高考第二轮复习
——知识·能力·测试丛书

数学

北京市一帮一助教协会组编

北京科学技术出版社

编写说明

一般说来，高考复习要进行三轮，第一轮主要是以教材为准绳，熟知各个孤立的知识点、基本概念和基本定律；第二轮复习主要解决的问题是各孤立的知识点之间横向有什么区别和联系，纵向有什么内在的逻辑主线给串起来，专题讲座、能力培养、单元测试是本轮复习的主要特色；第三轮复习是指考前做一些综合性的模拟试卷，通过做套题来查漏补缺，培养信心，调整良好的应考心态。

基于高考复习的阶段特点，为了帮助广大师生在首轮复习的基础上，做到纵串遍（知识点纵向掌握）、横贯通（知识点横向归纳）、纵横编（各种能力的训练）、精题选（知识与能力的落实与考核），进一步落实知识点掌握、能力块训练，测试面完成而编写，使知识系统化、能力科学化、测试系列化。故这套丛书就定名为高考第二轮复习——知识·能力·测试丛书。

本丛书根据不同学科的特点，每科编写时分成若干讲，以讲座形式出现，每讲均由以下四部分组成。

1. **知识体系**：高度概括出本讲的知识，内在体系（用图表或说明）。

2. **试题剖析**：详析历年高考试题，展示解题方法和技巧。

3. **能力培养**：综合概括（知识点的纵横、归纳、总结），概念辨析，思维迁移，实验设计，书写表达，一题多解，综合计算。

4. **单元测试**：针对该专题讲座配备的单元练习，以利巩固提高所学知识和进行能力培养。

本丛书所选习题全部为一线教师多年所积累的精选习题，通过做题可以达到剖析实质（每做一题增加目的性、联系知识点能

力块加以分析)、以一促多(解剖实质、举一反三)和强调落实(看一题,会一题;会一题,做一题;做一题,对一题)的目的。

总之,该丛书是我会几十名特、高级教师集体智慧的结晶,同时也作为我会助教活动的一部分,从市场上讲,我们是首次挑起高考高二轮复习的大旗,因其首次,缺憾及不成熟的地方在所难免,希望各地师生使用后将良好的建议和善意的批评及时反馈给我们,以便我们再版时修订参考,来函请寄:100037,北京海淀区北洼路5号首都师大附中,北京一教一助教协会办公室收转。

本丛书的出版,得到了北京科学技术出版社社长张敬德和李可亮主任的大力支持和协助,在此一并表示衷心的感谢。

北京市一帮一助教协会

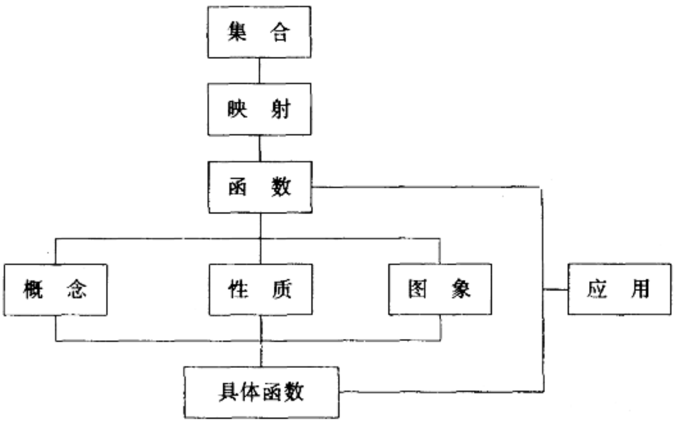
一九九六年十一月

目　　录

第一讲　函　　数

知识要点

函数是高中数学的重要组成部分，是高中代数的主线。它体系完整，内容丰富，应用广泛。由于它描述的是自然界中量的依存关系，是对问题本身的数量的制约关系的一种刻划，所以是对数量关系本质特征的一种揭示，为我们从运动、变化、联系、发展的角度认识问题打开了思路。在高中阶段，我们所研究的函数部分的结构为：



