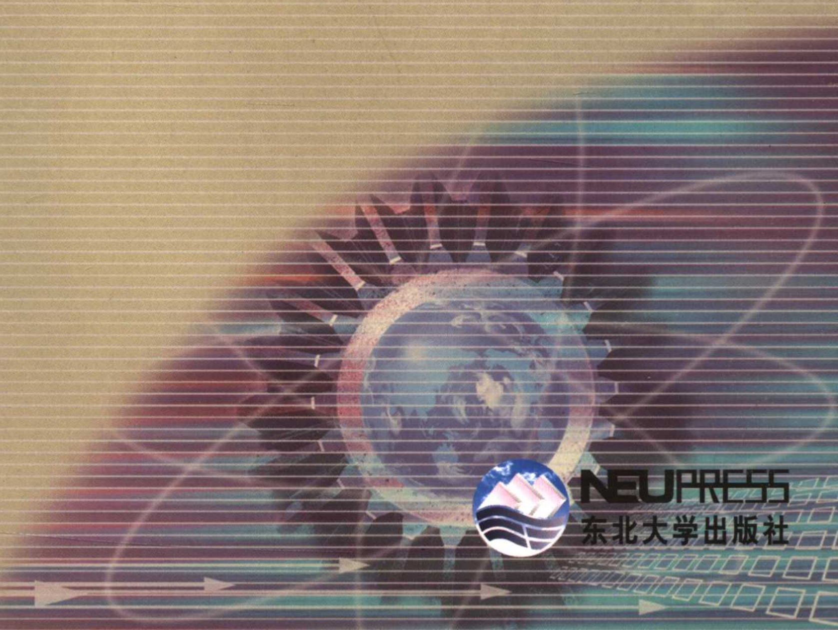
新世纪高职高专基础课系列教材

高等数学

Advanced Mathematics



NEUPRESS
东北大学出版社

新世纪高职高专基础课系列教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 沙萍，黄己立，李月清，刘满主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
ISBN 7-81102-020-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①沙… ②黄… ③李… ④刘…　Ⅲ. 高等数学　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 072511 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：16.5
字　　数：418 千字
出版时间：2006 年 8 月第 2 版
印刷时间：2006 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘淑芳　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：张　萍
责任出版：秦　力

定　　价：25.00 元

前　言

进入21世纪以后，我国的高职高专教育有了突飞猛进的发展，但教材建设却略显滞后。特别是近年来学制缩短、对人才需求的变化等诸因素的影响，对教材，特别是基础课教材又提出了新的、更严格的要求。正是在这种形势下，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出适用于理工类高职高专各专业使用的《高等数学》一书。

本书是依据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑到相当多的学校高等数学课学时减少这一实际情况。为此，确立编写本书的指导思想为：重视概念、强调应用、侧重计算。本书的特色也体现在下述几个方面：

1. 重视基本概念

高等数学内容虽然抽象，但每一个基本概念都有其实际背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲。在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质以及数学的价值。

2. 强调实际应用

本着学习数学是为了使用数学这一宗旨，并考虑到高职高专教育的目标是培养应用性人才，书中较多选择了实际问题的例题和习题，以提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

3. 侧重运算、解题能力

根据高职学生的特点，力求内容深入浅出、论证简明易懂，侧重于运算、解题能力的训练，让学生在弄清基本概念的基础上熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到增加运算速度、提高解题能力的目的。每章均附有与教学内容密切联系的习题，书末给出答案。

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号“*”标出，供相关专业选择。同时也考虑到“专升本”的需要，有些章节的内容略有加深，也给出了少量的带星号“*”的习题。

全书共有10章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，一元函数微分学的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学及其应用，无穷级数。

本书主要适于用做高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校以及本科院校设立的二级职业技术学院理工类各专业的高等数学课的教材。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教。

作　者

2006年2月

《高等数学》编写人员

主　　　编：沙　萍　黄己立　李月清　刘　满

副　主　编：李修清　李友国　岳晓宁　董树权

刘雅妹

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王天辉　齐淑华　李国强　李金兰

李海英　扶　炜　张　友

目　　录

第一章　函数、极限与连续

现实世界中存在各种各样的量，其中包括常量和变量．常量是相对的，而变量是绝对的．若干个变量之间有时不是相互独立的，而是彼此存在一定的依赖关系，函数正是描述了变量之间的某种依赖关系，它是高等数学研究的对象．对于函数，中学已学过一些，而在本课程中，将采用一种新的、重要的思想方法——极限思想——来研究函数的一些新的性质．

