新课标 高中数理化生

GAOZHONG SHU LI HUA SHENG GONGSHI DINGLI DAQUAN

公式定理大全

赵 永 姜远卓
相佃国 戴丽丽 主编

GAO ZHONG SHU LI HUA SHENG GONGSHI DINGLI DAQUAN

青岛出版社
QINGDAO PUBLISHING HOUSE

新课标 高中数理化生

GAOZHONG SHU LI HUA SHENG GONGSHI DINGLI DAQUAN

公式定理大全

赵　永　姜远卓
相佃国　戴丽丽　主编

GAO ZHONG SHU LI HUA SHENG GONGSHI DINGLI DAQUAN

青岛出版社
QINGDAO PUBLISHING HOUSE

书　　名　新课标高中数理化生公式定理大全
作　　者　本书编写组
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市徐州路 77 号,(266071)
本社网址　http://www.qdpub.com
邮购电话　13335059110（0532）85814611—8664　传真（0532)85814750
选题策划　苏彩霞　石俊明
责任编辑　李忠东
责任校对　袁忠芍
封面设计　程　皓
照　　排　青岛海讯科技有限公司
印　　刷　青岛华信印刷有限公司
出版日期　2006年 9月第 1 版　2006年 9月第 1 次印刷
开　　本　32 开(890mm ×1240mm)
印　　张　13.5
字　　数　590 千
书　　号　ISBN 7－5436－3869－X
定　　价　18.50元
盗版举报电话:（0532)85814926
青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回青岛出版社印刷处调换。
电话:（0532)85814611－8628

前言

高中阶段，数学、物理、化学和生物这几门学科呈现出知识点多而松散、难以集中记忆的特点。这几科教材中公式、定理繁多，分布零散，其推论又过于简略，使学生难以通过教材完全掌握所学知识。为了把这种分散、孤立的知识集中起来，形成完整的知识体系，便于学生即时查阅、复习，我们特地邀请了一批教学经验丰富、能够把握高考命题规律的高级教师编写了这本《高中数理化生公式定理大全》。

本书在深刻理解了新课程标准的基础上，科学地梳理了数理化生各科的知识点，根据知识的难度和科学的记忆方法，重新归纳、架构，形成了独特的知识体系。本书在详尽地解释各科基本概念的同时，又对各知识点的内涵和外延、与其他知识点的区别和联系做了深层次的剖析。本书对数理化生各科中重要的公式、定理进行了精心提炼，明确了一些推论的推导过程和使用条件。增加了知识的深度的同时，本书又在重要知识点后面配有"常考题型及解题方法"，紧密联系高考热点，精选有代表性的例题，进行精到的分析，有利于学生深刻地理解知识要点，掌握解题方法和解题技巧，提高综合分析、解决问题的能力。本书还附有数理化生各科常用的一些数据，便于学生随时查阅、记忆。

本书作为工具书，不仅适用于各种版本的高中教科书，也适用于高中阶段所有的同学。同时，它还可以成为高中教师教学中的得力助手。在平时学习中，同学们往往为翻阅教材查找知识点而费神；在考前复习时，同学们又为没有复习提纲而烦恼。本书恰恰为同学们解决了这些难题。使用本书，同学们既可以节约翻阅教科书的时间，又可以有系统的知识提纲，可谓一举两得。

总之，本书本着"举一反三，触类旁通"的原则进行编写，特点鲜明，实用性强。相信同学们一定会从本书中受益匪浅。如果书中有不尽如人意的地方，敬请指正。

编　者

初版前言

教育与心理统计学是教育科学体系中的重要分支，是广大教育工作者必备的重要科学工具之一。因而，无论是教育系、心理系的大学生，还是师范院校其他专业的大学生，都应懂得和掌握一些必要的统计分析方法，以便能独立分析资料、处理数据直至科学决策。

这本书的基本内容，包括常用的教育与心理统计方法。考虑到近十多年来，由于电子计算机的迅速普及，教育与心理统计的内容不断补充，体系不断更新，故在本书中，除了包括描述统计、推断统计等基本内容外，还介绍了几种多元统计分析方法的原理与应用。同时考虑到目前教育系、心理系普遍开设高等数学课程，学生的数学素质较高，对介绍描述统计的内容及方法也作了革新，将这些内容集中为两章。