主要内容有：

概念：定义域、值域、对应法则，反函数、复合函数、分段函数等；

性质：单调性、奇偶性、周期性、有界性、极(最)值性、互逆性等；

图象:函数的图象及图象变换(平移、对称、翻折、伸缩等)及互为反函数的函数图象的关系;

具体函数:正、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等;

应用:比较大小、求最值、解方程、解不等式、数列及实际问题。

考试要求是:

(1)理解集合、子集、交集、并集、补集的概念。了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合。

(2)了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系。

(3)理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象。

(4)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质,并会解简单的指数方程和对数方程。

说明:函数的定义、图象和性质作为函数的基本理论,是高考试题中考查重点之一,应熟练掌握求函数定义域、值域的方法,并能掌握各类函数的图象和性质,并在此基础上分析和解决有关函数的各类问题。

试题剖析

纵观近几年的高考数学试题,不难发现函数部分的试题不仅数量不减,而且质量呈上升趋势。试题很好地体现了《考试说明》中关于"测试中学数学基础知识、基本技能、基本方法,运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力,以及运用所学数学知识和方法,分析问题和解决问题的能力"的要求。具体分析有以下四个特点:紧扣大纲,强调基本知识;引申教材,考查基本能力;沟通联系,检验函

数思想；联系实际，强化应用意识。下面通过高考试题具体说明：

一、紧扣大纲，强调基本知识

例 1　(1)已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x|x=2n,n\in N\}$，$B=\{x|x=4n,n\in N\}$，则

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$

(C)$I=A\cup\overline{B}$　　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

（1996 年全国高考理科第 1 题）

(2)已知 I 为全集，集合 $M,N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B)$M\subseteq\overline{N}$

(C)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D)$M\supset\overline{N}$

（1995 年全国高考理科第 1 题）

(3)设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$

(A)$\{0\}$　　(B)$\{0,1\}$　　(C)$\{0,1,4\}$　　(D)$\{0,1,2,3,4\}$

（1994 年全国高考理科第 1 题）

这三道都是与集合有关的题目，考查的是集合的有关概念、集合与集合之间的关系，在教材上都可以找到原型，体现了以教材为依据的命题原则。解答起来并不困难，只要基本概念清楚，立刻可得答案为(C)、(C)、(C)。

例 2　(1)$y=x^{\frac{3}{5}}$在$[-1,1]$上是

(A)增函数且是奇函数　　(B)增函数且是偶函数

(C)减函数且是奇函数　　(D)减函数且是偶函数

（1993 年全国高考理科第 5 题）

(2)设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，则 $f^{-1}(0)=$________。

（1993 年全国高考理科第 21 题）

(3)已知 $y=\log_a(2-ax)$在$[0,1]$上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是

(A)$(0,1)$　　(B)$(1,2)$

(C)$(0,2)$　　(D)$[2,+\infty)$

（1995年全国高考理科第11题）

分析：以上三题主要考查了函数的性质，涉及到幂函数、指数函数、对数函数的图象和性质（如奇偶性、单调性等）以及反函数、复合函数等有关概念和性质。

解：(1) $y=x^{\frac{3}{5}}$ 是奇函数且为增函数，选(A)。

(2)令 $y=4^x-2^{x+1}$

则 $y=(2^x)^2-2\times2^x$，$\therefore y+1=(2^x-1)^2$，$y\geqslant-1$

$\therefore 2^x=\sqrt{y+1}+1$

$\therefore x=\log_2(\sqrt{y+1}+1)$，即 $f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x+1}+1)(x\geqslant-1)$

$\therefore f^{-1}(0)=\log_2 2=1$

这里，我们是先求出反函数，再求值。在求反函数的过程中，要利用配方进行变形。事实上，如果根据互为反函数的函数的定义域和值域之间的关系，我们立刻发现，本题实际上是求 $4^x-2^{x+1}=0$ 时 x 的值，所以我们有