本章将弄清研究的对象，即给出函数概念及有关的基本知识，掌握研究对象的思想方法，即引入极限思想，它是研究函数微积分的重要方法，它将贯穿高等数学课程的始终．最后利用极限，研究函数的第一个新性质——连续性．

第一节　函　　数

一、数集、区间、邻域

数集：高等数学研究的函数都是实变量函数，即函数中涉及的变量都取实数，如果将某一变量所取到的所有实数构成集合 A，则 A 是一个由实数组成的数集，它往往是实数域 R 的子集，即 $A\subseteq\mathbf{R}$.通常，它可以是特殊的数集——区间．

区间：区间包括有限区间$[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$，区间长均为 $b-a$，和无限区间$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, +\infty)$，其中 a，b 为任意实数，它们都是满足一定条件的实数构成的数集．如：

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty, b)=\{x\mid x<b\}.$$

邻域：设 x_0 是给定的实数，δ 是给定的正数，称数集$\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作$U(x_0, \delta)$，即

$$U(x_0, \delta)=\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}.$$

由于
$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$
所以点 x_0 的 δ 邻域是开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$．两个端点关于 x_0 对称，其中 x_0 确定了邻域的位置，称作邻域的中心，δ 确定了邻域的大小，称为邻域的半径(如图 1-1)．

将邻域的中心 x_0 去掉所得的数集，称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作$\dot{U}(x_0, \delta)$，即

$$\dot{U}(x_0, \delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta).$$

如图 1-2.

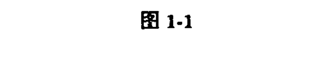


图 1-1

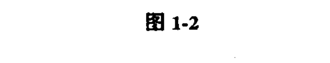


图 1-2

二、函数概念

引例 设正方形的边长为 x，面积为 A，则 A 依赖于 x 的变化而变化，两者依赖关系可表示成

$$A=x^2.$$

当变量 x 在区间$(0,+\infty)$内每取一个数值时，变量 A 按着确定的对应法则 $A=x^2$，总有唯一确定的数值与它对应，则称 A 是 x 的函数.

抛开引例中变量的实际含义，抽象出变量之间的依赖关系这一实质，得到如下函数的定义.

定义 1 设 x，y 是两个变量，D 是给定的数集. 若对于 x 在 D 内每取一个数值，变量 y 按照一定的对应法则 f，总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.

其中数集 D 为函数 $f(x)$ 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. x 为**自变量**，y 为**因变量**.

当 x 在 D_f 内取定某个数值 x_0 时，对应的 y 取到的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=f(x_0).$$

当 x 在定义域 D_f 内取遍每一个值，对应的函数值的全体组成的数集，称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f，即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D_f\}.$$

关于函数概念有如下几点说明.

(1) 决定一个函数需要两个要素：对应法则 f 和定义域 D_f. 这是判定两个函数是否为相同函数的依据. 如果两个函数的对应法则相同，定义域相同，那么这两个函数就是相同的函数，而与自变量和因变量用什么符号表示无关.

例如函数 $y=\sqrt{x}$ 与 $s=\sqrt{t}$，虽然变量表示的符号不同，但对应法则和定义域却相同，这两个函数表示同一个函数.

(2) 函数定义域的确定：通常，如果函数不是由实际问题所确定的，即没有实际意义，并用数学表达式表示，那么定义域是使函数表达式有意义(成立)的 x 所能取到的一切实数组成的数集，并称为自然定义域. 但如果函数有实际意义，则需要根据实际问题确定定义域.

如函数 $y=x^2$ 的自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$. 如果这一函数表示正方形面积 y 与边长 x 的关系，则它的定义域为 $D_f=(0,+\infty)$.

(3) 函数定义中，没有指明有几个确定的 y 值与 x 值对应. 如果对每一个 $x\in D_f$，总有唯一确定的 y 值与 x 对应，称函数为单值函数，如果有两个或两个以上确定的 y 值与 x 对应，则称函数为多值函数.

例如，方程 $x^2+y^2=1$，当 x 在闭区间$[-1,1]$上除端点 $x=\pm1$ 外，每取一个数值，由对应法则 $x^2+y^2=1$，y 总有两个确定的数值与 x 对应，所以，方程 $x^2+y^2=1$ 确定了 y 是 x 的多值函数. 如果限定 $y>0$ 或 $y<0$，就会得到两个单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$，称为多值函数的两个单值支.

