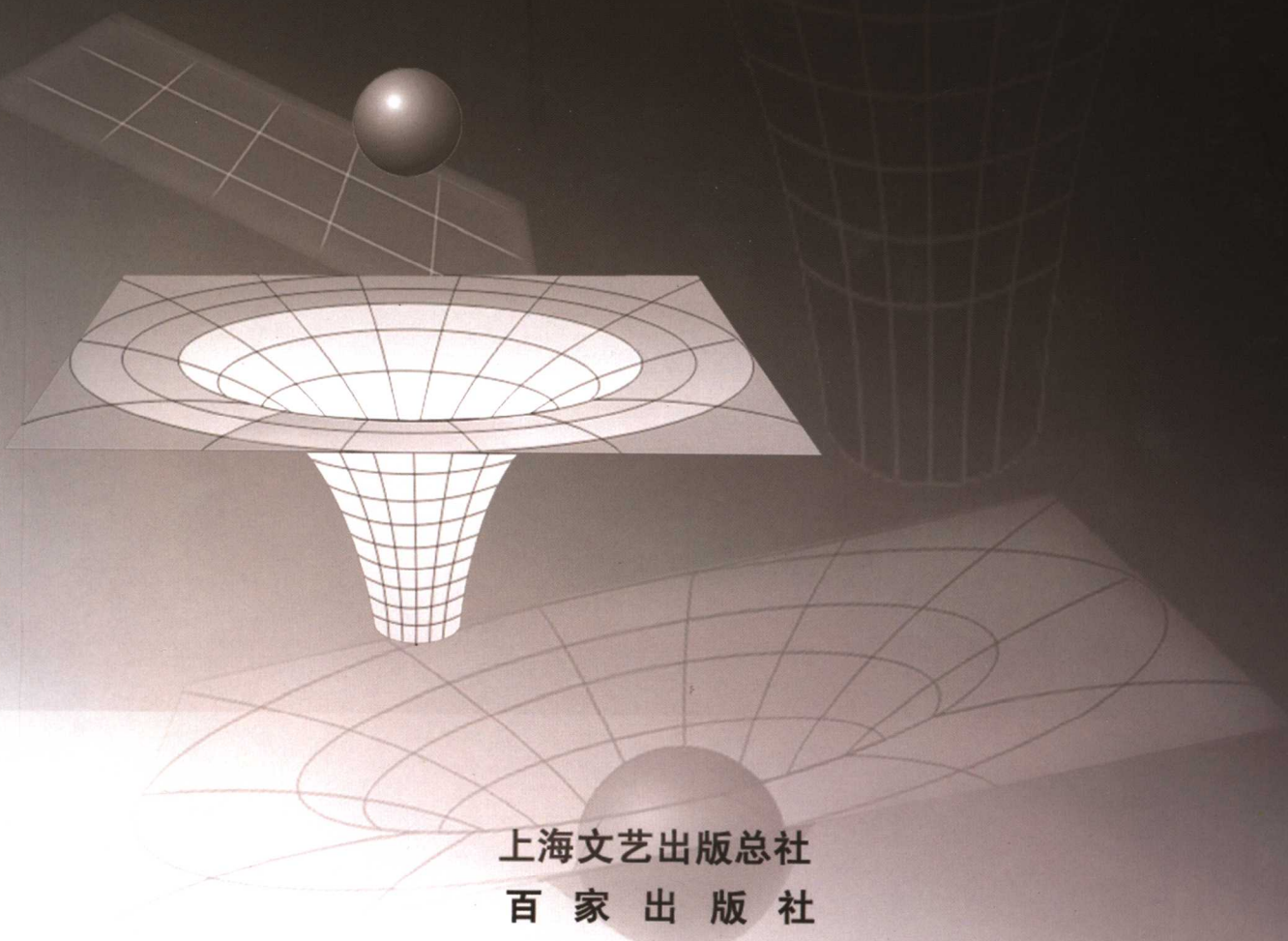


同济大学教材、学术著作委员会资助

高等非欧几里德量子力学

任绍绪 著



上海文艺出版总社
百家出版社

高等非欧几里德量子力学

任绍绪 著



上海文艺出版总社
百家出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等非欧几里德量子力学/任绍绪著. — 上海:百家出版社, 2006. 11

ISBN 7-80703-585-4

I. 高... II. 任... III. 量子力学 IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 134505 号

责任编辑 胡国友

封面设计 吴於人

高等非欧几里德量子力学

任绍绪 著

上海文艺出版总社

百家出版社出版发行

(上海市茶陵路 175 弄 3 号 200032)

