partial x}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}\right)+\mu\Delta\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial Y}{\partial y}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)+\mu\Delta\frac{\partial v}{\partial y},$$

两式相加, 得

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=(\lambda+2\mu)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

---

① 对于以后所出现的函数, 恒假定在弹性体上有足够的光滑性.

与(1.1.7)式比较，则有

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right), \tag{1.1.8}$$

(1.1.8)称为弹性体所应满足的**协调方程**.

2° 平面应力状态 设想在 Oxy 平面中的一块薄板，其内各点只有水平的应力，即 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 都是 x,y 的函数，而下标带有 z 的应力 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$. 这种情况称为**平面应力状态**. 这时位移 u,v,w 也都只是 x,y 的函数(注意 w 一般并不为零). 从弹性一般理论可知，1°中所得的所有等式在这种情况下仍都成立，只要在这些公式中所有出现的 λ 改为

$$\lambda^*=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}. \tag{1.1.9}$$

所谓平面弹性问题指的就是以上两种情况. 且由于上述原因，我们以后就不再分别讨论平面形变与平面应力状态，而总认为(1.1.3),(1.1.6),(1.1.8)均成立，不过根据不同情况将其中出现的 λ 分别理解为(1.1.4)或(1.1.9).

我们现在有三个未知函数 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 的偏微分方程组(1.1.6),(1.1.8)，其中 X,Y 为已知函数. 在一定的边界条件下来求解.

从理论上讲，总可以把问题化归为无体积力的情形：$X=Y=0$. 事实上，只要找出方程组(1.1.6),(1.1.8)的一组特解 $\sigma_x^*,\sigma_y^*,\tau_{xy}^*$，在 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 上分别减去这些函数后作为新的未知函数，就能达到目的. 在很多实际情况下，X,Y 并不复杂，这种特解是容易求得的. 例如，如果体积力是重力，假定 y 轴铅直朝上，则 $X=0$，$Y=-\rho g$，这里 g 为重力加速度，ρ 为弹性体密度，则易见 $\sigma_x^*=\tau_{xy}^*=0$，$\sigma_y^*=\rho g y$ 就是(1.1.6),(1.1.8)的一组特解. 当然，作这种变换未知函数后，边界条件也要作相应的改变.

这样，在无体积力的假定下(以后我们总这样假定)应有平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

与协调方程

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0. \tag{1.1.11}$$

(1.1.10),(1.1.11)将是我们进一步讨论的基础.

求解这类偏微分方程组要有一定的边界条件. 设弹性体占有平面中一区域 S,① 其边界为 L (设有充分的光滑性). 根据边界条件的不同提法，我们以后着重讨论下列两类基本问题：

第一基本问题 已给 L 上各点的外应力(荷载)，求弹性平衡.

第二基本问题 已给 L 上各点的位移，求弹性平衡.

所谓求弹性平衡，就是要求出 S 中各点的应力状态 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 以及位移 u,v. 在许多实际问题中，位移 u,v 并不重要，可不必求出；但一旦 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 求出后，再求 u,v 并不困难，可由(1.1.3)的前两式解出 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，积分后，就可求得.

还有一种所谓**混合问题**，即在 L 的一部分上已知外应力，而在另一部分上已知位移，求弹性平衡. 我们将在第 4 章中讨论这类问题的某些简单情况.

1.2 应力函数

偏微分方程组(1.1.10),(1.1.11)可简化为一个未知函数的方程. 以下暂设 S 是一有界单连通域.

由(1.1.10)的第一式知，$-\tau_{xy}\mathrm{d}x+\sigma_x\mathrm{d}y$ 为一个确切微分，亦即在 S 中存在一函数 $B(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}B=-\tau_{xy}\mathrm{d}x+\sigma_x\mathrm{d}y,$$

或即

$$\frac{\partial B}{\partial x}=-\tau_{xy},\quad \frac{\partial B}{\partial y}=\sigma_x.$$

同理，由(1.1.10)的第二式知，S 中存在一函数 $A(x,y)$，使

① 在平面形变状态时，S 实际上是弹性体的一横断面.

$$dA = \sigma_y dx - \tau_{xy} dy,$$

或即

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sigma_y, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\tau_{xy}.$$

于是我们有

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

因而 $A dx + B dy$ 又为一确切微分，故在 S 中又存在一函数$U(x, y)$，使

$$dU = A dx + B dy,$$

或即

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B.$$

函数 U 与应力之间有如下关系：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{1.2.1}$$

由此可见，

$$\Delta U = \sigma_x + \sigma_y. \tag{1.2.2}$$

将(1.2.2)代入(1.1.11)，便得

$$\Delta^2 U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)称为**双调和方程**. 这样，我们得到了一个未知函数 U 的 4 阶偏微分方程. U 称为**实应力函数**或**实 Airy 函数**.

如果 U 求出来了，由(1.2.1)就可求出应力状态. 由此也就容易求出 S 中的形变. 事实上，将(1.1.3)前两式解出$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$，且与第三式一起，利用(1.2.1)，可得

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta U, \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta U, \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.4}$$

以后还将看到，由此还可求出 u,v 来.