本课程所讨论的函数，除特别说明外，都是指单值函数.

(4) 表示函数主要有三种方法：**图形法、表格法、公式法**. 例如用图形表示某人从甲地到

乙地行驶的路程与时间的关系．用表格统计某单位各部门捐款的情况．用公式表示圆的面积与半径的关系等．图形法和表格法直观、明了，但有时不便于作抽象研究．公式法的优点是适宜理论上的推导、论证，但有时比较抽象，不易理解．因此对函数的研究往往是将公式表达与图形表示结合起来．

例1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(x-2)$的定义域．

解 x 应满足如下不等式组

$$\begin{cases}4-x^2>0\\ |x-2|\leqslant 1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-2<x<2\\ 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

即

$$1\leqslant x<2.$$

所以，所求函数的定义域为[1, 2)．

例2 确定函数表达式．

(1) 设 $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．

(2) 设 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$，求 $f(x)$．

解 (1) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{x}-x^2+2x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-x^2+2x$．

(2) 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{[(t+1)+1]^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

例3 设绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，求定义域 D_f，值域 R_f，并画出它的图形．

解 $D_f=(-\infty, +\infty)$，$R_f=[0, +\infty)$，它的图形如图1-3．

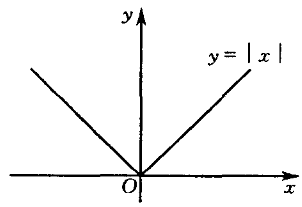


图 1-3

这一函数表达式的特点是当自变量 x 在不同的取值范围内，其对应法则用不同表达式表示，但它仍表示一个函数，称这样的函数为**分段函数**．其中 $x=0$ 是分段函数的分段点．图形在 $x=0$ 处出现“尖点”(0, 0)．函数在 $x=0$ 处可能发生某种性质上的改变．分段函数要分段求值，分段作图，要根据 x 的具体取值范围，选取相应的表达式表示函数．

分段函数是今后研究的主要对象之一，特别要留意函数在“分段点”处性质的变化．

例4 设符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求定义域 D_f，值域 R_f，并画它的图形．

解 符号函数也是分段函数，$D_f=(-\infty, +\infty)$，$R_f=\{-1, 0, 1\}$，图形如图 1-4．“$x=0$”是函数的“分段点”，且图形在 $x=0$ 处断开，所以函数在 $x=0$ 处可能发生性质

的变化.

对任何 $x\in D_f=R$，有 $|x|=x\cdot\mathrm{sgn}x$. 由这一公式，自然会理解符号函数名字的由来.

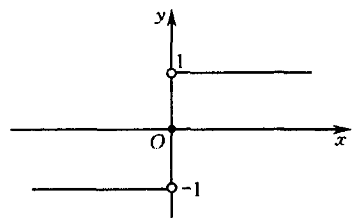


图 1-4

三、函数的特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$在某区间 I 上有定义(I 可能是$f(x)$的定义域，也可能是定义域的子集). 如果存在某一正数 M，使得对于每一个 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 I 上**无界**.

例如，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 在定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$内都有界，即 $|\cos x|\leqslant 1$; $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$. 函数 $y=\frac{1}{x}$在$(1, 2)$内有界，即$\left|\frac{1}{x}\right|<1$，但在$(0, 1)$内，$y=\frac{1}{x}$无界.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若对任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上**单调增加**，称区间 I 为**单调增加区间**；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上**单调减少**，并称区间 I 为**单调减少区间**. 单调增加函数的图形随着 x 的增大，呈现上升趋势，单调减少函数的图形随着 x 的增大，呈现下降趋势.

例如，$y=x^2$ 在区间$[0, +\infty)\subset D_f$ 内单调增加，在$(-\infty, 0]\subset D_f$ 内单调减少，但在 $D_f=(-\infty, +\infty)$内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称，若对任意的 $x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；若对任意的 $x\in D_f$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如，$y=|x|$是偶函数，$y=\sin x$ 是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，如果存在非零实数 T，使得对任意 $x\in D_f$，有 $x+T\in D_f$，且

$$f(x+T)=f(x).$$

则称 $f(x)$为**周期函数**，T 为$f(x)$的**周期**. 通常周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期函数，周期都是 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 也都是周期函数，周期都是 π.