新华书店上海发行所经销 上海展强印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 354000

2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—1050

ISBN 7-80703-585-4/O·1

定价 38.00 元



任绍绪, 1982年毕业于复旦大学物理系, 理论物理专业硕士。现任教于同济大学物理系, 讲师。

本书引入非厄米自旋角动量算符Cohortspin的新概念, 在非欧几里德胚胎空间将传统量子力学中有关量子粒子轨道角动量的量子数的定义域取值范围加以扩展, 引出了微观粒子具有内禀固有轨道角动量 $2m_0\hbar$ 的结论。观点新颖, 具有探索性。

作者在此基础上讨论了经典数理特殊函数和近代物理学发展中的一些敏感课题, 结论富于启发性。

本书系统地、有条理地引入物理量的非欧几里德量子力学概念, 公式推导过程详细, 很适合广大物理学爱好者、大学生和学者专家们阅读参考。

非欧几里德量子力学起源于量子粒子的轨道角动量可以不等于整数的量子力学。

作 者

谨 以 此 书

献给同济大学校庆 100 周年

绪 言

量子力学的魅力之一就是物理观测量可以是不连续的。因为这和日常生活中我们对客观世界的感觉是相违背的。人类天性好奇,乐于接受叛逆,任何与我们世世代代相传下来的经验发生冲突的理念都有可能成为新思想诞生的源泉。

量子力学给传统物理学带来的冲击是不言而喻的。在接受满足,在欣赏现有物理概念给人带来的那种不拘一格、一泄千里、淋漓尽致快感的时分,从美学和数学原理的角度去寻觅些瑕疵,挑剔些在那光彩夺目玉石之上的小小瑕疵,有时你自己就会觉得挺有趣的,挺好玩的。

传统量子力学给予我们的量子数取值范围是相当吝啬的。在一根实数轴上,在从负无限大到正无限大的实数轴上,仅有零、正负整数以及半整数是允许的,物理观测量被限制于这些数值内。那些在实数轴上,大量被遗弃、被遗忘的数字,实在叫人心疼!它们在客观世界拥有自己的席位,那么该如何让量子力学容纳它们呢?

数学的魅力之一就是中学时代的平面几何课给人带来的那种亢奋,在所有学科之中,唯有几何题,你是不会做腻的。因为那是我们内心深处渴望具有一种迥然不同于以往世俗生活经验的判断;因为那是你一生中第一次受到的正统逻辑推理的训练。这种思维方式熏陶的结果,则是给人以一种被开化的感觉,完成了一种类似从野蛮人向文明人跨越的启蒙。这种启蒙来自于二千三百年前古希腊数学家欧几里德(Euclid)创立的欧氏几何学。

“过直线 AB 外一点,只能作一条直线与 AB 不相交”,这句话是欧几里德数学空间中一条永远找不到证明、又不能证明的第五公设。

传统量子力学中的物理量是用厄米算符来表示的。这些算符是由欧几里德数学空间所规定的。在此空间内,厄米算符能给出实数物理量。在此空间内,无论是微商算符,还是矩阵算符,都是理想的无相互作用算符,这是因为构造这些厄米算符的欧氏空间是平坦的。

人们引入了许多数学变换,将相互作用渐进渗透到所研究的体系。用无相互作用的算符们去描写有相互作用的现实世界,用厄米算符对应的平坦的欧氏空间去处理现实空间,解决了大量的复杂问题。但又因此冒出了更多的问题和烦恼。

如果说欧几里德数学空间中第五公设的证明耗尽了世上无数英才的生命,才最后让人领悟,使得 19 世纪俄罗斯人罗巴切夫斯基和德国人黎曼去创立非欧几里德几何学。那么,我们为何不一开始就趁早直接引入物理量的相互作用算符,尽可能地避免繁琐,简化物理模型,在赋予算符相互作用性质的非欧几里德数学空间内去讨论量子物理世界呢?

回答以上的两个问号“?”,就是本书的初衷所在。

第一个问号起源于我们对数学神秘逻辑力量信仰的虔诚与执著。第二个问号则有赖于我们对物理现象起因的长久思索而萌发的顿悟与灵感。

量子力学中的动量算符是空间均匀性的反映,坐标原点是可以任意选取的,物理体系的结论不会因此而改变,动量算符是空间平移群的产生子算符。角动量算符是空间各向同性的反映,坐标轴方向可以任意选取,但不会影响物理体系的最终结果,角动量算符是三维转动群的产生子算符。动量算符和角动量算符都是厄米算符。

要知道,身处空间的量子粒子与空间是不可截然分开的,粒子与周围空间的相互作用会将平坦的欧几里德空间“拧弯”,粒子通过自己的厄米算符“拧弯了”定义自己的欧几里德空间,这的确是个有趣又荒唐的念头。

What has been is what will be, and what has been done is what will be done; there is nothing new under the sun.