$2^x(2^x-2)=0$

$\because 2^x\neq0$，$\therefore 2^x=2$，$\therefore x=1$，即 $f^{-1}(0)=1$

可见，灵活运用所学知识，不仅可以正确得到结论，而且可以简化计算。

(3) $\because a$ 为底数，$\therefore a>0$ 且 $a\neq1$

$\because y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数，又 $u=2-ax$ 为减函数，$\therefore y=\log_a u$ 是增函数，$\therefore a>1$。又当 $x\in[0,1]$ 时，$2-ax>0$，$\therefore x=1$ 时有 $2-a>0$，$\therefore a<2$。

综上有 $a\in(1,2)$，$\therefore$ 选(B)。

这道题考查的知识点比较多，并从逆向思路的角度提出问题，确定参数 a 的取值范围，要求我们对函数的基本性质的掌握不仅要准确而且要深刻。

例3 (1)设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是

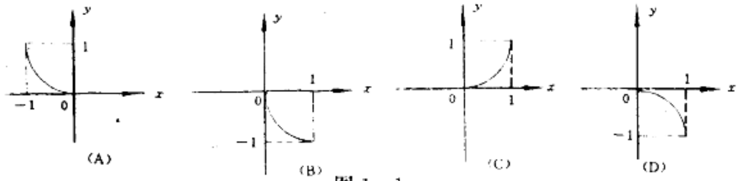


图 1—1

（1994 年全国高考理科第 12 题）

(2)函数 $y=-\dfrac{1}{x+1}$ 的图象是

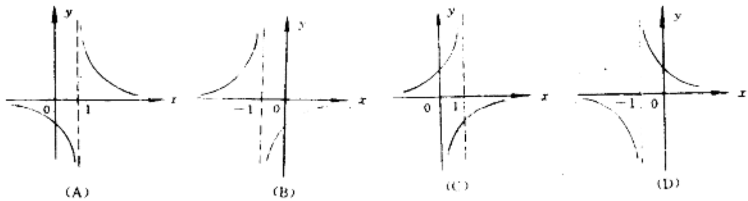


图 1—2

（1995 年全国高考理科第 2 题）

(3)当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是

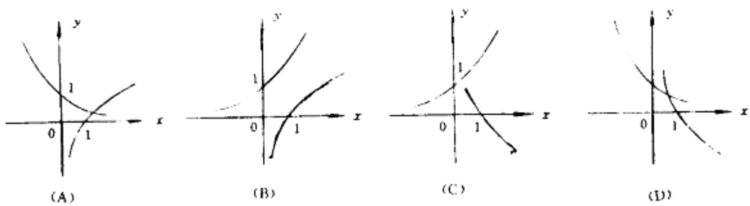


图 1—3

（1996 年全国高考理科第 2 题）

分析：以上三题主要是考查函数的图象及其图象变换，涉及到函数定义域、值域、对应法则等方面的知识。

解：(1)由 $f(x)$解析式和定义域知，$f^{-1}(x)$的值域为$[-1,0]$，所以(A)、(C)可排除。再考虑一个特殊点$(-\frac{1}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2})$在 $f(x)$图象上，则点$(\frac{2-\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$在 $f^{-1}(x)$的图象上，由图象观察可知选(B)。

也可以画出 $f(x)$的图象，再由 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称，故知选(B)。

(2)由 $y=-\frac{1}{x+1}$知 $x\neq-1$，∴排除(A)、(C)。又当 $x=0$ 时 $y=-1$，所以可排除(D)，因此选(B)。

另外，函数 $y=-\frac{1}{x+1}$的图象可以看作由函数 $y=-\frac{1}{x}$向左平移一个单位得到，所以选(B)。

(3)当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 为增函数，∴(C)、(D)可排除。又 $y=a^{-x}=(\frac{1}{a})^x$，而 $0<\frac{1}{a}<1$，∴$y=a^{-x}$为减函数，所以选(A)。