周期函数的图形具有在每一个周期长度的区间内形状相同的特点，所以，只要画出一个周期长度区间内的图形，再通过图形的左、右平移而得到整体图形，并且可以研究一个周期长度区间内函数的性质，推及整体性质.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 2　设给定的函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，值域为 R_f. 若对任意 $y\in R_f$，总有确定

的 $x\in D_f$ 与 y 对应且满足 $f(x)=y$，这时得到以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称这个新函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称原给定的函数 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，且定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=D_f$.

反函数也有单值与多值之分，除特别指明外，主要研究直接函数与反函数都是单值的情况.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，从图形上可以了解它们将有十分相似的性质. 例如有如下定理：

定理 1 若直接函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单值，单调增加(或减少)，且对任意 $x\in I_x$，有 $f(x)\in I_y$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 I_y 上也单值，单调增加(或减少).

2. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 R_φ. 如果 R_φ 与 D_f 的交集非空，即 $R_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$，则通过变量 u 可以确定变量 y 是变量 x 的函数，并称这一函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 称变量 u 为**中间变量**.

注 (1) 注意两个函数能构成复合函数的条件是 $R_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$，这也是确定复合函数定义域的依据. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能复合成一个函数. 因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $D_f=[-1,\ 1]$，$u=2+x^2$ 的值域 $R_\varphi=[2,\ +\infty)$，而 $D_f\cap R_\varphi=\varnothing$.

例 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，求 $f(\sin x)$ 的定义域.

解 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，知复合函数 $f(\sin x)$ 必须满足

$$0\leqslant\sin x\leqslant 1$$

即

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\ (k\ \text{为整数}),$$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\ \text{为整数}\}$.

(2) 要弄清复合函数的复合结构，即知道复合函数是由哪几个简单函数复合而成，这对今后研究复合函数的微积分是有益的.

例 6 下列复合函数是由哪几个简单函数构成的.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；(2) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$；(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$.

解 (1) $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 两个函数复合而成，u 为中间变量.

(2) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 三个函数复合而成，u，v 是两个中间变量.

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\dfrac{x}{2}$ 三个函数复合而成，u，v 是两个中间变量.

五、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数)；

(2) 指数函数 $y=a^x$ (a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)；

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)；

(4) 三角函数：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$；

(5) 反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

这五种函数统称为**基本初等函数**，它们的性质和图形在中学已学过，这里不再详细说明. 基本初等函数是构成初等函数的主要元素，对初等函数的研究离不开基本初等函数.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成的，并可用一个表达式表示的函数，称为**初等函数**，例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ y=\ln\frac{x+\cos^2 x}{\sin x}$$

等都是初等函数. 而分段函数

$$y=\operatorname{sgn} x,\ f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

就不是初等函数.

第二节　函数的极限

函数 $y=f(x)$的因变量 y 依赖于自变量x 的变化而变化. 在研究两个变量这种密切相关的变化过程中，首先要研究当自变量 x 在某一变化状态下，对应的因变量 y 随之的变化趋势. 这里自变量 x 的变化状态主要指如下两种情况.

(1) x 越来越无限接近有限值x_0，记作 $x\to x_0$；

(2) x 的绝对值$|x|$无限增大，记作 $x\to\infty$.

本节先讨论特殊的函数——数列的极限，然后再讨论一般的函数的极限.

一、数列的极限

数列是指按照一定规律排列而成的一列数：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

简记为$\{x_n\}$. 数列中的每一个数称作数列的项，第 n 项 x_n 称作数列 x_n 的通项或一般项. 例如：

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}:\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

$$\{(-1)^{n-1}\}:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$$

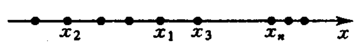


图 1-5

可见，数列的项 x_n 依赖于项数 n 的变化而变化，相当于项数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$，其中自变量 n 取正整数，对应法则就是数列的通项 x_n. 所以数列可作为特殊的函数加以讨论. 如果用图形描绘数列，它对应于数轴上一列点. 它也可理解为数轴上的一个动点 x_n，

随着 n 的变化移动到数轴上相应位置形成的．如图 1-5．

数列 $x_n=f(n)$的自变量 n 取正整数 1, 2, …, 越来越大，记作 $n\to\infty$，相应数列各项在数轴上将其对应点描出来，观察它们在数轴上的移动趋势．

例如，数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$：2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, …, 如图 1-6．

