

高等数学教程

第四卷 第一分册

B. H. 斯米尔诺夫著

陈 传 璋 译

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少, 本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷, 定价相应减少 20%。希鉴谅。

高等数学教程

第四卷 第一分册

B. И. 斯米尔诺夫著

陈传璋译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京印刷二厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0335 开本 787×1092 1/32 印张 9 14/16

字数 239,000 印数 43,501—123,500 定价: 0.76元

1958年1月第1版

1979年8月北京第11次印刷

再版序言

在第四卷的这一版中,除了变分学一章外,对各章都作了重大的修改。部份材料已拿到新版第二卷中去,另一方面,这第四卷里也添加了很多新内容。

C. M. 罗辛斯基曾校閱了积分方程一章的手稿,給了我一系列宝贵的意見,我根据这些意見作了这一章最后的校訂,这里表示我极大的感謝。在写最后两章时, O. A. 拉德任斯卡婭及 X. J. 斯莫里茨基給我很大帮助,我曾多次的和他們商量过这两章的内容。这两章中的某些节是我請他們写的,在正文中都已加以注明。

O. A. 拉德任斯卡婭校閱了第三章的手稿, X. J. 斯莫里茨基校閱了第四章的手稿。在最后校訂方面他們給了我一系列宝贵的意見。

謹對他們表示极大的感謝。

B. 斯米尔諾夫

1951年6月13日

目 录

第一章 积分方程

1. 积分方程的形成的举例(1)
2. 积分方程的分类(5)
3. 正交函数系(8)
4. 弗列德和蒙第二种方程(15)
5. 逐次逼近法及解核(19)
6. 存在及唯一性定理(23)
7. 弗列德和蒙分母(25)
8. 对于任何 λ 的弗列德和蒙方程(31)
9. 轉置积分方程(34)
10. 特征值的情况(35)
11. 弗列德和蒙子式(42)
12. 退化方程(43)
13. 例(45)
14. 得到的结果的推广(47)
15. 选择原理(50)
16. 选择原理(續)(54)
17. 無界核(56)
18. 无界核的积分方程(62)
19. 特征值的情况(65)
20. 具有連續二次疊核的方程(67)
21. 对称核(69)
22. 关于特征函数的展开式(73)
23. 地尼定理(79)
24. 二次疊核的展开式(80)
25. 对称核的分类(87)
26. 特征函数的極值性(89)
27. 麦色定理(93)
28. 弱極性核的情况(94)
29. 非齐次方程(98)
30. 在对称核情况的弗列德和蒙工具(100)
31. 埃尔容特核(103)
32. 可对称化的方程(105)
33. 例(108)
34. 依赖于参数的核(110)
35. 連續函数空間(113)
36. 綫性算子(118)
37. 特征值的存在性(124)
38. 特征值列及展开定理(126)
39. 复連續函数空間(131)
40. 积分全連續算子(132)
41. 正規算子(134)
42. 多变量的函数的情况(133)
43. 渥尔特拉方程(139)
44. 拉普拉斯变换(144)
45. 函数的卷积(150)
46. 特殊形式的渥尔特拉方程(153)
47. 渥尔特拉第一种方程(155)
48. 例(158)
49. 荷重的积分方程(162)
50. 富里埃积分方程(166)
51. 无窮大区間的情况的方程(167)
52. 例(168)
53. 半无窮区間的情况(174)
54. 齐次方程(179)
55. 例(181)
56. 有柯西核的第一种积分方程(184)
57. 解析函数的边界問題(185)
58. 有柯西核的第二种积分方程(190)
59. 对于綫段情况的边界問題(193)
60. 柯西型积分的反演(198)

第二章 变分学

61. 問題的提出(199)
62. 基本引理(201)
63. 最簡單情况的尤拉方程(202)
64. 多个函数及高阶导数的情况(205)
65. 重积分的情况(208)
66. 关于尤拉方程及奥斯特洛格拉德斯基方程的几点注意(210)
67. 例(212)
68. 等周問題(220)
69. 条件極值(224)
70. 例(227)
71. 尤拉及奥斯特洛格拉德斯基方程的不变性(234)
72. 参数形式(237)
73. 在 n 維空間內的測地綫