为了使本书能适合于本科、专科、教育行政干部培训等不同层次的需要，主讲教师可根据实际课时来使用全书或部分章节。第10章以后的章节，可省略不讲或选讲，并不会影响到教学体系。

本书由张敏强任主编。张敏强提出了全书编写体系及编写原则要求，由张敏强、戴海崎共同修改，最后由张敏强统校全书。参加本书编写的有张敏强、黄光扬、任建胜、刘晓瑜、戴海崎、亚新、徐虹。

在编写过程中，我们参考了国内外的有关书籍和教材、吸取了各书的经验，并引用了其中的一些材料和数据，在此，谨向各书的编者和出版者表示深切的谢意。

由于我们水平所限，编写经验不足，书中一定会存在错误和缺点，敬请专家和读者批评指正。

编　者

1992 年 5 月

目录

数学

物理

化　学

生　物

数学

主编 赵永

数列 概率统计

函数 几何 算法初步

导数 逻辑 不等式

向量 推理 复数

第一部分 集合与函数

一、集合

1. 基本概念

（1）定义 集合是数学中的一个不定义概念，一般地，某些指定的对象的全体就形成一个集合，简称集．一般用大括号或拉丁字母表示集合．

（2）元素 集合中的每个研究对象叫作这个集合的元素．

（3）元素的性质

① 确定性 对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．

② 互异性 一个集合中不允许有相同的元素重复出现．

③ 无序性 集合中的元素没有顺序．

2. 常用数集符号

N	非负整数集（自然数集）
N₊（N*）	正整数集
Z	整数集
Q	有理数集
R	实数集
C	复数集

3. 集合的表示方法

（1）列举法 把集合的元素一一列举出来，并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法叫作列举法．

（2）描述法 用集合所含元素的共同特征表示集合的方法叫描述法．

① 在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号；

② 画一条竖线；

③ 在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征．

（3）图示法（韦恩图） 用封闭曲线的内部表示集合的方法．

（4）注意区分以下 3 个集合

① $A=\{x|y=x^2\}$ 表示函数 $y=x^2$ 中 x 的取值范围．

② $B=\{y|y=x^2\}$ 表示函数 $y=x^2$ 中 y 的取值范围．

③ $C=\{(x,y)|y=x^2\}$ 表示函数 $y=x^2$ 图像上的所有点．

4. 集合间的基本关系

（1）子集 一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）（如图 1－1－1），读作“A 含于 B（或 B 包含 A）”．

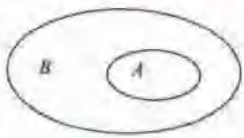

图 1－1－1

（2）真子集 如果集合 $A\subseteq B$，存在元素 $x\in B$，但 $x\notin A$，称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）．

（3）空集 我们把不含任何元素的集合叫作空集，记作$\varnothing$．

（4）集合相等 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，

则称 $A=B$.

(5) 常用推论

① 空集是任何集合的子集,即:$\varnothing\subseteq A,\varnothing\subseteq\varnothing$.

② 任何一个集合是它本身的子集,即:$A\subseteq A$.

③ 空集是任何非空集合的真子集,即:$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$.

④ 对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

⑤ 集合 A 的子集的个数公式为 2^n(n 为 A 中元素的个数).

5. 集合的基本运算

(1) 并集　一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B".

如图 1—1—2 所示,$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

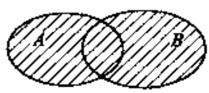

图 1—1—2

(2) 交集　一般地,由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$(读作"A 交 B").如图 1—1—3 所示,$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

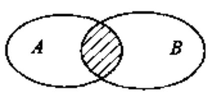

图 1—1—3

说明　① $A\cap A=A$

② $A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\cap B=B\cap A$

(3) 全集　一般地,如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素就称这个集合为全集,通常记作 U.