说明：由以上三个小题可以看出，正确画出函数图象，对深入理解函数的性质有直接帮助。另一方面，又可以通过图形，考查学生对概念、知识的理解深度和运用的灵活程度。因此在复习时，必须重视概念、性质、图象的相互依存关系，自觉运用有关工具解决各种问题。

二、引申教材，考查基本能力

在考查基础知识的同时，高考注意“出活题、考基础、考能力”，知识考查与能力考查相结合，以考能力为主。因此，高考试题中出现了一些学生并不十分熟悉的结论，但只要基础知识扎实，教材内容学透学活，就能顺利解决。

例 4　(1)如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2$

$+t)=f(2-t)$，那么

(A)$f(2)<f(1)<f(4)$　　(B)$f(1)<f(2)<f(4)$

(C)$f(2)<f(4)<f(1)$　　(D)$f(4)<f(2)<f(1)$

（1992年全国高考理科第12题）

(2)定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数$f(x)$都可以表示成一个奇函数$g(x)$和一个偶函数$h(x)$之和。如果$f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么

(A)$g(x)=x,h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B)$g(x)=\frac{1}{2}\lg[(10^x+1)+x],h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C)$g(x)=\frac{x}{2},h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D)$g(x)=-\frac{x}{2},h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

（1994年全国高考理科第15题）

(3)设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于

(A)0.5　　(B)-0.5

(C)1.5　　(D)-1.5

（1996年全国高考理科第15题）

分析：这三道题所给出的已知条件都是学生不太熟悉的内容，需要挖掘已知与未知的关系，把不熟悉的东西变成熟悉的问题来解决，这就要求考生有良好的心理准备、应变能力和扎实的基本功。

解：(1)$\because f(x)=x^2+bx+c$的图象为开口向上的抛物线，又对任意t都有$f(2+t)=f(2-t)$，$\therefore f(x)$的图象关于直线$x=2$对称。$\therefore f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(2)<f(3)<f(4)$。而由对称性知$f(1)=f(3)$，$\therefore f(2)<f(1)<f(4)$，$\therefore$选(A)。

解决本题的关键在于对以抽象符号给出的式子$f(2+t)=f(2-t)$的几何意义的正确理解，以及对于对称特点的灵活运用。

(2)由已知，正确选项应是 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，由此可排除(B)、(D)；同时还应有 $f(x)=g(x)+h(x)$，故可以排除(A)，∴选(C)。

本题虽然给了一个一般性结论，但是并未要求考生自己去构造符合条件的 $g(x)$ 和 $h(x)$，而是给出含有 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的具体函数，让考生根据奇偶性加以判断，这样就使学生有入手之处。当然，如果能由已知条件求出 $g(x)$ 和 $h(x)$，也可以得到正确结果。

(2)∵$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，∴$f(x+2)=f(-x)$，这说明 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，并且关于原点对称。又当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，画出函数图象可知 $f(x)$是周期为 4 的函数，∴$f(7.5)=f(-0.5)=-0.5$，∴选(B)。

这里，充分挖掘题目条件所提供的信息是十分重要的。奇偶性、周期性、对称性等性质是通过文字语言和符号语言以及图形语言给出的，只要能够熟练掌握这些数学语言，数学问题就会迎刃而解。

三、沟通联系，检验函数思想

函数关系所揭示的变量之间的关系是普遍存在于自然科学与社会科学之中的，就是在高考数学试题中也体现得十分充分。因此，注意用函数思想指导相关内容的学习，解决相关问题就显得十分自然和重要。

例 5　(1)函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是

(A)2π　　　　(B)$2\sqrt{2}\pi$

(C)π　　　　(D)$\frac{\pi}{4}$

(1993 年全国高考理科第 1 题)