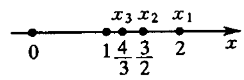


图 1-6

观察结果：随着 n 无限增大，数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$大于 1 而无限接近于常数 1．这个常数 1 就称作数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$当 $n\to\infty$时的极限．

数列 $x_n=(-1)^{n-1}$：1, −1, 1, −1, …, 如图 1-7．

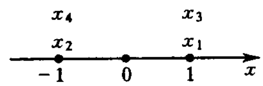


图 1-7

观察结果：随着 n 无限增大，数列 $x_n=(-1)^{n-1}$在两个常数 −1, 1 上交替变化，没有无限接近于一个确定的常数．因此说这个数列没有极限．

由这两个具体数列的变化趋势，可抽象出数列极限的一种定性描述定义．

定义 1 设数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，对应的数列的项 x_n 无限接近某个确定的常数A，则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的**极限**，或称当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$**收敛**于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A\ (n\to\infty).$$

如果当 n 无限增大时，数列的项 x_n 不是无限接近一个确定的常数，则称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$发散．

注 关于数列极限还有精确定义，数列 x_n 与 A 的无限接近程度可用距离$|x_n-A|$无限小表示，而$|x_n-A|$无限小等价于对任意给定的无论多小的正数 ε，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立．这个不等式成立的条件是 n 无限增大，n 无限增大可用存在正整数N，当 $n>N$ 表示．于是数列$\{x_n\}$极限的精确定义为：

对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对应数列各项 x_n 总有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列 x_n 收敛于常数$A(n\to\infty)$．

又如，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$收敛于 0 $(n\to\infty)$；数列$\{2^n\}$发散．

其中数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$单调减少，即$\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\cdots>\frac{1}{2^n}\cdots$且有界，即$\left|\frac{1}{2^n}\right|<1$；而数列$\{2^n\}$单调增加，即$2<2^2<\cdots<2^n<\cdots$但无界．那么数列的收敛性与其有界性是否有一定联系呢？答案是肯定的，即有下列定理．

定理 1（整体有界性） 若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$必有界．

注 这个定理可由数列极限的精确定义证明(略)．

数列有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件．

例如，数列$\{(-1)^n\}$是有界的，即$|(-1)^n|=1$，但它却发散．

将数列收敛的必要条件加强起来，得到如下数列收敛的充分条件．

定理 2 若数列$\{x_n\}$有界且单调，则数列$\{x_n\}$必收敛．

注 这个定理的定性解释是：如果将单调数列各项对应的点在数轴上表示出来，这些点

在数轴上朝着数轴正向或负向移动．移动结果有两种：一种是无限接近某一定点，另一种是沿数轴移向无穷远．由于数列有界，所以只能存在前一种结果，即数列有极限．

例如，数列 $x_n=|q|^n$，$|q|<1$，单调减少且有界，当 $n\to\infty$ 时，$x_n=|q|^n$ 收敛．类似于数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$．

收敛的数列还有其他的性质，这将在一般的函数极限性质中作综合阐述．

二、函数的极限

1．当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例 讨论函数 $y=2x-1$ 当 $x\to\frac{1}{2}$ 时的变化趋势．

函数 $y=2x-1$ 的图形为直线，如图 1-8．

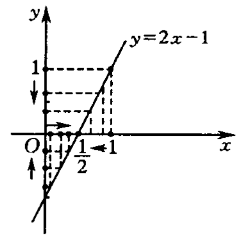


图 1-8

观察直线上的点的纵坐标 y 随着横坐标 x 从左、右两侧无限接近 $\frac{1}{2}$ 时的变化趋势．结果表明：当 x 从右侧无限接近 $\frac{1}{2}$ 时，纵坐标 y 沿 y 轴正半轴从上至下无限接近“0”；当 x 从左侧无限接近 $\frac{1}{2}$ 时，y 沿 y 轴负半轴从下至上也无限接近“0”．

这一结果又可叙述为：当自变量 x 在 $\frac{1}{2}$ 左、右无限接近 $\frac{1}{2}$ 时，对应的函数值 y 无限接近常数 0．这个常数 0 就是函数 $y=2x-1$ 当 $x\to\frac{1}{2}$ 时的极限．

注 (1) $x\to x_0$ 是指 x 无限接近 x_0 而不等于 x_0 的变化状态．所以函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可以有定义，也可以无定义．此例中函数在 $x=\frac{1}{2}$ 处是有定义的．又如 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义，但当 $x\to 2$ 时，它存在极限．所以，一般情况下，$x\to x_0$ 是指 x 落在 x_0 的去心邻域内，即 $0<|x-x_0|<\delta$．