所以，在一定的边界条件下，求解平面弹性问题，就是求解双调和方程(1.2.3).

为要使用复变函数工具，我们设法通过 U，将应力 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 和位移 u,v 等利用解析函数表达出来.

设 $\Delta U=P$，于是由(1.2.3)，P 是 S 中的调和函数. 由于 S 是有界单连通域，故其共轭调和函数 Q 也是单值的(可差一常数). 于是

$$f(z)=P+\mathrm{i}Q$$

就是 S 中的全纯(单值解析)函数. 因此 $f(z)$ 也只确定到一常数项. 再令

$$\varphi(z)=p+\mathrm{i}q=\frac{1}{4}\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \tag{1.2.5}$$

其中积分路径可理解为从 S 中某固定点 z_0 起沿任何不越出 S 的弧段到 z 点(这积分与路径无关). 这样，

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P,\quad -\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{1}{4}Q.$$

由此立即可见，

$$p_1=U-px-qy$$

也是 S 中的调和函数. 实际上，

$$\Delta(px)=x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2\frac{\partial p}{\partial x}+x\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$
$$=x\Delta p+2\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{2}P,$$

因为 p 也是调和函数. 同理可证

$$\Delta(qy)=\frac{1}{2}P.$$

再注意到 $\Delta U=P$，便可知 $\Delta p_1=0$. 记 p_1 的共轭调和函数为 q_1，则

$$\chi(z)=p_1+\mathrm{i}q_1$$

又是 S 中的全纯函数. 于是，

$$U = px + qy + p_1 = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$$
$$= \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}]; \qquad (1.2.6)$$

这样，应力函数 U 已通过 S 中的两个全纯函数 $\varphi(z),\chi(z)$ 表示出来.

将(1.2.6)对 x 求偏导数，注意$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(z)$，$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}=\overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}=\overline{\varphi'(z)}$，等等，可得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2}[\varphi(z)+\bar{z}\varphi'(z)+\overline{\varphi(z)}+z\overline{\varphi'(z)}+\psi(z)+\overline{\psi(z)}], \qquad (1.2.7)$$

其中已令

$$\psi(z) = \chi'(z).$$

同理，注意到$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=-\mathrm{i}$ 等，可得

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\mathrm{i}}{2}[-\varphi(z)+\bar{z}\varphi'(z)+\overline{\varphi(z)}-z\overline{\varphi'(z)}+\psi(z)-\overline{\psi(z)}], \qquad (1.2.8)$$

因而

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}. \qquad (1.2.9)$$

又由(1.2.5)，

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4}f(z) = \frac{1}{4}(P+\mathrm{i}Q),$$

故

$$\Delta U = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]. \qquad (1.2.10)$$

反过来，任给 S 中的两个全纯函数 $\varphi(z),\chi(z)$ 或 $\varphi(z),\psi(z)$，由(1.2.6)定义函数 U，由(1.2.7),(1.2.8)，再分别对 x,y 求偏导数，然后相加，又可得 ΔU 的表达式(1.2.10)，从而 U 是双调和函数. 因此，未知函数 U 就转化为两个全纯函数 $\varphi(z),\chi(z)$ 或者 $\varphi(z),\psi(z)$ 了. 以后恒将假定，$\varphi(z),\psi(z)$ 可以连续延拓到 $\bar{S}=S+L$ 上.

我们现在要把应力和位移也用全纯函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 表示出来. 因为 $\Delta U=P$, 故

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=P,\quad P=4\frac{\partial p}{\partial x}=4\frac{\partial q}{\partial y};$$

代入(1.2.4)的前两式中, 得

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

积分后, 得

$$2\mu u=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p+f_1(y),$$

$$2\mu v=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q+f_2(x).$$

由此可见 $-f_1'(y)=f_2'(x)=\alpha$ 为一常数. 从而

$$f_1(y)=-\alpha y+\beta,\quad f_2(x)=\alpha x+\gamma.$$

但位移

$$u_1=\frac{1}{2\mu}(-\alpha y+\beta),\quad v_1=\frac{1}{2\mu}(\alpha x+\gamma)$$

代表整个弹性体做一刚体运动,① 它不改变弹性体的平衡状态, 故可忽略不计. 于是我们就有位移向量 $u+\mathrm{i}v$ 的复变函数表示式

$$2\mu(u+\mathrm{i}v)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},\qquad(1.2.11)$$

其中已令

$$\kappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=\begin{cases}3-4\nu, & \text{平面形变状态;}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{平面应力状态.}\end{cases}$$

---

① 对于平动, $x'=x+h$, $y'=y+k$, 位移 $u=x'-x=h$, $v=y'-y=k$; 对于旋转, $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$ 来说, 如果 $|\theta|$ 充分小, 可近似地看做 $x'=x-\theta y$, $y'=\theta x+y$, 故位移 $u=-\theta y$, $v=\theta x$. 所以上式相应于 $h=\frac{\beta}{2\mu}$, $k=\frac{\gamma}{2\mu}$ 的平动和 $\theta=\frac{\alpha}{2\mu}$ 的小旋转.