(4) 补集　对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作:$\complement_U A$.即:$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

(5) 运算律

① 交换律

$A\cup B=B\cup A$　$A\cap B=B\cap A$

② 结合律

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

③ 分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

④ 迪摩根律

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$

$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$

(6) 其他推论

$A\cup A=A$　$A\cup\varnothing=A$

$A\cap A=A$　$A\cap\varnothing=\varnothing$

常考题型及解题方法

例 1　设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x>1\}$,$P=\{x|x^2>1\}$,则下列关系正确的是(　　).

A. $M=P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M\subsetneqq P$　　D. $M\cup P=\mathbf{R}$

解析　$P=\{x|x^2>1\}=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$,$\therefore M\subsetneqq P$.选 C.

例 2　集合 $P=\{x|x^2-4x-5<0\}$,$Q=\{x|x-a\leqslant 0\}$.

(1) 若 $P\cap Q=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $P\subsetneqq Q$,求实数 a 的取值范围.

解析 应用数轴进行直观求解.

$P=\{x|-1<x<5\}$,$Q=\{x|x\leqslant a\}$.

(1) 由图 1-1-4 易知,当 $a\leqslant -1$ 时,$P\cap Q=\varnothing$.

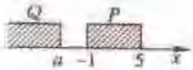

图 1-1-4

(2) 由图 1-1-5 易知,当 $a\geqslant 5$ 时,$P\subsetneqq Q$.

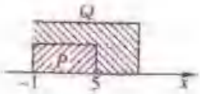

图 1-1-5

方法总结 数轴是解决数集问题的有效工具,它体现了数形结合的思想方法,简捷、直观.但在运用时,要特别关注边界值的取舍.数形互化是解数学题的重要思想方法.

例 3 设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是(　　).

A. $(\complement_I A)\cup B=I$

B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

解析 利用韦恩图求解.如图 1-1-6 所示,则易知 B 错误.选 B.

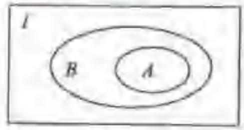

图 1-1-6

二、函 数

1. 基本概念

(1) 定义　设 A、B 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作:$y=f(x)$,$x\in A$,x 叫作自变量.

(2) 定义域　函数 $y=f(x)$ 中,自变量 x 的取值范围 A 叫作函数的定义域.

(3) 值域　与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫作函数的值域.

(4) 常见函数的定义域和值域

函　数	定义域	值　域
$f(x)=kx+b(k\neq 0)$	**R**	**R**
$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$	**R**	① $a>0$,$\left\{y\middle\|y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$ ② $a<0$,$\left\{y\middle\|y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\{x\|x\neq 0\}$	$\{y\|y\neq 0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\{x\|x\geqslant 0\}$	$\{y\|y\geqslant 0\}$

(5) 相同函数　如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称这两个函数相同.

(6) 分段函数　在函数 $y=f(x)$ 中，对于自变量 x 的不同取值有着不同的对应法则，这样的函数称为分段函数，如 $f(x)=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$. 分段函数是一个函数，而不是几个函数.

(7) 映射　一般地，设 A,B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，那么，这样的对应(包括集合 A,B 以及集合 A 到集合 B 的对应法则 f)叫作集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A\to B$.

2. 区间

(1) 设 a,b 是两个实数，而且 $a<b$，规定：

① 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间，表示为 $[a,b]$；

② 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间，表示为 (a,b)；

③ 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间，分别表示为 $[a,b)$，$(a,b]$.

(2) 区间的端点　区间定义中的实数 a 与 b 叫作相应区间的端点，其中 a 叫左端点，b 叫右端点.

(3) 区间与集合的关系　区间是集合的又一种表示方法，这样某些以实数为元素的集合就有 3 种表示方法，即集合表示法、不等式表示法和区间表示法. 遇到问题时，至于用哪一种形式，可根据习惯、要求或简明的原则来选取.

(4) 区间在数轴上的表示　在数轴上，区间可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，在图中用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点.

3. 无穷大的概念

(1) 无穷大概念　实数集 **R** 也可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，其中"∞"读作"无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大". 无穷大"∞"是一个符号，不是一个具体的数.

