报考研究生丛书之四

高等数学复习纲要

上　册

（修订本）

合肥工业大学学报编辑部

报考研究生丛书之四

2

高等数学复习纲要

（基础部份）

顾秉琏　曾华堂　洪鸿炳

张春炎　蒋和理　蔡凤生

合肥工业大学学报编辑部

编 辑 说 明

《报考研究生丛书》是为了帮助广大青年学生复习有关课程，应考研究生，根据部颁教学大纲和招考研究生的要求而编写的，包括政治、英语、化工、数学、物理、力学等类课程。旨在使同学们通过学习，进一步掌握基本原理、明确基本概念、提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

《报考研究生丛书》主编宋权、副主编席庆义。

丛书之四《高等数学复习纲要》上册，共有八章，包括《函数极限连续》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《空间解析几何》、《多元函数微分学》、《多元函数积分学》、《微分方程》、《级数》等内容。参加本书编写的有（以章次为序）：顾秉琏、曾华堂、洪鸿炳、张春炎、蒋和理、蔡凤生。本书由万迪生、苏家铎审定。

由于我们水平有限，书中难免有缺点甚至错误，欢迎读者批评指正。

一九八三年七月修订

目　录（上册）

第一章　函数、连续、极限

这一章是学习数学分析的基础，包括三个最基本的概念：函数概念、极限概念和函数连续性的概念。

I　内容提要

（一）函　数

1.函数概念　设x，y是两个变量，如果x在某范围X内任意取定一个值，按一定规律y都有确定的值与之对应，就称y是x的函数，记为$y=f(x)$.X称为函数$f(x)$的定义域.对应于$x=x_0$的函数值记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$.

2.复合函数　设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当x在某区间上取值时，对应的u值可使y有定义，则y是x的**复合函数**，记为$y=f[\varphi(x)]$.

并非任意两个函数都可构成复合函数的，需当x在函数φ的定义域X或其一部份取值时，对应的u使有一y通过f而与之对应，这两个函数才可构成复合函数。此时，$f[\varphi(x)]$的定义域视情况不同或为X或其一部分。

3.反函数　在已给函数$y=f(x)$中，把y看作自变量，x

看作因变量所确定的函数$x=f^{-1}(y)$，称为$y=f(x)$的反函数。

若函数$y=f(x)$在区间上是严格单调的(单增或单减)，则它的反函数$x=f^{-1}(y)$也单值且严格单调(单增或单减)。

4.隐函数 由方程$F(x,y)=0$确定的函数。隐函数未必能以显式$y=f(x)$表示。

5.初等函数

基本初等函数：幂函数($y=x^{\mu}$ μ为任何实数)、指数函数($y=a^x$ $a>0$，$a\neq 1$)、对数函数($y=\log_a x$ $a>0$，$a\neq 1$，特别$y=\ln x$)、三角函数($y=\sin x$，$y=\cos x$等)、反三角函数($y=\arcsin x$,$y=\arccos x$等)。

由常量和基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

(二) 极 限

1.极限概念

(1) 数列的极限 如果对于给定的任意小的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，不等式$|x_n-A|<\varepsilon$成立，则称A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \qquad 或x_n\to A \quad 当n\to\infty$$

这时称数列是收敛的，否则称数列是发散的。

收敛数列只有一个极限且收敛数列一定是有界的（有界数列不一定收敛)。

(2) 函数的极限

a。如果对于给定的任意小的正数ε，总存在一个$\delta>0$，

使得对一切适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限。记成$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当$x\to x_0$。

b。如果对于给定的任意小的正数ε，总存在一个正数N，使得对适合不等式$|x|>N$的一切x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记成
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或 $f(x)\to A$，当$x\to\infty$。

上述极限定义中，ε用以刻划接近程度，预先给定。$\delta=\delta(\varepsilon)$（或$N=N(\varepsilon)$）随$\varepsilon$而定，反映$x\to x_0(x\to\infty)$的一个阶段，从极限的意义来看，只要证明有一个$\delta$（或$N$）存在就行。$x$是以任意方式趋于$x_0$（或$\infty$）。当$x\to x_0$时，函数$f(x)$有无极限与$f(x)$在$x_0$有否定义无关。

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且$A>0$（或$A<0$），那末就存在点$x_0$的某一邻域，当$x$在该邻域内但$x\neq x_0$时，$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

如果$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那末$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）。

如果$f(x)\geqslant g(x)$，而且$\lim f(x)$，$\lim g(x)$存在，那末$\lim f(x)\geqslant \lim g(x)$。

