大學先修叢書

幾何學

編著者　范際平

正中書局印行

中華民國三十七年十一月初版

（大學先修叢書）

幾何學

全一册　定價金圓券柒角伍分

（外埠酌加運費匯費）

編著者　范際平

發行人　蔣志澄

印刷所　正中書局

發行所　正中書局

(2546)

滬・本　4/4

編 輯 要 旨

一. 本書乃根據幾何題之性質編成,共分五章. 第一章爲定理與證題法. 第二章爲軌跡問題. 第三章爲作圖問題. 第四章爲計算問題. 第五章爲極大極小問題. 極適合升學會考之用.

二. 本書對於平面幾何定理,僅作一系統性複習,不加以證明. 但對於著名問題如西摩孫氏線、九點圓、多洛梅氏定理、梅耐勞氏定理、喜瓦氏定理……則詳加研討. 以期灌輸近世幾何之觀念,而補中學所讀之不足. 又對於軌跡及作圖二問題,更作系統之討論,俾讀者明瞭其解決方法.

三. 本書所用數學名詞乃根據國立編譯館所厘定之數學名詞.

四. 本書所用記號,前後一致. 庶可養成讀者規律化而收事半功倍之效.

五. 自民國二十一年至民國三十六年各著名大學之幾何入學試題,茲擇其佳者,演爲例題. 且附若干於習題中,庶讀者可窺見幾何試題之趨勢. 但幾何題千變萬化,難以少數例題包括一切. 惟有多加演習,方可養成思索難題之智慧.

六. 本書習題，另編題解，仍由本局出版.

七. 本書曾在四川江津白沙教育部特設大學先修班試教多次，數易其稿，方行付梓. 深望海內方家閱及時，加以賜教爲感.

民國三十六年十一月三十日編者謹識於上海江灣國立復旦大學復旦新村.

目　次

第 一 章

定理及證題法

第一節 直線形

一. 重要定義及定理之複習.

(A) **定義.**

1. **直線.** 無定義之名詞.

2. **平面.** 在面上任取兩點連成直線，而此直線完全在此面上者.(否則稱爲曲面).

3. **角.** 一半直線，繞其線上一定點旋轉所成之部份.

4. **特殊角.**

(i) 平角 角之起終邊成一直線者.

(ii) 直角 平角之一半.

(iii) 周角 平角之二倍.

(iv) 銳角 小於直角者.

(v) 鈍角 大於直角而小於平角者.

5. 兩角之關係.

(i) 隣角　兩角共有一邊及一頂點，而他兩邊分處於公共邊之兩側者.

(ii) 餘角　兩角之和等於一直角，則此兩角互稱爲餘角.

(iii) 補角　兩角之和等於一平角，則此兩角互稱爲補角.

(iv) 對頂角　一角兩邊爲他角兩邊之延長線者.

6. 垂線. 兩直線相交成直角，則此二直線互稱爲垂線，該交點稱爲垂足.

7. 平行線. 在同一平面上之兩直線，雖引長而永遠不相交者.

8. 四邊形之種類.

(i) 梯形　四邊形僅有兩邊平行者.

(ii) 平行四邊形　四邊形之對邊皆平行者.

(iii) 矩形　平行四邊形之各角皆爲直角者.

(iv) 菱形　平行四邊形之各邊均相等者.

(v) 正方形　矩形之各邊均相等者.

(B) 公理.

1. 全分公理.

(i) 全量等於各分量之和.

(ii) 全量大於任一分量.

2. 等量公理及不等量公理.

3. 移形公理. 一幾何圖形任意移動,僅變其位置,而不變其形狀與大小.

4. 直線公理.

(i) 兩點之間僅能作一直線.

(ii) 兩點之間直線最短.

5. 平行公理. 過線外一點,僅能作一直線與一已知直線平行.

(C) 定理.

1. 角之定理.

(i) 凡平角皆相等.

(ii) 凡直角皆相等.

(iii) 等角之餘角相等.

(iv) 等角之補角相等.

(v) 如兩隣角外邊成一直線,則其兩角互補,其逆亦眞.

(vi) 二直線相交所成之對頂角相等.

2. 全等三角形定理.