Is there a thing of which it is said, "See, this is new"? It has already been, in the ages before us.

已有的事,后必再有;已行的事,后必再行。日光之下,并无新事。

岂有一件事人能说这是新的? 哪知,在我们以前的时代,早已有了。

依循于孜孜不倦的探寻,轮回于永恒不变的归宿,或许我们真能幸运地从物理学与数学之间这种与生俱来的和谐之中,再次感受到“与上天对话”时,被赐予的愉悦与快感吧。

果真如此,那么卑微的人类就应毫不犹豫地放下尊严,去赞美物理科学令人敬畏的博大精深,去传颂数学科学逻辑思维的奇妙无比吧!

果真如此,那么在欧氏空间中定义的厄米动量算符和厄米角动量算符就不再是“好的物理量算符”了。

本书引入非欧几里德量子空间概念,取代传统量子力学的厄米空间。我们称被扭曲了的欧氏空间为胚胎空间,胚胎空间是非欧几里德空间。把在胚胎空间中引入的“好的物理量算符”,称为胚胎算符。从这些胚胎算符“眼中”“看”非欧几里德空间、“看”被扭曲了的欧氏空间,周围的世界仍然是均匀的,各向同性的。尽管这些胚胎算符在平坦的欧几里德空间内是我们物理学家们现在还不欣赏的非厄米算符。

在本书中我们将把传统量子力学中粒子物理量所对应的厄米算符加以延拓,成为胚胎算符。不同的物理现象对应于不同的胚胎空间。

本书前七章,深入浅出,系统地介绍由 Cohortspin(伴子)这个新概念引入的胚胎空间。讨论了量子粒子轨道角动量的 Cohortspin 旋量和矢量表示。我们发现粒子具有内禀轨道角动量。就是说它的轨道角动量的最小取值不为零! 可为 $2m_0\hbar$ 。而 $2m_0$ 恰恰就是传统量子力学厄米空间被扭曲后,反映厄米空间破缺程度的标度。内禀轨道角动量是“*Intrinsic and Inherent*”的,它是粒子与它周围空间相互作用产生的。进而量子粒子的轨道角动量可以不等于零,不等于整数。

利用胚胎空间,在高等超越函数领域内,我们建立了连带盖根保尔方程(Associated Gegenbauer Equation),并且求得解。这就是说,我们将特殊函数中著名的连带勒让德方程(Associated Legendre Equation)作了推广。此时积分权函数为 $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 。物理学

家们是会青睐那个长期被人们冷落的盖根保尔方程和这个新生生的连带盖根保尔方程的。

胚胎空间的引入,会对现有量子物理学中的一些原理思维和方法计算产生影响,会有许多有趣和有意义的课题出现。

我们用胚胎空间的概念,在第八、九、十章,讨论电子的反常磁矩和氢原子的兰姆位移(Lamb Shift)。发现电子的反常磁矩与电子的内禀轨道角动量 $2m_0\hbar$ 有关。首次求得氢原子兰姆位移(Lamb Shift)的清楚又简洁的解析表达式。

在第十一、十二章,预猜 Φ_0 不是最小磁通量子的可能性。讨论超导配对电子携带的电荷量与基本磁通量子 $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ 之间的关系。

在第十三章,我们给出了整数和分数量子霍尔效应的统一描述物理模型。这个模型是当年克里钦(Klitzing)整数量子霍尔效应的单粒子物理图景在胚胎空间(第十一章)中“最自然不过的延伸结果”!与以往的理论相比较,显然读者是会倾向我们这个“质朴无华”的模型的。

我们提出分数量子霍尔效应(Fractional Hall Effect)与非欧几里德量子空间的量子化有关。以上的讨论都是近代物理发展中,量子电动力学和固体物理学领域的敏感问题。

胚胎算符的二次量子化及其应用会很自然地产生,涉及这方面的讨论,我们将在适当的时候加以介绍。

对于那些不满足仅仅在远方欣赏物理学,而跃跃欲试走进它神圣领地的年轻同学们,我们尽可能地给出详细的物理背景构思和数学推导过程。读者会感到,本书不是在泛泛而谈,而是卷起袖子真刀实枪地在干,多少能体会到做学问是怎么回事。