(2)函数 $y=\sin(2x+\frac{5}{2}\pi)$的图象的一条对称轴的方程是

(A)$x=-\frac{\pi}{2}$　　　　(B)$x=-\frac{\pi}{4}$

(C)$x=\frac{\pi}{8}$　　　　(D)$x=\frac{5}{4}\pi$

(1991 年全国高考理科第 5 题)

(3)如果实质 x、y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$，那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

(1990 年全国高考理科第 10 题)

(4)函数 $y=\arccos(\sin x)(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3})$ 的值域是

(A) $(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi)$　　(B) $[0,\frac{5}{6}\pi)$

(C) $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$　　(D) $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$

(1994 年全国高考理科第 14 题)

(5)函数 $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的递增区间是______。

(1995 年全国高考上海第 17 题)

分析：以上几题是在三角函数、反三角函数及几何内容中考查函数的周期性、对称性、最值性、增减性、值域等知识，既考查了函数的一般性质，又考查了一些具体函数的特有性质。可见，从整体上把握函数体系，从具体函数上加深对性质理解和认识，这是学好函数知识的重要途径。

解：(1) $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$。$\therefore f(x)$ 最小正周期为 2π，选(A)。

(2) $y=\sin(2x+\frac{5}{2}\pi)$ 的图象的对称轴方程代入函数解析式后，应能使函数取到最值，所以将四个选项中提出的数据代入验证即可知正确答案为(D)。

(3)令 $\frac{y}{x}=k$，则问题转化为直线 $y=kx(x\neq0)$ 与圆 $(x-2)^2+$

$y^2=3$ 的位置关系中相切时 k 的最大值问题，也可以利用判别式法求 k 的最大值。正确答案为(D)。

(4) $\because y=\arccos x$ 为减函数，

$\therefore$ 求 $y=\arccos(\sin x)(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3})$ 的值域只要先求出 $\sin x$ 的值域 $(-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，

$\therefore y$ 的值域为 $[0,\frac{5}{6}\pi)$，选(B)。

(5) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$

又考虑 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 4k\pi-\frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{\pi}{2}$

当 $k=0$ 时，$-\frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$

$\therefore y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ 在 $(-2\pi,2\pi)$ 内的单调递增区间是 $[-\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2}]$。

四、联系实际，强化应用意识

函数知识内容丰富，应用广泛，不仅渗透于代数、三角、几何等数学知识中，而且在自然科学的其他领域甚至社会科学方面都有用武之地。建立函数关系，解决实际问题，确有独到之处。近年来高考数学加强了对应用问题的考查力度，对指导教学，引导学生提高分析问题、解决问题能力起了重要的导向作用。

例 6　(1)在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，共 n 个数据。我们规定所测物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小，依此规定，从 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 推出的 $a=$________。

（1994年全国高考理科第20题）

(2)1992年底世界人口达到54.8亿，若人口的年平均增长率为$x\%$，2000年底世界人口数为y(亿)，那么，y与x的函数关系是_______。

（1995年全国高考上海第11题）

分析：从应用题所处位置看基本属于中档题或难题，因为题目要求考生从题目条件中读懂有关的内容，理解定义的概念，建立相应的函数关系，并利用所学知识解决问题，对学生的基础知识，基本能力都有较高的要求。

解：(1)设a与各数据的差的平方和为y，则

$$y=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$$

$$=na^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)a+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

当y取最小值时，则

$$a=-\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

本题以统计问题为背景提出了数学要求。要求考生弄清要求，抽象关系，转化问题，从而正确解答，虽然起点高，但落点较低。

(2)由已知条件，列出函数关系为$y=54.8(1+x)^8$

综上，高考试题中的函数部分对考生的要求是有层次的，有重点的，考查的方面和形式是多角度、多侧面的。只有立足课本，狠抓基本，提高能力，才能做到心里有数，手中有法。

能力培养

对数学学科的考试，《考试说明》提出了具体的能力要求："运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及运用所学数学知识和方法，分析问题和解决问题的能力。"其中运用所学数学知识和方法，分析问题和解决问题的能力是综合要求。通常认为，学生能力的形