(i) 兩三角形有一邊及兩角彼此對應相等,則全等.

(ii) 兩三角形有兩邊及一夾角彼此對應相等,則全等.(如爲兩直角三角形,則不限定爲夾角).

(iii) 兩三角形有三邊彼此對應相等,則全等.

3. 等腰三角形定理. 等腰三角形之兩底角相等,其逆亦

眞.

4. 平行線定理.

(i) 平行線之判別定理 兩線與一線相交所成之錯角相等或同位角相等或同側內角互補,則此兩線平行.

(ii) 平行線之性質定理 兩平行線爲第三線所截,則錯角相等,同位角相等,同側內角互補.

(iii) 兩角之邊,彼此平行,則此兩角相等或互補.

5. 垂線定理.

(i) 由線上一點或線外一點僅能作一直線與此線垂直.

(ii) 一角之兩邊與他角之兩邊彼此垂直,則此兩角相等或互補.

6. 中垂線定理. 一線段之中垂線上各點距線之兩端等遠,其逆亦眞.

7. 角之平分線定理. 一角之平分線上各點距角之兩邊等遠,其逆亦眞.

8. 不等定理.

(i) 三角形兩邊之和大於其餘一邊,兩邊之差,小於其餘一邊.

(ii) 三角形之兩邊不等,則其所對之角亦不等,大邊對大角,小邊對小角,其逆亦眞.

(iii) 兩三角形有兩邊彼此對應相等,而夾角不等,則夾角

大者，其所對之邊大，夾角小者，其所對之邊小，其逆亦眞.

(iv) 由線外一點至線上所作之線，以垂線爲最短，其逆亦眞.

(v) 由線外一點至線上作兩斜線及一垂線，如斜線足距垂足等遠，則此二斜線相等. 如不等遠，其距垂足較遠者，該斜線較長，其距垂足較近者，該斜線較短，其逆亦眞.

9. 多角形之內外角定理.

(i) 內角和定理　n 角形之內角和 $=(n-2)180°$.

(ii) 外角和定理　n 角形之外角和 $=360°$.

証. 此二定理用歸納法證之最簡，兹列表示之如下:

角數	分成三角形個數	內外角總和	內角和	外角和
3	1	$3\times180°$	$180°$	$360°$
4	2	$4\times180°$	$2\times180°$	$360°$
5	3	$5\times180°$	$3\times180°$	$360°$
……	……	……	……	……
n	$n-2$	$n\times180°$	$(n-2)180°$	$360°$

(iii) 三角形之外角定理

(甲) 外角等於不相隣兩內角之和.

(乙) 外角大於不相隣之任一內角.

10. 平行四邊形定理.

(i) 判別定理　凡四邊形合乎下列條件之一者，則爲平行四邊形.

（甲）兩對對邊平行．（乙）兩對對邊相等．

（丙）兩對對角相等．（丁）兩對角線互相平分．

（戊）一對對邊相等且平行．

（ii）**性質定理．** 凡平形四邊形

（甲）對邊相等．（乙）對角相等．

（丙）對角線互相平分．（丁）隣角互爲補角．

11．平行截線定理．

（i）一直線被三條以上平行線所截，其所截之諸線段相等，則他直線被此諸平行線所截，其所截之諸段必相等．

（ii）三角形兩邊中點連線，必平行底邊，且爲底邊之半，又過三角形一邊中點作底邊之平行線，必過他邊之中點．

（iii）梯形兩腰中點之連線，必與兩底平行，而其長爲兩底和之半，又過梯形一腰中點，作與兩底平行之線段，必過他腰之中點．

12．共點線．

（i）三角形三邊之中垂線交於一點，此點距三角形三頂點等遠．（此點稱爲外心）．

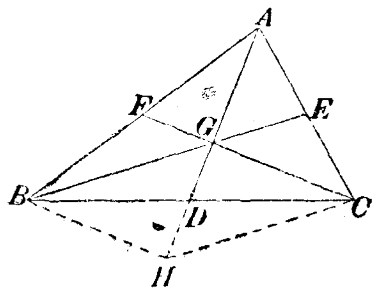
（ii）三角形三內角之平分線交於一點，此點距三角形三邊等遠．（此點稱爲內心）．

（iii）三角形一內角及其餘兩外角之平分線交於一點，此點距三角形三邊或其延線等遠．（此點稱爲傍心）．

(iv) 三角形三高交於一點.(此點稱爲垂心或高心).

