中央广播电视大学

高等师范专科小学教育专业

（理科方向）

高等数学课程学习指导书

下册

主编　朱鋐道

高等教育出版社

高等数学课程学习指导书

下　册

主编　朱铉道

编写人员　朱铉道　朱晓鸽

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程学习指导书　下册/朱 铉道主编. 一北京：高等教育出版社，1998.3
ISBN 7-04-006670-X

Ⅰ.高… Ⅱ.朱… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00761 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588

高等教育出版社发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 5　字数 120 000

1998 年 2 月第 1 版　1998 年 2 月 第 1 次印刷

印数 0 001—20 064

定价 5.30 元

内 容 提 要

本书是在职小学教师进修高师专科小学教育专业教材《高等数学下》的配套书.内容包括行列式与矩阵、线性方程组、向量代数与空间解析几何初步、数域与有限域等四章,每一章由四部分组成:学习要求、内容指导、例题选讲以及自测试题与答案,可供在职小学教师进修高等师范专科高等数学课程时参考.

前　　言

为配合电视教学及学员自学所需，我们根据国家教委师范司制定的小学教师进修高等师范专科小学教育专业教学方案，中央电大所拟定的高等数学课程（理科方向）教学大纲，编写了这本指导书，内容包括行列式与矩阵、线性方程组、向量代数与空间解析几何初步、数域与有限域等.

与高等数学课程学习指导书（上册）相同，本书的每一章都由四个部分组成：学习要求，内容指导，例题选讲，以及自测试题与答案.本书采用国标 GB3100～3102—93（即量和单位的国家标准，1994 年 7 月 1 日实施），一些与教材不同的主要记号被首次引用时，书中作了注释.

我们希望读者阅读本书后，在掌握教材内容的基本概念与技能方面，以及提高空间想象力和抽象思维能力方面有所收益.

书中第八章由朱晓鸽执笔，其余各章及全书统纂由朱铉道完成.限于编者的水平，以及编写时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳切地希望广大读者批评指正，以便今后进一步修改和提高.

编　者

1997.10

责任编辑　高尚华
封面设计　王　雎
责任绘图　杜晓丹
版式设计　焦东立
责任校对　李　红
责任印制　宋克学

目　　录

第七章　行列式与矩阵

学习要求

1. 了解行列式概念与性质.
2. 掌握行列式的计算方法.
3. 会用克拉默[①]法则解线性方程组.
4. 掌握矩阵的加减法、数乘和乘法运算.
5. 了解逆方阵的概念,掌握求逆公式.
6. 掌握初等变换和用初等行变换求逆方阵的方法.

内容指导

行列式与矩阵是重要的数学工具,它们不但在线性代数中是不可缺少的,而且在自然科学、工程技术以及生产实际中都有大量的应用.特别是,随着人类社会向信息化大踏步迈进的今天,这工具越来越显示出重要性.

本章从解二元一次方程组与实际问题出发,引入了行列式与矩阵的有关概念.重点是:掌握行列式的计算与矩阵的各种运算(包括加减法、数乘、乘法、初等变换,以及求逆等).掌握了这些运

---

① 教材用克莱姆.

算，不但为第八，九章的学习打下了基础，而且为进一步运用行列式与矩阵于其它领域创造了条件.

1. 行列式的定义

教材所涉及到的行列式定义有两种：二阶、三阶行列式的对角线展开法；n 阶行列式展开法，这是一种递归定义的方法.

(1) 对角线展开法.

二阶行列式确定一个数值，它等于主对角线(从左上角到右下角的对角线)方向的元素乘积之和，减去次对角线(从右上角到左下角的对角线)方向的元素乘积之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

对于三阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意，对角线展开法对四阶及四阶以上的行列式不适用.

(2) n 阶行列式展开法.

先看三阶行列式.

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，画去第 i 行第 j 列元素 a_{ij} $(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 所在的行和列的元素，余下的元素按原来的次序构成一个二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如,元素 a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由三阶行列式的上述展开式,不难得到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\end{aligned}$$

即一个三阶行列式可以表示成第一行的元素与对应的代数余子式的乘积之和.也就是说,一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义.

如果我们把由单独一个元素 a 组成的行列式看作是 a 本身,并称之为一阶行列式,即 $|a|=a$①,那末二阶行列式实际上也可以由相应的两个一阶行列式来定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

仿此,把四阶行列式定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

① 这里,$|a|$表示行列式,而不是绝对值.

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

在定义了四阶行列式后,可以类似地用 5 个四阶行列式来定义五阶行列式.依此类推,一般地,可用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式.这种定义方法叫做递归定义法.我们用

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个 n 阶行列式,其中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是数.

定义 设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则规定 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中 A_{1j} 为元素 $a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式(它是一个 $n-1$ 阶行列式),即

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= (-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上述定义中的式子

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

称为 n 阶行列式D 的展开式.