对于广大教师,本书无疑为他们提供了一卷原始参考教学讲稿。

本书是作者离开校园学生生活几十年来,尽力排除诱惑,力争静下心来,细细琢磨,努力去感受物理学的基本概念与描述图像的探索,是漫漫绵长的心路历程的部分沉淀。

那些在平淡而迷茫岁月、纷乱而关键时刻给予作者关心、鼓励的同学、老师和友人,给予作者理解、支持的同事和领导,作者是难以忘怀的。

本书的出版得到了同济大学教材,学术著作出版基金委员会资助。作者在此向同济大学物理系、研究生院和学校领导的支持表示衷心的感谢。

作者感激长海医院护士、二军大护理系教员、我的母亲——边菊影对儿子的养育之恩。

作者学识有限,书中不当之处和谬误在所难免,恳切能得到批评和指点。

作者真诚地希望本书能为广大物理学爱好者和学者专家们带来些启示。

任 绍 绪

2006年5月5日立夏于同济大学瑞安楼

Email: shaoxu-ren@hotmail.com

目 录

第一章 厄米算符的破缺与胚胎算符的形成	(1)
§ 1.1 厄米内积空间	(1)
§ 1.2 胚胎内积空间及算符的伴随表示	(2)
§ 1.3 Cohortspin \overline{T}	(5)
1.3.1 Cohortspin \overline{T} 的起源	(5)
1.3.2 Cohortspin \overline{T} 的旋量表示	(8)
1.3.3 Cohortspin \overline{T} 的矢量表示	(10)
1.3.4 Cohortspin \overline{T} 的相似变换表示	(15)
第二章 方位角的胚胎动量算符 L_φ	(18)
§ 2.1 胚胎轨道角动量算符 L_φ	(18)
2.1.1 胚胎轨道角动量算符 L_φ 的旋量表示	(18)
2.1.2 胚胎轨道角动量算符 L_φ 的矢量表示	(19)
§ 2.2 胚胎轨道角动量算符 L_φ 的本征值	(20)
2.2.1 在旋量空间中 L_φ 的本征值	(20)
2.2.2 在旋量空间中 L_φ 的本征函数	(21)
2.2.3 在矢量空间中 L_φ 的本征值	(24)
2.2.4 在矢量空间中 L_φ 的本征函数	(26)
§ 2.3 量子粒子的内禀固有轨道角动量 $2m_0 \hbar$	(32)
第三章 胚胎轨道角动量算符 \overline{L}	(33)
§ 3.1 胚胎轨道角动量算符 \overline{L}	(33)
3.1.1 $g(\theta) = \sin\theta, h(\varphi) \neq 1, H(\varphi) \neq 1$	(33)
3.1.2 $g(\theta) = (\sin\theta)^{1+4m_0}, h(\varphi) = H(\varphi) = 1$	(36)
3.1.3 $g(\theta) = (\sin\theta)^{1+4m_0}, h(\varphi) \neq 1, H(\varphi) \neq 1$	(38)
§ 3.2 胚胎轨道角动量平方算符 L^2	(40)
3.2.1 Legendre 算符和 Gegenbauer 算符	(40)
3.2.2 $g(\theta) = \sin\theta, h(\varphi) \neq 1, H(\varphi) \neq 1$	(42)
3.2.3 $g(\theta) = (\sin\theta)^{1+4m_0}, h(\varphi) = H(\varphi) = 1$	(44)
3.2.4 $g(\theta) = (\sin\theta)^{1+4m_0}, h(\varphi) \neq 1, H(\varphi) \neq 1$	(45)
第四章 连带盖根保尔 (Associated Gegenbauer) 方程	(48)
§ 4.1 连带盖根保尔方程	(48)
4.1.1 历史遗留问题	(48)