(2) 无穷区间的概念　关于用 $-\infty$，$+\infty$ 作为一端或两端的区间称为无穷区间，它的定义和符号如下表：

定　义	符　号
$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$	$(-\infty,+\infty)$
$\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$	$[a,+\infty)$
$\{x\mid a<x<+\infty\}$	$(a,+\infty)$
$\{x\mid -\infty<x\leqslant a\}$	$(-\infty,a]$
$\{x\mid -\infty<x<a\}$	$(-\infty,a)$

4. 函数的表法方法

(1) 列表法　列出表格来表示两个变量之间的对应关系.

优点：列表法的优点是不需要计算，可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.

(2) 图像法　就是用图像表示两个变量之间的对应关系.

优点：能够直观形象地表示出函数的变化情况.

(3) 解析法　就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系.

优点：用解析法表示函数关系，一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量所对应的函数值.

5. 作函数图像的一般步骤

(1) 列表　计算要正确，取值要有代表性、典型性.

(2) 描点　点标得要准确.

(3) 连线　用光滑的曲线连接起来.

6. 函数的单调性

(1) 增函数、减函数的定义　一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2:

① 当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数;

② 当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

(2) 单调性　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫作 $y=f(x)$ 的单调区间.

说明　① 函数的单调性是对函数定义域内的某个子区间而言的. 有些函数在整个定义域内可能是单调的,而有些函数可能仅在定义域内的部分区间上是增函数,而在另一部分区间上可能是减函数或者是非单调函数.

② 若函数 $f(x)$ 在其定义域内的两个区间 D_1, D_2 上都是增(减)函数,一般不能简单认为 $f(x)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上是增(减)函数. 如:$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数,在 $(0,+\infty)$ 上也是减函数,但不能说它在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上是减函数,为什么? 事实上,取 $x_1=-1<1=x_2$,有 $f(-1)=-1<1=f(1)$,不符合减函数的定义.

(3) x_1, x_2 的 3 个特征

① 任意性,即“任意取 x_1, x_2”,“任意”二字绝对不能丢掉;

② 有大小,通常规定 $x_1 < x_2$;

③ 同属于一个单调区间.

(4) 函数增减性的几何意义　反映在图像上,若 $f(x)$ 是区间 D 上的增(减)函数,则图像在 D 上的部分从左到右是上升(下降)的.

(5) 函数单调性的判定方法

① 定义法　用定义法判断函数单调性的步骤为:

第一步:取值. 即设 x_1, x_2 是该区间内的任意两个值,且 $x_1 < x_2$.

第二步:作差. 准确作出差值 $f(x_1)-f(x_2)$[或 $f(x_2)-f(x_1)$].

第三步:变形,通过因式分解、配方、分子(分母)有理化等方法,向有利于判断差的符号的方向变形.

第四步:确定差 $f(x_1)-f(x_2)$[或 $f(x_2)-f(x_1)$]的符号,当符号不能直接确定时,可通过分类讨论、等价转化,然后作差、作商等思路进行.

第五步:判断. 根据定义作出结论.

以上 5 个步骤可以简记为“取值—作差—变形—定号—判断”.

② 直接法　运用已知的结论,直接得到函数的单调性. 了解记忆下面结论,有助于判断函数的单调性.

a. 函数 $y=-f(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的单调性相反;b. 当函数 $f(x)$ 恒为正或恒为负时,函数 $y=\frac{1}{f(x)}$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反;c. 在公共区间内,增函数加增函数,其和为增函数,增函数减减函数,其差为增函数等.

③ 图像法　按照作图的方法,准确作出函数的图像,观察判断函数的单调性.

(6) 最大值,最小值　一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:

① 对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$,存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$,那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

② 对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\geqslant N$,

存在 $x'_0 \in I$，使得 $f(x'_0)=N$，那么，我们称 N 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

7. 函数的奇偶性

(1) 偶函数　一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么，函数 $f(x)$ 就叫作偶函数.

(2) 奇函数　一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，那么，函数 $f(x)$ 就叫作奇函数.

(3) 奇、偶函数图像的对称性

① 如果一个函数是奇函数，则这个函数的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形；反之，如果一个函数的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数.