- (240) 74. 自然边值条件 (243) 75. 更一般型的泛函(245) 76. 一次变分的一般形式(248) 77. 横截条件(251) 78. 标准变量(253) 79. 在三維空間內的極帶場(256) 80. 一般情况的場的理論(262) 81. 特殊情况(264) 82. 雅可比定理(267) 83. 間断解(268) 84. 單側極值(272) 85. 二次变分(273) 86. 雅可比条件 (275) 87. 弱及强極值 (279) 88. 維尔斯特拉斯函数(280) 89. 例(282) 90. 奥斯特洛格拉德斯基-哈密尔顿原理(284) 91. 最小作用原理(287) 92. 絃及膜(289) 93. 梁及薄板(291) 94. 彈性学的基本方程(293) 95. 绝对極值(296) 96. 绝对極值(續)(300) 97. 变分的直接方法(305) 98. 例(306)

第一章 积分方程

1. 积分方程的形成的举例 在积分号下含有未知函数的一切方程都称为积分方程。设求微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解。我們已在前面 [II; 51] 见过这个问题归结到求解积分方程：

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0。$$

十分相似地也可把有已給初始值 $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$ 的二阶微分方程 $y'' = f(x, y)$ 的求解问题归结到求解积分方程：

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0)。$$

把二重积分变作單积分 [II; 15], 可將这方程写为下面的形式：

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0)。$$

从积分方程

$$(1) \quad y(x) = \int_0^x (x - z) f[z, y(z)] dz + c_1 + c_2 x,$$

得到方程 $y'' = f(x, y)$ 的通解, 其中 c_1 及 c_2 是任意常数, 而积分的下限設为零。現在考察关于二阶方程的边界問題, 也就是求满足边界条件 $y(0) = a$; $y(l) = b$ 的方程的解。如在方程 (1) 中首先令 $x = 0$, 再令 $x = l$, 則得到决定任意常数的两个方程, 它們給出：

$$c_1 = a; \quad c_2 = \frac{b - a}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (l - z) f[z, y(z)] dz。$$

將获得的值代入公式 (1), 我們把边界問題引导到积分方程：

$$(2) \quad y(x) = F(x) + \int_0^x (x-z)f[z, y(z)]dz - \\ - \frac{x}{l} \int_0^l (l-z)f[z, y(z)]dz,$$

其中

$$F(x) = a + \frac{b-a}{l}x.$$

我們可將方程(2)写作下面的形式:

$$(3) \quad y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l-x)}{l} f[z, y(z)]dz - \\ - \int_x^l \frac{x(l-z)}{l} f[z, y(z)]dz.$$

我們引入两个变量的函数:

$$(4) \quad K(x, z) = \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l}, & \text{当 } z \leq x \text{ 时;} \\ \frac{x(l-z)}{l}, & \text{当 } x \leq z \text{ 时.} \end{cases}$$

借助于这个函数,方程(3)可写作下面的式样:

$$(5) \quad y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z)f[z, y(z)]dz.$$

应用获得的结果到綫性方程

$$(6) \quad y'' + p(x)y = \omega(x).$$

我們可断言在边界条件:

$$(7) \quad y(0) = a; \quad y(l) = b$$

下这方程的求解問題与从綫性积分方程:

$$(8) \quad y(x) = F_1(x) + \int_0^l K(x, z)p(z)y(z)dz$$

求函数 $y(x)$ 是一样的, 其中

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z)\omega(z)dz$$

是依赖于变量 x 的已知函数。

我們看出,在方程(1)内积分的上限是变量,而在方程(8)内积分的兩限都是常数。还看出,無論在方程(1)内或方程(8)内待求函数不仅在积分号下出現而且也在积分号外出現。我們在以前[II; 50]已見過当采用逐次逼近法以解方程时这情况是極重要的。

用某参数 λ 乘方程(6)的系数 $p(x)$,且考察在齐次边界条件:

$$(9) \quad y(0) = 0; \quad y(l) = 0$$

下的齐次方程

$$(10) \quad y'' + \lambda p(x)y = 0.$$

这个齐次边界問題引导到含有参数 λ 的齐次积分方程:

$$(11) \quad y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z)p(z)y(z)dz.$$