(v) 三角形三中線交於一點. 此點距各頂點之遠爲各中線長之三分之二.(此點稱爲重心).

證. 如 BE、CF 二中線交於一點 G. 連 AG, 延長與 BC 交於 D 點. 過 B 點作線與 CF 平行且與 AD 延線交於一點 H. 更連 CH.



在 $\triangle ABH$ 內,

$$\because \quad AF=BF,$$

$$FG \parallel BH,$$

$$\therefore \quad AG=GH.$$

在 $\triangle AHC$ 內,

$$\because \quad AG=GH, \quad AE=EC,$$

$$\therefore \quad GE \parallel CH.$$

故 $GBHC$ 爲 $\square$, $BD=DC$, $GD=DH$.

因知 AD 亦爲一中線, 而三中線 AD、BE、CF 交於一點.

又因 $$GD=DH=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}AG.$$

故 $AG=\frac{2}{3}AD$, $GD=\frac{1}{3}AD$. 餘同理可證.

二. 證題法.

(A) **證兩線段相等之法.**

1. 證爲全等三角形之對應邊.

2. 證爲等腰三角形之兩腰.

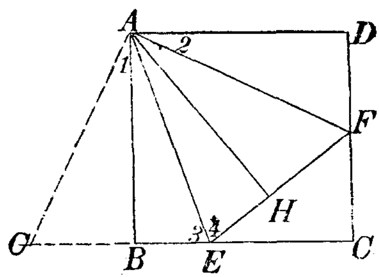
3. 證爲中垂線上任一點距兩端之遠.

4. 證爲角之平分線上任一點距兩邊之遠.

5. 證爲平行四邊形之對邊或爲對角線上之二相等部份.

6. 證爲由三角形一邊之中點，作與底邊平行之線平分他邊之線段.

例. 自正方形 $ABCD$ 之頂點 A,作一角等於 $45°$,其二邊與 BC 相交於 E,與 DC 相交於 F，連 EF. 試證自 A 至 EF 之距離,等於此正方形之邊長.



解. 已知 $ABCD$ 爲正方形,

$$\angle EAF=45°,$$

$$AH \perp EF.$$

求證

$$AH=AB.$$

證. 延長 CB 至 G 點,使 $BG=DF$. 連 AG.

$$\because \quad AB=AD \text{ (已知)},$$

$$BG=DF \text{ (所作)},$$

$$\angle ABG=\angle ADF=90°,$$

$\therefore\quad \triangle ABG \cong \triangle ADF$. (s.a.s.).

$\therefore\quad AG = AF$ (對應邊).

又 $\because\quad \angle 1 = \angle 2$ (對應角).

$\therefore\quad \angle GAE = \angle 1 + \angle BAE = \angle 2 + \angle BAE$

$= \angle BAD - \angle EAF = 90^\circ - 45^\circ$

$= 45^\circ = \angle EAF$.

且 $AE = AE$ (公共邊).

$\therefore\quad \triangle AGE \cong \triangle AFE$ (s.a.s.).

而 $\angle 3 = \angle 4$ (對應角).

又 $\because\quad \angle ABE = \angle AHE = 90^\circ$,

$AE = AE$ (公共邊).

$\therefore\quad \triangle ABE \cong \triangle AHE$. (a.a.s.).

$\therefore\quad AH = AB$ (對應邊).

(B) 證兩角相等之法.

1. 證此兩角爲對頂角.
2. 證爲他相等角之餘角或補角.
3. 證爲全等三角形之對應角.
4. 證爲等腰三角形之兩底角.
5. 證兩三角形有兩角相等，而此兩角各爲其第三角.
6. 證此兩角爲平行線間之錯角或同位角.
7. 證爲平行四邊形之對角.

8. 證此兩角之邊彼此平行或垂直，並證其不互爲補角.

例. 四邊形 $ABCD$ 中，$AB=CD$. 試證過 BC 及 AD 中點之線必與 BA 及 CD 成等角.