（3）单边极限 $x\to x_0$有两种特定的方式。

a。当$x<x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时左极限，记以$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$或$f(x_0-0)$。

b。当$x>x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记以$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$或$f(x_0+0)$。

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$成立的充要条件是

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A。$$

2.极限存在的判定准则

（1）数列$\{x_n\}$收敛的充要条件为：对任给$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使当$n, m > N$时，恒有$|x_n - x_m| < \varepsilon$。

仿此可得函数极限存在的充要条件.例如，极限$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$存在的充要条件是，对任给$\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon) > 0$，使对任何$x \geqslant N$，$x' \geqslant N$时$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$成立。

（2）单调有界数列必存在极限。

（3）数列$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$若$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1, 2, 3 \cdots)$，且$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = A$，则数列$\{x_n\}$的极限存在，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$。

此准则推广到函数极限中去。例如：

若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ 且 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

则 $f(x)$ 的极限存在，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

3.极限的运算定理

若 $\lim f_1(x) = A$ $\quad \lim f_2(x) = B$ $\quad$ 则

(1) $\lim(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) = A \pm B$；

(2) $\lim f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$。

以上(1)(2)可以推广到任意有限个函数的情形。

4.两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{x}=e^{a}$

5. 无穷小和无穷小的比较

称变量$\alpha(x)$为无穷小量，如果$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$

（1）若$\lim f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha$ α—无穷小；反之，若$f(x)=A+\alpha$，则$\lim f(x)=A$。

（2）设α，β是两个无穷小，若

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ 则说β是比α高阶的无穷小，记成$\beta=o(\alpha)$；

$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0(k>0)$就说$\beta$是关于$\alpha$的k阶无穷小。

特别，当$k=1$，就说β与α是同阶无穷小，此时，若$c=1$，又称这两个无穷小是等价的，记作$\alpha\sim\beta$。

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，

则 $$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

（3）设两个无穷小α，β，如果 $\lim\frac{\beta-\alpha}{\beta}=0$，就说$\alpha$是的主部。两个等价无穷小互为主部。

（4）与无穷小量相反的另一类变量是无穷大量，其定义和它与无穷小的关系不再叙述。

（三） 连续函数

1. 连续概念

设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内(包含x_0)有定义，并且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$在点x_0连续。

用“$\varepsilon-\delta$”语言：对任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使对满足$|x-x_0|<\delta$的一切x,不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称$f(x)$在x_0连续。

引入增量 $\Delta x=x-x_0$,对应的 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,于是又得函数$y=f(x)$在点$x_0$连续的定义的另一等价形式：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

如果函数$y=f(x)$在某区间上的每一点都连续，就说函数在这个区间上连续，并称$f(x)$为该区间上的**连续函数**。

2.间断

如果函数$f(x)$在x_0不连续，则称函数$f(x)$在x_0间断，x_0称为$f(x)$的间断点。

由此可知，当函数$f(x)$在x_0处出现下列情况之一时，x_0为间断点，(1) $f(x)$在x_0无定义；

(2) $f(x)$虽在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) $f(x)$在x_0有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$亦存在，但

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0).$$

其中，使$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$存在的x_0称为第一类间断点，不属于第一类间断点的间断点统称为第二类间断点。在第一类间断点中，如果有$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，那末x_0又称为可去间断点。在这样的点上，只要对$f(x)$作适当的补充定义，就可使它成为连续函数。

3.一致连续

在区间上连续的函数$f(x)$，一般情况下，对任给的$\varepsilon>0$，相应的$\delta>0$不但和ε是关，而且与x_0在区间内的位置也有关。如果有这样的函数$f(x)$，对任给的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，使对区间内任意两点x'，x''，当$|x''-x'|<\delta$时，不等式$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$总成立，就称$f(x)$在此区间上是**一致连续**的。例如　$f(x)=x^2-1$　取$0\leqslant x'\leqslant 2$，$0\leqslant x''\leqslant 2$，

由于

$$\begin{aligned}f(x'')-f(x')&=(x''^2-1)-(x'^2-1)=x''^2-x'^2\\&=(x''-x')(x''+x')\end{aligned}$$

$$|f(x'')-f(x')|=|(x''-x')(x''+x')|\leqslant 4|x''-x'|$$

于是，对任给$\varepsilon>0$，可取$\delta=\frac{\varepsilon}{4}$，只要$|x''-x'|<\frac{\varepsilon}{4}$，便有$|f(x'')-f(x')|<4\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$，因此，$f(x)$在$[0,2]$上一致连续。