在以后的基本問題中有这样一个問題,参数 λ 应取什么样的值使提出的問題有不恒等于零的解。在应用富里埃方法到数学物理的边界問題时,我們以前曾經遇到过这样問題。还应指出函数 $K(x, z)$ 的某些特征,这个函数叫做积分方程的核。这个核在由不等式 $0 \leq x \leq l$ 及 $0 \leq z \leq l$ 所确定的正方形 k_0 内是連續的。在这个正方形的对角綫上,亦即在 $x=z$ 时,核的一阶导数有了跳躍:

$$K_x(x, z)|_{x=z+0} - K_x(x, z)|_{x=z-0} = -1.$$

其次,如果把提到的核看作 x 的函数,在对角綫的外面,这函数是齐次方程 $y''=0$ 满足齐次边界条件(9)的解。最后我們指出,由等式

$$(12) \quad K(z, x) = K(x, z)$$

所表現出的核的对称性質。核的所有这些性質立即从公式(4)显出。

核 $K(x, z)$ 具有簡單的物理意义。我們回忆,当集中力作用

在兩端固定的絃的一点 $x=z$ 时, 在力所作用的这点处应有条件 [II; 163]:

$$T_0[(u_x)_{x=z+0} - (u_x)_{x=z-0}] = -P,$$

其中 P 是作用力的大小。不难驗證的是, 函数

$$u(x) = \frac{P}{T_0} K(x, z)$$

給出在上面提到的集中力的作用下絃的靜力弯曲的形狀。这时我們注意, 在靜力情况內絃的波动方程簡單地归結到方程 $u_{xx}=0$ 。我們这里就最簡單情形来講的, 把边界問題引导到积分方程的种种思想, 將在第四章里詳細講到。

我們还指出把数学物理的边界問題引导到积分方程的一个特殊方法。以前曾用下面形式:

$$u(M) = \iint_S \frac{\rho(M')}{d} ds$$

来定义球壳的势函数, 其中 $\rho(M')$ 是在球面 S 上的已知函数, ds 是球面的面积元素, 而 d 是空間点 M 到球面上变点 M' 的距离。設 n 是球面上某点 M_0 的法綫方向。用 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ 及 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_o$ 表示当变点 M 从球的內部及外部趋于点 M_0 时导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ 的極限值。我們以前 [III₂; 138] 曾引出过下面的公式:

$$(13) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i &= - \iint_S \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds + 2\pi \rho(M_0), \\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_o &= - \iint_S \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds - 2\pi \rho(M_0), \end{aligned}$$

其中 d 是从点 M_0 到球面上变点 M' 的距离, 而 ω 是向徑 $M'M_0$ 与方向 n 的交角。

在后一章中我們將見这些公式不仅对于球面有效。現在我們提出对于球面的諾伊曼內部問題, 也就是, 設求一函数它在球的內

部是調和的,且它的法綫导数在球面上有已知边界值:

$$(14) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s = f(M_0).$$

待求的函数 u 將是球壳的势函数的形式。这个势函数在球的内部是調和的,且只要选择这个势函数的密度 $\rho(M')$ 使它也滿足边界条件(14)。注意公式(13)中的第一式及边界条件(14),我們获得决定待求密度的下面的积分方程:

$$2\pi\rho(M_0) = f(M_0) + \iint_s \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds.$$

我們看出,在已給情况下函数 $f(M)$ 及 $\rho(M)$ 必須确定在球面上,且积分不像上例中那样展布在 OX 軸的区間上而是在球面上。

2. 积分方程的分类 我們暂时只考虑这样情况的綫性积分方程,它的待求函数应确定在 OX 軸上。我們写积分方程

$$(15) \quad y(x) = \int_a^x K(x, z)y(z)dz + f(x),$$

其中 $y(x)$ 是待求函数,而 $f(x)$ 及 $K(x, z)$ 是已知函数。像前面已經提到过的,函数 $K(x, z)$ 称为积分方程的核。

所写的方程称为渥尔特拉第二种方程。具有常数积分限的相似方程:

$$(16) \quad y(x) = \int_a^b K(x, z)y(z)dz + f(x)$$

称为弗列德和蒙第二种方程。若待求函数仅出現在积分号下,則我們获得渥尔特拉或弗列德和蒙第一种方程。它們有如下的形式:

$$(17) \quad \int_a^x K(x, z)y(z)dz = f_1(x); \quad \int_a^b K(x, z)y(z)dz = f_1(x).$$