② 如果一个函数是偶函数，则它的图像是以 y 轴为对称轴的轴对称图形；反之，如果一个函数的图像关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数.

(4) 函数奇偶性的判断方法

① 定义法　定义域 D 要关于原点对称，即对任意 $x\in D$，必有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$ 都有 $f(x)=f(-x)$，函数 $f(x)$ 是偶函数；如果对任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，函数 $f(x)$ 是奇函数. 否则，函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

② 图像法　如果函数的图像关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数；如果函数的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数；否则，这个函数是非奇非偶函数.

常考题型及解题方法

例 1　求下列函数的定义域.

$$y=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{|x|-x}$$

解析　要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ |x|-x\neq 0.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}(x-1)(x-2)\geqslant 0,\\ |x|\neq x.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant 1,\\ x<0.\end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,0)$.

例 2　(1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(x^2)$ 的定义域；

(2) 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(x)$ 的定义域；

(3) 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，求 $f(2x^2-2)$ 的定义域.

解析　本题中的 3 个函数均为抽象函数，解题时应牢记定义域指的是自变量 x 的取值范围.

(1) $\because$ $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，即 $0<x<1$.

$\therefore$ $f(x^2)$ 要有意义，x^2 必须在 $(0,1)$ 内，即 $0<x^2<1$，从而 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$.

$\therefore$ $f(x^2)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

(2) $\because$ $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0,1)$，即 $x\in(0,1)$，$\therefore$ $1<2x+1<3$.

令 $t=2x+1$，则 $f(t)$ 的定义域为 $(1,3)$，即 t 的取值范围为 $(1,3)$，而 $f(x)$ 的定义域与 $f(t)$ 的定义域是一样的.

$\therefore$ $f(x)$ 的定义域为 $(1,3)$.

(3) $\because$ $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3]$，即 $-2\leqslant x\leqslant 3$. $\therefore$ $-1\leqslant x+1\leqslant 4$，即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$. 而 $f(2x^2-2)$ 要有意义，必须 $-1\leqslant 2x^2-2\leqslant 4$，即 $\begin{cases}2x^2-2\geqslant -1\\ 2x^2-2\leqslant 4\end{cases}$，$\therefore$ $\begin{cases}2x^2\geqslant 1\\ 2x^2\leqslant 6\end{cases}$.

可得 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$.

$\therefore$ $f(2x^2-2)$ 的定义域为 $\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right]$.

例3 求下列函数的值域.

(1) $y=x^2-4x+6, x\in[1,5)$

(2) $y=2x-\sqrt{x-1}$

(3) $y=|x+5|+|x-3|$

解析 (1) 这是一元二次函数在定义域范围内求值域的问题,可用配方法结合二次函数的图像求解.

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$,

$\because x\in[1,5)$,画出函数的图像如图1—2—1所示.

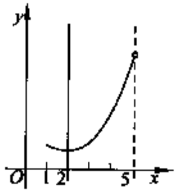

图1—2—1

由函数解析式并结合图像得,所求函数的值域为$\{y|2\leqslant y<11\}$.

(2) 本小题函数解析式中出现根式,要求解首先要去掉根号.方法一是两边平方,这样往往会扩大未知数的范围;方法二是将把含有根号的式子作为一个整体进行换元.

函数的定义域是$\{x|x\geqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$.

令$\sqrt{x-1}=t$,则$t\in[0,+\infty)$,

$x=t^2+1$,

$\therefore y=2(t^2+1)-t=2t^2-t+2$.

这样就把问题转化为求$y=f(t)=2t^2-t+2, t\in[0,+\infty)$的值域问题了.这可以用配方法解决.

$y=f(t)=2t^2-t+2$

$=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$.

$\because t\geqslant 0, \therefore y\geqslant\frac{15}{8}$.

故所求函数的值域为$\left\{y|y\geqslant\frac{15}{8}\right\}$.

(3) 由函数解析式的结构,联想到数轴,y可以看成数轴上的动点P(其坐标为x)到两定点-5,3距离之和,只有当x在-5和3之间时(包括-5和3),其值才最小,最小值为8.

若画出函数的图像求解,更形象直观,一目了然.