4.闭区间上连续函数的基本性质

（1）（最大最小值定理）在闭区间上连续的函数，在该区间上至少取得最大值最小值各一次。

（2）（介值定理）设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)=A\neq f(b)=B$，则对任一介于A、B之间的数C，在(a,b)内至少有一点$x=\xi$使$f(\xi)=C$。

（3）闭区间上的连续函数在该区间上一致连续。

5.初等函数的连续性

（1）若$f_1(x)$，$f_2(x)$都在同一区间上连续，则$f_1(x)\pm f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$　及　$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$　$(f_2(x)\neq 0)$在此区间上也连续。

(2) 设$z=\phi(x)$在点x_0连续，且$z_0=\phi(x_0)$。又设$y=f(z)$在点z_0连续，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$在点x_0也连续。

(3) 若$y=f(x)$在区间$[a,b]$上是严格增加（减少）的连续函数，相应的$f(x)$的值域为$[c,d]$则$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$在$[c,d]$上也是严格增加（减少）的连续函数。

(4) 基本初等函数在其定义域上是连续的。

(5) 初等函数在其定义域上是连续的。

Ⅱ 例 题

例1 设$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$

求证 $f[f(x)]=f(x)$， $f[g(x)]=g[f(x)]$

证 设$f(z)=\begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z=0\\ -1 & z<0\end{cases}$ 又当$x>0$ $z=f(x)=1>0$，

当$x=0$ $z=f(x)=0$ 当$x<0$ $z=f(x)=-1<0$

$$\therefore\ f[f(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<1\end{cases}\quad 故f[f(x)]=f(x)，$$

设$u=g(x)=\dfrac{1}{x}$ 则$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

由于 $g(u)=\dfrac{1}{u}$ 此时，

当$x>0$　$u=f(x)=1$　$g(u)=\frac{1}{u}=1$，当$x<0$　$u=f(x)=-1$，$g(u)=\frac{1}{u}=-1$，当$x=0$　$u=f(0)=0$　$g(u)$不存在。

$\therefore\ g[f(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$　故$g[f(x)]=f[g(x)]$

例2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}$

解　$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2-n}$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e^{-1}$$

例3　求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$

解　利用极限存在准则(3)（夹挤定理）来证

$\because\ a>1$　可设$a=1+\lambda\ (a>0)$

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

$\therefore\ 0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)\lambda^2}$　因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$

当$k>1$时，$0<\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right]^k<\frac{n}{(a^{1/k})^n}$

由此亦得　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$

当$k<1$时，$\because \dfrac{n^k}{a^n}=\dfrac{n^{k-1}\cdot n}{a^n}=\dfrac{n}{a^n}\cdot\dfrac{1}{n^{1-k}}$ 结论显然成立

例4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$

解 $\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}=\dfrac{1}{n^k}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}$

故 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^{k-2}}+\dfrac{1}{2n^{k-1}}\right)$

$$=\begin{cases}0 & k>2\\ \frac{1}{2} & k=2\\ \infty & k<2\end{cases}$$

例5 设$x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$ $n=0,1,2\cdots$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

证 由于$x_0>0$，由归纳法可证必$x_n>0$，

又 $\left(x_n-\dfrac{1}{x_n}\right)^2\geqslant0$

$\therefore$ $x_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left[\left(x_n-\dfrac{1}{x_n}\right)^2+4\right]\geqslant1$，

更一般地 $x_n^2\geqslant1$，从而 $x_n\geqslant\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)=x_{n+1}\geqslant1$

即、数列x_n单调有界，故有极限。 设$\lim\limits_{n\to0}x_n=A\geqslant1$

于是得 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{1}{A}\right)$ 即 $A^2=1$ $\therefore$ $A=1$

以上是求数列极限的例子，以下再介绍几个求函数极限的例子。

例6 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}$ m为整数

解 当m为正整数时，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)=m$$

当m为负整数时，令$m=-n$ 则n为正整数

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{-n}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{-n}(1-x^n)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}x^{-n}\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=-n=m$$

当$m=0$时，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=0$

于是得 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=m$，m为整数

例7 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)=\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{tg}2(\frac{\pi}{4}-t)\ \operatorname{tg}t$

$$=\lim_{t\to 0}\operatorname{ctg}2t\cdot\operatorname{tg}t=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}$$

说明等价无穷小代换定理，只要使用得当，效果也是很好的。

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。本题可使用洛必达法则（洛必达法则见第二章）。

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\cdot\frac{-1}{x^2}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{e}{2}$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解 设 $y=(1-x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ 则 $\ln y=\dfrac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x}$

再由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{1-x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=-2$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-2}$

例10 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

证 对任给$\varepsilon>0$，找$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当$0<|x-1|<\delta$时的一切$x$总有$\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$