作为渥尔特拉第一种方程的例就是以前 [II; 79] 曾經講过的亞貝尔方程:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y) dy}{\sqrt{h-y}}.$$

我們給出弗列德和蒙第一種方程的一個例子。設 $u(x)$ 是當絃具有對於單位長計算的連續分布的荷重 $p(z)$ 時絃的靜力彎曲。我們將把這個連續分布的荷重看作集中荷重 $p(z)dz$ 的和。每一這樣集中荷重，按照上節所述，使我們得到絃的靜力彎曲如下：

$$\frac{1}{T_0} K(x, z) p(z) dz,$$

其中 $K(x, z)$ 由公式(4)來確定。取積分，我們獲得在連續分布的荷重下絃的靜力彎曲：

$$u(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, z) p(z) dz.$$

若彎曲 $u(x)$ 視作已知，而求相應的荷重 $p(z)$ ，這方程就是弗列德和蒙第一種方程。

我們注意，涅爾特拉方程是弗列德和蒙方程的特殊情況。事實上，若我們將以前定義的核 $K(x, z)$ 預先加以條件：當 $z > x$ 時 $K(x, z) = 0$ ，則在涅爾特拉方程內可對於 z 從 $z=a$ 到 $z=b$ 取積分。

以後我們幾乎專致力於第二種方程，且主要是弗列德和蒙第二種方程。我們在解數學物理的邊界問題時經常碰到的正是這種方程。第二種方程的理論較之第一種的簡單得多。前面已經提到過，若在積分號外有待求函數，就自然地可以採用逐次逼近法。

積分方程的理論在很多地方與綫性代數的問題相似，關於代數問題我們已在第三卷內闡明。我們回憶，在 n 維空間內有形如 [III₁; 25]：

$$y_i = a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

的綫性變換且在寫出的變換中系數 a_{ik} 組成了矩陣。這變換可用另一個樣子寫為以下形式：

$$y = Au,$$

其中 $u(u_1, \dots, u_n)$ 是原来向量, $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是变换后向量, 而 A 是由系数 a_{ik} 组成的矩阵。在积分方程的情况用通常在某区间 $[a, b]$ 内确定的函数来代替 n 维空间的向量。用核 $K(x, z)$ 来代替系数 a_{ik} 的矩阵, 且用积分过程来代替求和, 因而在所考察的情况线性变换可表达如下公式:

$$(18) \quad y(x) = \int_a^b K(x, z)u(z)dz,$$

其中 $u(z)$ 是原来函数, 而 $y(x)$ 是变换后函数。

其次, 我们回忆所谓矩阵 A 的特征值是指参数 λ 这样的值, 它使方程

$$Ax = \lambda x$$

有不等于零的解 x 。以后我们将称参数 λ 这样的值为核 $K(x, z)$ 或相应变换的特征值, 它使齐次积分方程

$$(19) \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)y(z)dz$$

有不恒等于零的解。我们看出, 此处参数 λ 的引用方面, 与前面指出的代数问题并不完全相似。如果完全相似地来引用, 我们必须代替 (19) 而写出下列方程:

$$\int_a^b K(x, z)y(z)dz = \lambda y(x).$$

以后在积分方程的全部理论中我们将保持公式 (19) 的形式。

还要注意, 使函数 $u(x)$ 对应于同一函数 $u(x)$ 的恒等变换 [也就是使 $y(x)$ 与 $u(x)$ 等同的变换] 不能表达为积分形式 (18)。

在阐明积分方程的理论时, 自然必须关于核 $K(x, z)$ 以及函数 $f(x)$ 及 $y(x)$ 作某些假设。

如同已经提到过的, 我们暂将专致力于一维情况的积分方程。过渡到多维情况的方法将在下面指出。

最后,我們指出,今后通常認為已知及待求函数都是复函数:

$$K(x, z) = K_1(x, z) + K_2(x, z)i;$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i;$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)i,$$