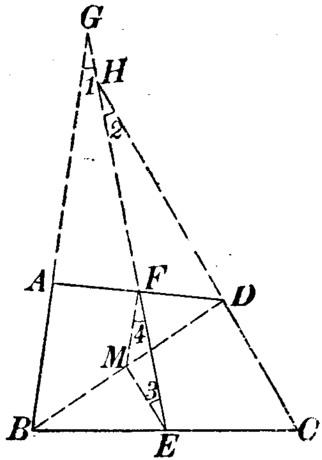
解. 已知

$AB=CD,$

$EB=EC,$

$FA=FD.$

求證 $\angle 1=\angle 2.$



證. 連 BD，取其中點 M. 更連 ME、MF.

在 $\triangle ABD$ 內

$\because$ $FA=FD,$

$MB=MD,$

$\therefore$ $MF \parallel AB,$ $MF=\frac{1}{2}AB.$

在 $\triangle BCD$ 內

$\because$ $EB=EC,$ $MB=MD.$

$\because$ $ME \parallel CD,$ $ME=\frac{1}{2}CD.$

但 $AB=CD,$ $\therefore$ $ME=MF,$ $\angle 3=\angle 4.$

又　　$\because$　$\angle 4=\angle 1$，　$\angle 3=\angle 2$.　　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$.

(C) **證甲量倍於乙量之法.**

1. 證甲量之半等於乙量.

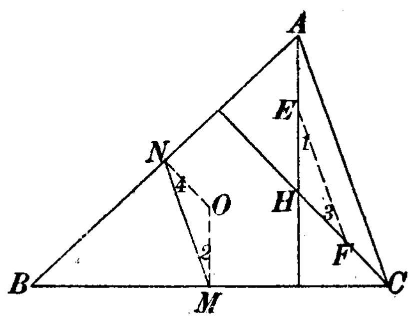
2. 證乙量之倍等於甲量.

例 1. 試證自三角形各角至垂心之距離，等於自外心至對邊之距離之二倍.

證. 設 O 爲 $\triangle ABC$ 之外心，H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心.

平分 AH 於 E 點，CH 於 F 點，連 EF.

更設 M 爲 BC 之中點，N 爲 AB 之中點. 連 MN、OM、ON.



則　　$OM\perp BC$,　　$ON\perp AB$.

$\because$　$EF\parallel AC$,　　且　$EF=\dfrac{1}{2}AC$;

$NM\parallel AC$,　　且　$NM=\dfrac{1}{2}AC$,

$\therefore$　$EF=NM$,　　$EF\parallel NM$.

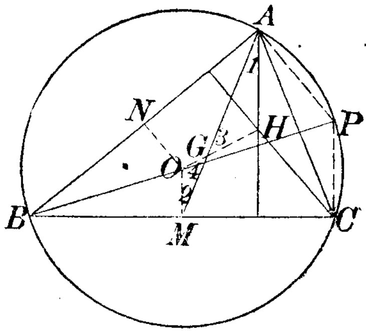
又　$\because$　$AH\parallel OM$,　　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$,

更　$\because$　$CH\parallel ON$,　　$\therefore$　$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore \quad \triangle HEF \cong \triangle OMN$ (a.s.a.).

故 $\qquad EH=OM. \qquad$ 而 $\quad AH=2OM.$

又證. 作直徑 BP，連 AP, CP.



$\because \quad \angle BCP=90^\circ,$

$\therefore \quad PC \parallel AH.$

$\because \quad \angle BAP=90^\circ,$

$\therefore \quad PA \parallel CH.$

故 $AHCP$ 為 ▱.

$\therefore \quad AH=PC.$

在 $\triangle BCP$ 內,

$$\because \quad BO=PO, \qquad BM=CM,$$

$$\therefore \quad PC=2OM.$$

故 $$AH=2OM.$$

註. 由此立可得下二定理:

（i）三角形之垂心、重心、外心共線.

（ii）三角形重心與垂心之距離，等於重心與外心距離之二倍.（武大，21 年度）.

證. 連 OH，設與中線 AM 交於 G 點.

$$\because \quad \angle 1=\angle 2, \qquad \angle 3=\angle 4.$$