4.1.2	寻找连带盖根保尔方程	(49)
4.1.3	连带盖根保尔方程的解的形式	(51)
§ 4.2	连带盖根保尔方程的解的基本性质	(54)
4.2.1	C_{l,m_0}^r 的正交归一性质的证明	(54)
4.2.2	连带盖根保尔方程的解的基本性质	(56)
4.2.3	$C_{l,\lambda}^r$ 的表达式	(57)
4.2.4	C_{l,m_0}^r 是连带盖根保尔方程和轨道角动量平方算符 $[\vec{L}]^2$ 的解	(58)
§ 4.3	连带盖根保尔方程的递推公式	(60)
4.3.1	递推公式的推导, 连带盖根保尔 $C_{l,\lambda}^r$ 和勒让德 P_l^m 递推公式的比较	(60)
4.3.2	与 $C_{l,\lambda}^r$ 的递推公式有关的重要结论	(65)
第五章	胚胎球谐函数 ψ_i	(69)
§ 5.1	自旋和轨道角动量耦合 $\mathbf{K} = \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar$ 的本征值问题	(69)
5.1.1	$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar$ 的表示	(69)
5.1.2	球谐函数 ψ_i 的八个关联公式	(70)
5.1.3	$C_{l,\lambda}^r$ 的两个递推公式	(70)
5.1.4	指标不同的归一系数 $N_{l,\lambda}^r$ 间的比值	(71)
5.1.5	八个关联公式的证明	(72)
5.1.6	\mathbf{K} 的本征值问题与球谐函数 ψ_i 的两分量函数 $\Psi^{(j)}$	(73)
5.1.7	总角动量 \mathbf{J}^2 的本征值问题	(76)
§ 5.2	球谐函数 ψ_i 的四分量函数 Φ_j	(78)
5.2.1	自旋和轨道角动量耦合 $\rho_3 \mathbf{K}$ 的本征值问题	(78)
5.2.2	一些有用的公式	(79)
第六章	总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$	(84)
§ 6.1	寻找胚胎算符 $\vec{\Omega}$	(84)
6.1.1	胚胎算符 $\vec{\Pi}, \vec{\Gamma}$ 和 \vec{W}	(84)
6.1.2	与 Π_i 和 L_3 有关的几个基本对易式	(85)
6.1.2.1	计算 $[\Pi_i, \Pi_j]_-$	(86)
6.1.2.2	计算 $[L_3, \Pi_j]_-$	(87)
6.1.3	算符 $\vec{\Pi}$ 不能和轨道角动量 \vec{L} 组成总角动量 \vec{J}	(88)
6.1.4	算符 $\vec{\Omega}$ 能和轨道角动量 \vec{L} 组成总角动量 \vec{J}	(89)
6.1.4.1	计算 $[L_3, \vec{\Omega}]_-$	(89)
6.1.4.2	计算 $[\Omega_i, \Omega_j]_-$	(90)
§ 6.2	总角动量 \mathbf{J}_3 的本征值问题	(92)
第七章	胚胎动量算符 \vec{P}	(94)
§ 7.1	胚胎动量算符 \vec{P}	(94)

7.1.1 胚胎动量算符 \vec{P} 的计算	(94)
7.1.2 胚胎动量平方算符 P^2	(96)
§ 7.2 胚胎角动量算符 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ 、胚胎 SO(3)群的产生子	(102)
第八章 电子的反常磁矩	(104)
§ 8.1 胚胎空间中的狄喇克方程 $\vec{\sigma}\cdot\vec{P}(\vec{\sigma}\neq\vec{\tau})$	(104)
§ 8.2 电子的反常磁矩	(106)
§ 8.3 胚胎空间中的狄喇克方程 $2\vec{\Omega}\cdot\vec{P}(\vec{\sigma}=\vec{\tau})$	(107)
8.3.1 狄喇克方程 $2\vec{\Omega}\cdot\vec{P}$	(107)
8.3.2 磁矩 $\hat{\mu}_{\text{磁}}$ 与磁场 \vec{B} 相互作用能量哈密顿 \hat{H}_{μ}	(108)
8.3.2.1 公式 $[2\vec{\Omega}\cdot(\vec{P}+e\vec{A})]^2$ 的表示	(108)
8.3.2.2 磁矩贡献项	(114)
8.3.3 电子的反常磁矩	(118)
第九章 氢原子的兰姆位移(Lamb Shift)(I)	(120)
§ 9.1 氢原子在胚胎空间 $\alpha=f(r)g(\theta)h(\varphi)$ 中的非相对论解	(120)
9.1.1 求解方程	(120)
9.1.2 径向几率波函数在零点的表达式	(124)
§ 9.2 厄米动量算符 \vec{p} 和泡利矩阵 $\vec{\sigma}$ 在胚胎空间 $\alpha=\delta+\epsilon(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})$ 的表示	(127)
9.2.1 胚胎空间 $\alpha=\delta+\epsilon(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})$ 内算符的基本性质	(128)
9.2.2 基本泡利哈密顿拓扑组	(131)
§ 9.3 胚胎动量算符 \vec{p} 和泡利矩阵 $\vec{\sigma}$ 在胚胎空间 $\alpha=\delta+\epsilon(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})$ 的表示	(135)
§ 9.4 电磁相互作用下的胚胎空间的破缺	(136)
9.4.1 氢原子 S 态兰姆位移的原始哈密顿 \hat{H}_-	(137)
9.4.2 $\langle n, l, m \hat{H}_- n, l, m \rangle$ 的计算	(140)
§ 9.5 当 $3m_r=2\alpha_0$ 时的氢原子 S 态兰姆位移	(142)
第十章 氢原子的兰姆位移(Lamb Shift)(II)	(146)
§ 10.1 电磁相互作用下的基本泡利哈密顿拓扑组合	(146)
10.1.1 胚胎空间 αU 内的胚胎自旋算符 $\vec{\Pi}$ 和 $\vec{\Gamma}$	(146)
10.1.2 胚胎空间 αU 内四个泡利方程哈密顿公式的证明	(147)
§ 10.2 氢原子的哈密顿	(155)
10.2.1 氢原子的哈密顿	(155)
10.2.2 化简哈密顿	(158)
10.2.3 期望值 $\langle \text{operator} \rangle$ 的计算	(159)
§ 10.3 氢原子的方程的解	(163)
10.3.1 微分方程的解	(163)