其中 $K_s(x, z)$, $f_s(x)$, $y_s(x)$ ($s=1, 2$) 都是实函数。自变量永远被認為是实的。

在下节中我們將回忆正交函数系的性質且对于这个問題添加某些补充。这对于积分方程理論的闡明將是必要的。

以后將常常說到有限閉区間 $a \leq x \leq b$ (也就是这样的区間, 它包含兩端点在内)。我們总是用符号 $[a, b]$ 記这样的区間。

3. 正交函数系 在区間 $[a, b]$ 內为連續的实函数

$$(20) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

如果有

$$(21) \quad \int_a^b \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } p \neq q \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } p = q \text{ 时,} \end{cases}$$

則謂这些实函数在区間內構成正交标准系。

設 $f(x)$ 是任一实函数, 在区間 $[a, b]$ 內是連續的。下数值

$$(22) \quad c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 关于系 (20) 的富里埃系数[閱 II; 156]。由 c_k 的定义我們有等式:

$$(23) \quad \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^n c_k^2,$$

这等式把函数 $f(x)$ 在用它的富里埃級数的部份和 $s_n(x)$ 来代替时所得的平方中值誤差表示为差式。从公式 (23) 显出以 c_k^2 为普通項的無穷級数的收斂性且有所謂貝塞尔不等式:

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

若对于任何連續函数 $f(x)$ 在公式(24)中等号成立, 也就是若对于任何連續函数有所謂完备公式:

$$(25) \quad \int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

則謂系(20)是完备的。完备公式表现出这样事实: 当函数 $f(x)$ 代以它的富里埃級数的部份和 $s_n(x)$ 时, 則当 n 無限增大时平方中值誤差趋于零。还要回忆, 若我們作积分

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx,$$

其中 a_k 是任意实系数, 如果采取 a_k 等于函数 $f(x)$ 的富里埃系数, 則这个积分的值將为最小[II; 148]。

到現在为止, 我們設函数 $\varphi_k(x)$ 及 $f(x)$ 是連續的。上面所說的一切在更一般情况下也保持正确的。例如, 可以設这些函数是有界的且有有限个不連續点。我們注意, 这时上面写出的所有积分显然都有意义。

設 $\varphi_k(x)$ 是連續的, 而 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 內除了一点 $x=d$ 外也都是連續的, 在这点的鄰域內它是無界的, 并且

$$(26) \quad |f(x)| \leq \frac{C}{|x-d|^\alpha},$$

其中 C 及 α 是常数且 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 。这时 $[f(x)]^2$ 是可积的[II; 82], 且不等式(24)的証明完全保持有效, 并且所有积分都有意义。正交函数理論的最为自然的扩充需要其他积分概念。我們將在第五卷予以闡明。

以后, 如果沒有相反声明, 我們將假設一切函数都是連續的。

我們來證明一個初等的引理。若 $\omega(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內是連續且非負的函數，又

$$(27) \quad \int_a^b \omega(x) dx = 0,$$

則 $\omega(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內恒等於零。設我們的斷言不正確，且在所提到的區間內的某點 $x=c$ 處有 $\omega(c) > 0$ ，則對於充分小的正數 ε ，函數 $\omega(x)$ 在區間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 內將是正的，且設 $m (> 0)$ 是它在這區間內的最小值。由於 $\omega(x)$ 的非負性，就有：

$$\int_a^b \omega(x) dx \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \omega(x) dx \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} m dx = 2\varepsilon m,$$

而這與條件(27)矛盾。

在 [III₁, 31] 中我們已見過，若有 m 個綫性無關的向量，則總可以做出同樣多個兩兩正交且標準的向量，使原來的向量可由新向量綫性表出，反之也是一樣。這一切對函數來說也完全適用。