$y=|x+5|+|x-3|$

$=\begin{cases}-2x-2 & x<-5,\\ 8 & -5\leqslant x\leqslant 3,\\ 2x+2 & x>3.\end{cases}$

此函数的图像如图1—2—2所示.

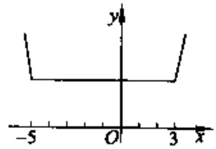

图1—2—2

观察图像立即得到所求函数的值域为$[8,+\infty)$.

例4 证明函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1]$上为减函数.

解析 用定义证明,按作差——变形——判断符号进行.

任取$x_1, x_2\in(0,1]$,且$x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)$

$=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$

$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$,

$\because x_1<x_2$且$x_1, x_2\in(0,1]$,

$\therefore x_1-x_2<0, 0<x_1x_2<1$,

$\therefore x_1-x_2<0, 1-\frac{1}{x_1x_2}<0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$.

$\therefore f(x)$在$(0,1]$上为减函数.

例5 已知函数$f(x)=x^2+2ax+2, x\in[-5,5]$,求实数$a$的取值范围,使$y=f(x)$在区间$[-5,5]$上是单调函数.

解析 本题运用二次函数的单调性来解决问题.

∵ 函数 $f(x)=(x+a)^2+2-a^2$ 图像的对称轴为 $x=-a$，若 $f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上是单调函数，则 $-a\leq-5$ 或 $-a\geq5$.

故 a 的取值范围是 $a\leq-5$ 或 $a\geq5$.

例 6 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=|x+1|-|x-1|$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\0 & x=0\\-x^2 & x<0\end{cases}$

解析 (1) 用定义判断.

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

$$\begin{aligned}\therefore f(-x)&=|-x+1|-|-x-1|\\&=|x-1|-|x+1|\\&=-(|x+1|-|x-1|)\\&=-f(x).\end{aligned}$$

∴ $f(x)=|x+1|-|x-1|$ 是奇函数.

(2) 方法一

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2$，$-x<0$，

$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2$，$-x>0$，

$f(-x)=(-x)^2=x^2=-f(x)$；

当 $x=0$ 时，$f(-x)=-f(x)=0$.

∴ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，总有 $f(-x)=-f(x)$.

∴ $f(x)$ 为奇函数.

方法二 $f(x)=\left.\begin{cases}x^2 & x>0\\0 & x=0\\-x^2 & x<0\end{cases}\right\}=x|x|$.

$$\begin{aligned}\therefore f(-x)&=-x|-x|\\&=-x|x|=-f(x).\end{aligned}$$

∴ $f(x)$ 为奇函数.

方法总结 分段函数改为绝对值函数后判断奇偶性较简单.

例 7 已知函数 $y=f(x)$（$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$），对任意的非零实数 x_1，x_2，恒有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解析 我们把没有给出解析式的函数称之为抽象函数，解决这类问题一般用赋值法. 本题没有给出函数 $f(x)$ 的解析式，要由 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，我们可以给 x_1，x_2 赋以适当的值，使等式中出现 $f(-x)$ 和 $f(x)$，因此有如下解法：

取 $x_1=-1$，$x_2=x$，得 $f(-x)=f(-1)+f(x)$. ①

为求 $f(-1)$ 的值，可取 $x_1=1$，$x_2=-1$，得 $f(-1)=f(1)+f(-1)$，即 $f(1)=0$.

再令 $x_1=x_2=-1$，得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$，即 $f(-1)=0$，将 $f(-1)=0$ 代入①得 $f(-x)=f(x)$.

∴ $f(x)$ 为偶函数.

三、指数函数

1. 基本概念

(1) n 次方根

① 定义 一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫作 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

② 推论 a. n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，这时 a 的 n 次方根用 $\sqrt[n]{a}$ 表示.

b. n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数，用 $\pm\sqrt[n]{a}$ 表示.

c. 负数没有偶次方根.

d. 0 的任何次方根都是 0，记作：$\sqrt[n]{0}=0$.

(2) 根式

① 定义 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作根式，n 叫作根指数，a 叫作被开方数.

② 推论 a. $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

b. 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$.

c. 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=$