10.3.2	能级方程的解	(168)
§ 10.4	首次建立了包含 S 态和非 S 态的氢原子兰姆位移统一解析公式	(173)
10.4.1	极化系数 ξ_1, ξ_2 的确定	(173)
10.4.2	$3m_r - 2m_0 = 0$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$ 时的兰姆位移	(174)
10.4.3	$3m_r - 2m_0 = 3\pi \left(\frac{\alpha_0}{2\pi}\right)^3$, $\xi_1 = \xi_2 = 6$ 时的兰姆位移	(177)
第十一章	磁通量的量子化	(180)
§ 11.1	胚胎柱坐标中的动量算符 \vec{P}	(180)
§ 11.2	有用的公式	(182)
§ 11.3	超导电流的连续性方程	(198)
11.3.1	电磁场中的胚胎薛定谔方程	(198)
11.3.2	宏观电子对波函数	(201)
§ 11.4	磁通量的量子化	(205)
第十二章	库柏电子对携带的电荷和基本磁通量子之间的关系	(207)
§ 12.1	约瑟夫隧道效应	(207)
§ 12.2	外磁场下的约瑟夫单结超导电流	(209)
§ 12.3	双结超导量子并联干涉仪	(211)
§ 12.4	库柏电子对携带的电荷和基本磁通量子之间的关系	(211)
第十三章	分数量子霍尔 (Hall) 效应与胚胎空间的量子化	(213)
§ 13.1	朗道能级的简并度	(213)
13.1.1	朗道 (Landau) 能级	(213)
13.1.2	填充数	(219)
§ 13.2	霍尔效应的现象	(222)
13.2.1	经典霍尔效应	(222)
13.2.2	量子霍尔效应	(222)
§ 13.3	整数霍尔效应的物理背景	(223)
§ 13.4	分数量子霍尔效应的物理背景	(224)
13.4.1	非整数填充数和磁通量子	(224)
13.4.2	分数量子霍尔效应的胚胎空间解释	(226)
13.4.3	分数量子霍尔效应的物理背景	(230)
参考书目	(233)

第一章 厄米算符的破缺与胚胎算符的形成

我们知道量子力学中的物理量是用数学算符表示的,物理量必须是实数,这句话换成数学家的语言就是说:与物理量相对应的抽象的数学算符要满足所谓的“正定性”,或者说要满足所谓的“厄米性”,即算符 Z 满足 $Z^+ = Z$ 。我们称满足这个关系的算符是厄米算符。

物理体系的状态是用数学上的广义希尔伯特空间中的矢量来表示的,将物理量的化身、厄米算符作用到描述物理体系状态的化身、矢量上,就有可能得到具有意义的实数物理量。在通常的量子力学中,矢量就是波函数。我们称此广义希尔伯特空间是表示物理状态的态空间,矢量是态函数。

在讨论微观现象时,算符和态函数是二者缺一不可的。在数学上,把二者连接在一起的是内积空间。在内积空间中,讨论物理量的算符,比较直观、方便。

内积空间的性质决定着物理算符的表示。大学里教授的传统量子力学中的厄米算符是在欧几里德内积空间概念意义下确定的。这个内积空间是平坦的。由这类空间定义出来的物理算符,比如动量 $-i\hbar \nabla$ 、轨道角动量 \vec{l} 和自旋 $\vec{\sigma}$ 等都是在无相互作用意义下自由粒子的物理量。但是事实上粒子与它所处的空间是相互依存的、相互影响的。粒子会将平直的、均匀、各向同性的欧几里德空间扭曲。因此表征粒子物理特性的厄米算符会使得定义它的那个平坦的欧几里德厄米空间变形。

厄米空间被自己定义,塑造出来的厄米算符所弯曲的图像,我们称之为厄米空间的破缺 BHS(Broken Hermitian Space)。“一损俱损”,进而厄米算符自身也失去被定义的内积空间(not well defined)。我们称这个现象叫着“厄米算符的破缺”。

粒子和空间存在着相互作用,能够使得它们和谐共处的内积空间,我们称它为胚胎空间(Embryo Space)。从胚胎空间定义出来粒子的“好的物理算符”,我们称之为胚胎算符(Embryo Operator)。胚胎算符是厄米算符($Z^+ = Z$)在扭曲空间的物理延拓,用记号 $Z^\oplus = Z$ 表示。即 Z 是“正定性”的。