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果自变量 x 在该邻域内无限接近 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例如(1) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$（$C$ 为常数）；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$．

注 (2) $x\to x_0$ 包括 x 从右侧无限接近 x_0，记作 $x\to x_0^+$；与 x 从左侧无限接近 x_0，记作 $x\to x_0^-$．但有时 x 要分成从单侧无限接近 x_0．如 $y=\sqrt{x-1}\sin\frac{1}{x-1}$，$x$ 无限接近 1 只能从 1 的右侧接近 1，即 $x\to 1^+$．又如 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 由于 x 在 $x=0$ 的左右两侧变化时，$f(x)$ 的表达式不同，“$x\to 0$”要分成 $x\to 0^+$ 和 $x\to 0^-$ 讨论．即所谓的单侧极限．

如果 x 在 x_0 的左半邻域内，即 $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ 且无限接近 x_0 时，对应的函数值无限接近某一确定的常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

如果 x 在 x_0 的右半邻域内，即 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 且无限接近 x_0 时，对应的函数值无限接近某一确定的常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限与右极限统称为**单侧极限**.

例 1 (1) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(2) 设函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-1) = -1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$.

由于"$x\to 0$"包含 $x\to 0^-$ 或 $x \to 0^+$，而 $f(x)$ 无限接近的常数不是唯一确定的，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

由于无论 $x\to 0^-$，还是 $x\to 0^+$，$f(x)$ 都无限接近同一个确定的常数，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

由例 1 可以理解如下定理阐述的函数极限存在与单侧极限的关系.

定理 3 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

2. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例 当 $x\to\infty$ 时，观察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势. 如图 1-9.

从图形上观察到的结果是当 x 在 x 轴正半轴上取正实数无限增大，即 $x\to+\infty$，对应的函数值在 y 轴的正半轴上从上至下无限接近于常数"0"，当 x 在 x 轴负半轴上取负实数无限减少，但 $|x|$ 无限增大，即 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值在 y 轴的负半轴上从下至上无限接近于常数"0"，总之，当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近常数"0"，称常数 0 为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

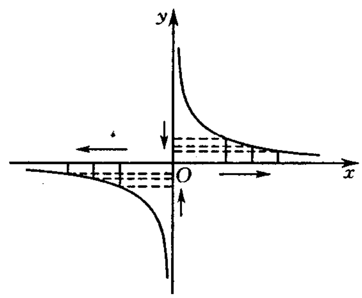


图 1-9

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>M$ 时有定义(M 为某一正数)，如果当 $|x|$ 无限增大时，即 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \ (x\to\infty).$$

注 若 $f(x)$ 在 $x>M$(M 为某一正数)有定义，且随着 x 无限增大，即 $x\to+\infty$ 时，对

应的函数值 $f(x)$ 无限接近某个确定的常数 A，则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

若 $f(x)$ 在 $x<-M$（M 为某一正数）有定义，且随着 x 无限减小，即 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 也可称作**单侧极限**，且有如下定理.

定理 4 设函数 $f(x)$ 当 $|x|>M$（M 为某一正数）有定义，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

注 函数极限的几何意义：如果在自变量 x 的某种变化状态下（如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 等），函数 $f(x)$ 有极限为 A，则一定存在某一区间 I，当 $x\in I$ 时，函数 $f(x)$ 的图形无限接近直线 $y=A$. 如图 1-10（设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$）.

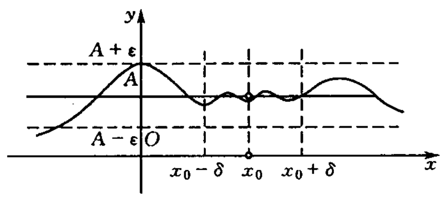


图 1-10

特别地，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为 $f(x)$ 的图形的**水平渐近线**.

由极限的几何意义，容易理解如下的有关函数极限的性质. 下面，以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为例阐述有关性质定理. 其他形式的极限，也有类似的结论.

三、有关函数极限的性质

定理 5（极限的唯一性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则 $A=B$.

定理 6（函数的局部有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)$ 有界，即存在某一正数 M，对任一 $x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 7（函数的局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论（函数极限的保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内，$f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

定理 8 如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足如下条件：

(1) 当 $x\in$ 某一 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n\ (|q|<1)$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0\ (|q|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}-|q|^n=0$，且