設

$$\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)$$

是在 $[a, b]$ 內連續且綫性無關的，即含常系數 α_k 的恒等關係式

$$\alpha_1 \psi_1(x) + \dots + \alpha_m \psi_m(x) \equiv 0,$$

只當這些系數都等於零的情況成立。現在我們來作在 $[a, b]$ 內為正交且標準化的新函數：

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x),$$

使 $\varphi_k(x)$ 可由 $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ 綫性表出，反之，一切 $\psi_k(x)$ 也可由 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ 綫性表出。為簡寫起見，我們引用代數中曾經用過的記號，即用記號 (f, F) 來表示乘積 $f(x)F(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內的積分：

$$(f, F) = \int_a^b f(x)F(x)dx.$$

函數 $\psi_k(x)$ 的正交化手續，亦即函數 $\varphi_k(x)$ 的構成手續，按以下方式進行：

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1, \psi_1)}}$$

$$\chi_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1(x);$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(\chi_2, \chi_2)}}$$

$$\chi_3(x) = \psi_3(x) - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2(x) - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1(x); \varphi_3(x) = \frac{\chi_3(x)}{\sqrt{(\chi_3, \chi_3)}}$$

$$\chi_m(x) = \psi_m(x) - (\psi_m, \varphi_{m-1})\varphi_{m-1}(x) - \cdots - (\psi_m, \varphi_1)\varphi_1(x);$$

$$\varphi_m(x) = \frac{\chi_m(x)}{\sqrt{(\chi_m, \chi_m)}}.$$

函数 $\varphi_k(x)$ 与 $\chi_k(x)$ 只相差一个常数因子, 这个因子加到 $\chi_k(x)$ 是为了使这些函数标准化, 亦即为了使它们的平方在 $[a, b]$ 上积分等于 1。从所写出的公式立即显出在 $\psi_k(x)$ 及 $\varphi_k(x)$ 之间的线性相关性, 正如我们前面所说的。还要注意, 在函数 $\chi_k(x)$ 中, 没有一个可变为恒等于零, 因此 $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$, 因为比方说要是 $\chi_2(x) \equiv 0$ 的话, 则可引到 $\varphi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之间的线性相关性:

$$\psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1(x) \equiv 0,$$

这归结到 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之间的线性相关性, 而与诸函数 $\psi_k(x)$ 的线性无关的假设矛盾。应用引理, 从已确定的事实立即得出 $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$, 因为, 否则应有 $\chi_k \equiv 0$ 。这样一来, 确定函数 φ_k 的一切公式都有意义, 函数 $\chi_k(x)$ 与已经作好了的函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$ 的正交性可依次检验。例如:

$$\begin{aligned} (\chi_2, \varphi_1) &= (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1)' = \\ &= (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

既有 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 的正交标准性, 得:

$$\begin{aligned} (\chi_3, \varphi_1) &= (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_2)(\varphi_2, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1) = \\ &= (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1) = 0, \end{aligned}$$

同样也有 $(\chi_3, \varphi_2) = 0$ 等等。

还要注意正交标准系的某些其他性質。

設函数系(20)是完备的,且設某連續函数 $f(x)$ 的所有富里埃系数都等于零,換句話說,就是設連續函数 $f(x)$ 与所有函数 $\varphi_k(x)$ 都是正交的:

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad (k=1, 2, \dots).$$

完备公式給出:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0,$$

由于引理,推知 $f(x)$ 恒等于零。

仍然回到一般情况,且設

$$(28) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

是函数 $f(x)$ 的富里埃級数。我們不能肯定級数(28)的收斂性,而且如果它是收斂的,也不能肯定它的和等于 $f(x)$ 。設級数(28)在区間 $[a, b]$ 內是一致收斂的。写出差:

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

既然設 $f(x)$ 是連續函数,則 $f_1(x)$ 也是連續的。將上等式的兩端乘以 $\varphi_p(x)$ 且取积分,并由級数的一致收斂性,則可逐項积分,又由于函数系(20)的正交标准性,得:

$$\int_a^b f_1(x) \varphi_p(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_p(x) dx - c_p.$$

既然 c_k 都是函数 $f(x)$ 的富里埃系数,則右端的差等于零,因此,若函数 $f(x)$ 的富里埃級数是一致收斂的,則 $f(x)$ 与它的富里埃級数的差 $f_1(x)$ 的所有富里埃系数都等于零。除此以外,如果系(20)是完备的,由于前面所說的,得出下面結論:若系(20)是完备的,且連續函数 $f(x)$ 的富里埃級数在区間 $[a, b]$ 是一致收斂的,則它的和