非欧几里德量子力学就是研究胚胎内积空间意义下的量子力学。非欧几里德量子力学的形成,最初起源于作者对非厄米物理算符性质的探讨,特别是对“正定性”的非厄米轨道角动量算符 L_z 物理背景的思索。本书将围绕算符 L_z 的概念加以展开。

下面我们先介绍胚胎内积空间的数学形成。并在此基础上引入一个重要的非厄米矢量算符 \vec{T} 。算符 \vec{T} 是胚胎算符,我们称它为 Cohortspin。它在 L_z 之中扮演着重要的角色。

§ 1.1 厄米内积空间

为日后讨论方便,引入厄米线性空间内积的缩写记号:

$$(f, g) \equiv \int dx f^* g = (g, f)^* \quad (1)$$

上式用积分表示连续求和,用矩阵表示离散求和。 f 和 g 是体系广义希尔伯特空间中的

矢量。注意以下式子(2)和(3)以及(4)和(5)之间的对应关系:

普通 C 数的共轭复数 C^* :

$$C^* \equiv (a + ib)^* = a - ib \quad (2)$$

算符 Z 的伴随算符 Z^* :

$$(g, Z^* f) \equiv (f, Zg)^* = (Zg, f) \quad (3)$$

如果: $C^* = C$, 则有: C 是实数 (4)

如果: $(g, Z^* f) \equiv (f, Zg)^* = (Zg, f) = (g, Zf)$
则有: Z 是厄米算符 (5)

所有现今的量子算符都是在与以上厄米线性空间内积等价的体系基础上引入的。

以上所涉及的 HS(厄米空间)是各向同性、平坦的。粒子与空间彼此是独立,它们之间是不存在相互作用的。厄米空间是理想的物理空间。不妨奇想一下,在数学概念上,我们似乎应该作出些巧妙的悟性切入、理性思维延拓,进而更趋近于真实的量子物理空间。

基于以上思索,我们引入胚胎内积空间 (af, g) 。 α 是度规系数算符 MCO (Metric Coefficient Operator),它可以是厄米函数或者厄米算符。当 α 等于 1 时,胚胎内积空间返回厄米内积空间 (f, g) 。

§ 1.2 胚胎内积空间及算符的伴随表示

胚胎线性空间内积的缩写记号为:

$$(af, g) \equiv \int dx (af)^* g = (g, af)^* \quad (6)$$

我们用 Z^\oplus 来表示算符 Z 的伴随算符。在胚胎内积空间 (af, g) ,算符 Z 的伴随算符定义为:

$$(ag, Z^\oplus f) = (af, Zg)^* \quad (7)$$

A) 首先来讨论微商算符 ∂_x 的伴随算符 ∂_x^\oplus ,它的定义式如下:

$$\int dx (ag)^* \partial_x^\oplus f = \left(\int dx (af)^* \partial_x g \right)^* \quad (8)$$

下面求 ∂_x^\oplus 的具体表示。

从定义式(8)右方,(令 $F \equiv af$) 可得:

$$\begin{aligned} \left(\int dx (af)^* \partial_x g \right)^* &= \int dx \alpha f \partial_x g^* = \int dx F \partial_x g^* = Fg^* \Big|_a^b - \int dx (\partial_x F) g^* \\ &= 0 - \int dx (\partial_x F) g^* = - \int dx (\partial_x \alpha f) g^* = - \int dx g^* (\partial_x \alpha f) \\ &= - \int dx g^* (\alpha [\partial_x f] + [\partial_x \alpha] f) = - \int dx g^* (\alpha \partial_x + [\partial_x \alpha]) f \end{aligned} \quad (9)$$

而从定义式(8)左边,可得:

$$\int dx \alpha^* g^* \partial_x^\oplus f = \int dx g^* (\alpha^*)^\sim \partial_x^\oplus f = \int dx g^* \alpha^+ \partial_x^\oplus f = \int dx g^* \alpha \partial_x^\oplus f \quad (10)$$

从上(9)和(10)两式得:

$$\int dx g^* \alpha \partial_x^\oplus f = - \int dx g^* (\alpha \partial_x + [\partial_x \alpha]) f \quad (11)$$

进而有:

$$\alpha \partial_x^\oplus = -\alpha \partial_x - [\partial_x \alpha] \quad (12)$$

$$\partial_x^\oplus = -\partial_x - \alpha^{-1} \partial_x \alpha \quad (13)$$

$$[-i\partial_x]^\oplus = -i\partial_x - i\alpha^{-1} \partial_x \alpha \quad (14)$$