用行列式定义,可以计算一些特殊的行列式.例如,计算**下三角形行列式**(主对角线右侧的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0\cdot A_{12}+\cdots+0\cdot A_{1n}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式的值等于主对角线上的元素之积.这个结论在计算行列式时经常用到.

又如,计算

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ 0 & e & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= acfh - adeh - bcfg + bdeg$$

本例表明:对角线展开法只适用于二、三阶行列式,对四阶及四阶以上的行列式失效.

2. 行列式的性质

对于阶数较高的行列式,若根据定义进行计算,其计算量十分庞大.应用下列 n 阶行列式的各性质、推论,可以简化行列式的计算.

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等.

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性.由此可知:行列式中有关行的性质对列也同样成立;反过来也对.因此,下面的各性质,都只提及行.

例 证明:**上三角形行列式**(主对角线左侧的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由性质 1 及上述关于下三角形行列式的结果,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上、下三角形行列式统称为**三角形行列式**.三角形行列式的值等于主对角线上的元素之积.

性质 2 对换行列式中任意两行的位置,行列式的值仅相差一个符号.

推论 若行列式有两行相同,则该行列式等于零.

性质 3 把行列式中某行的所有元素都乘 k,等于用 k 乘该行列式.

推论 1 若行列式中有一行为零,则该行列式等于零.

推论 2 若行列式中有两行成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式中某一行是两组数的和,则此行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数之一为相应行,而其余各行不变.

由性质 4 及性质 3 的推论 2 容易得到下列性质 5.

性质 5 把某一行的元素都乘 k,加到另一行的对应元素上,

行列式的值不变.

利用性质 1、2 及行列式的定义,可以得到行列式按某一行(列)展开的性质:

性质 6 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于其某一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积之和,即按第 i 行展开,

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

或按第 j 列展开,

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

事实上,将 D 的第 i 行逐次与它上一行对换位置,这样经 $i-1$次后第 i 行换到了第一行的位置,而其余各行顺序不变.根据性质 2,这个新行列式乘以$(-1)^{i-1}$后等于 D,再将新行列式按定义(即第一行)展开,得

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i-1}[a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{in}M_{in}] \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{1+k}M_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}{}^{①} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \end{aligned}$$

---

① 这里用到 $\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k$,即 $\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n$,参见教材第 34 页的第 20(1)题.

这就证明了 D 可以按某一行(第 i 行)展开.再由性质 1 知,它也可以按某一列(第 j 列)展开.

推论 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中,某一行(列)的各元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即按行有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{sk}=a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0$$

$$(i\neq s;i,s=1,2,\cdots,n)$$

按列有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kt}=a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0$$

$$(j\neq t;j,t=1,2,\cdots,n)$$

注意,性质 6 及其推论可合写成:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{sk}=\begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i\neq s \end{cases} \quad (i,s=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kt}=\begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j\neq t \end{cases} \quad (j,t=1,2,\cdots,n)$$

顺便指出,对初学本章的学员来说,熟悉下标与$\sum$记号使用是一个难点.但只要仔细观察,做适当的练习,困难定能克服.在用$\sum$表示和式前,先要观察变动的量.例如,和式

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}$$

中,字母 a,A 的第 2 个下标(即列标)是变量,其变化范围从 1 至 n.因此,我们用一个变动的下标 k 表示,$k=1$ 至 n,它将放在记号$\sum$的下方与上方.另外,和式中的每一项将写成 $a_{ik}A_{sk}$.于是,有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{sk}$$

3. 行列式的计算

教材所涉及到的行列式有两类:行列式的全部元素是数字;其部分或全部元素含字符.

基本方法是:用行列式性质,将行列式化为三角形行列式;用性质 6 降阶展开,但展开前先将行列式化为某一行(列)只含一两个非零元素,然后按该行(列)展开.

有时候要根据行列式的构成特点,灵活、综合运用行列式的性质将行列式化简,再用上述两个基本方法.在化简过程中要注意提公因子、拆项以及是否有两行(列)成比例(此时,行列式值为零)等等.

例 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解 变为三角形行列式来计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \text{(第 1 列乘} -1 \text{加到其余各列上)}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\1&1&0&0&\cdots&0\\1&1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&2&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&2&\cdots&n-2\end{vmatrix}\text{(第 2 列乘 }-1\text{ 加到其后各列上)}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\1&1&0&0&\cdots&0\\1&1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=1$$

又如,计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&0&1\\-\frac{1}{3}&0&2&1\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\-1&-1&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&0&1\\-\frac{1}{3}&0&2&1\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\-1&-1&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&1&0&2\\-1&0&6&2\\1&0&1&1\\-3&-2&0&1\end{vmatrix}$$

(从各列提公因子)