最终求得:

$$[-i\partial_x - i\frac{1}{2}\alpha^{-1} \partial_x \alpha]^\oplus = -i\partial_x - i\frac{1}{2}\alpha^{-1} \partial_x \alpha \quad (15)$$

从算符 $-i\partial_x$ 和它的伴随算符 $[-i\partial_x]^\oplus$,能构造出两个胚胎算符:

$$P_x = \frac{1}{2}([-i\partial_x]^\oplus + [-i\partial_x]) \quad (16)$$

$$B_x = \frac{i}{2}([-i\partial_x]^\oplus - [-i\partial_x]) \quad (17)$$

这样,可获得至少两倍于通常量子力学的物理量信息,许多复杂的微观现象有可能获得解释。

B) 现在来讨论矩阵 Z 的伴随表示。

在胚胎内积空间 $(\alpha f, g)$ 中, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ 是厄米算符,取 $\text{Det} \alpha = 1, Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ 根据定义式(7)有:

$$(\alpha g, Z^\oplus f) = (\alpha f, Zg)^* \quad (18)$$

或者写成:

$$(g_1 g_2)^* \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^\oplus \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$= \left[(f_1, f_2)^* \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} (g_1) \right]^*$$

$$= \left[(g_1, g_2) \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \right]^\sim (f_1)^* \right]^*$$

$$= (g_1, g_2)^* \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \right]^\sim^* \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$= (g_1, g_2)^* \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \right]^+ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

比较式子(19)和式子(20),得到:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^\oplus &= \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \right]^+ \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

也就是：

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^{\oplus} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

也就是：

$$Z^{\oplus} = \alpha^{-1} Z^+ \alpha \quad (23)$$

上式就是 Z 在胚胎内积空间 $(\alpha f, g)$ 中的伴随表示。

如果 Z 是厄米矩阵, $Z^+ = Z$, 则有：

$$Z^{\oplus} = \alpha^{-1} Z \alpha \neq Z \quad (24)$$

所以 Z 不是胚胎算符。上式是厄米矩阵 Z 的相似变换, 其本征值是保持不变的。

但是我们可以构造出两个非厄米算符：

$$C_1 = \frac{1}{2} \{Z^{\oplus} + Z\}, \quad C_2 = \frac{i}{2} \{Z^{\oplus} - Z\} \quad (25)$$

它们是胚胎算符, 即满足关系: $[C_1]^{\oplus} = C_1, [C_2]^{\oplus} = C_2$ (26)

这是因为: $[Z^{\oplus}]^{\oplus} = Z$ (27)

进而 C_1 和 C_2 是胚胎算符。它们的本征值是厄米矩阵 Z 的本征值在胚胎空间延拓的两支。显然同一物理量算符 Z , 现在具有两个本征物理量了: 其中 C_1 对应的是大分量本征值, C_2 对应的是小分量本征值。

可以根据物理模型的需要, 将微商算符 P, B 和矩阵 C_1, C_2 配方出适当的组合排列, 物理系统的许多精巧、细微的结构和图像就有可能在非欧几里德空间之中显山露水。读者可在本书第八、九章, 尤其在第九章和第十章节细细体会。

下面以实矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为例, 确定矩阵 B 的伴随算符 B^{\oplus} 的具体表示。根据(23)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_4 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_3 & +\alpha_4 \alpha_2 \\ -\alpha_3 \alpha_1 & -\alpha_3 \alpha_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

除非 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 。也就是说: 厄米算符 B 在胚胎空间 $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, 不是胚胎算符。

$$\text{而 } C_1 = \frac{1}{2} (B^{\oplus} + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +\eta^2 & +\eta\kappa \\ -\eta\kappa & -\eta^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\text{而 } C_2 = \frac{i}{2} (B^{\oplus} - B) = \frac{i}{2} \eta \begin{pmatrix} +\eta & +\kappa \\ -\kappa & -\eta \end{pmatrix} \quad (30)$$

它们的本征值分别为 $\frac{1}{2} (1 \pm \kappa)$ 和 $\pm \frac{1}{2} \eta$ 。它们分别是实矩阵 B 在延拓后的 α 空间的大小分量算符的本征值。利用公式(33)可以证明 $[C_i]^{\oplus} = C_i, C_i$ 是胚胎算符。(为了讨论方便起见, 已取 $\alpha_1 = \alpha_4 = \kappa, \alpha_2 = \alpha_3 = \eta$)

小结: 如果 $Z^{\oplus} = Z$, 我们称算符 Z 是胚胎算符。显然胚胎算符是通常厄米空间中的厄米矩阵算符 ($Z^+ = Z$) 在胚胎内积空间中的延拓, 当 α 趋于 1, 它们全等。