

面向**21**世纪高等院校教材

运筹学基础

主 编 仇志余

副主编 李建平 李岸巍



 中国科学技术出版社

面向 21 世纪高等院校教材

运筹学基础

主 编 仇志余

副主编 李建平 李岸巍

江苏工业学院图书馆
藏书章

中国科学技术出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/李岸巍等编著. —北京: 中国科学技术出版社, 2003.2
面向 21 世纪高等院校教材
ISBN 7-5046-3457-3

I. 运... II. 李... III. 运筹学-高等学校-教材 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 010486 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志,未贴防伪标志的为盗版图书。

责任编辑:郑洪炜

封面设计:赵一东

责任校对:凌红霞

责任印制:王 沛

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081

电话:010-62103210 传真:010-62183872

<http://www.kjbooks.com.cn>

科学普及出版社发行部发行

北京国防印刷厂印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:18.5 字数:485 千字

2003 年 2 月第 1 版 2006 年 5 月第 2 次印刷

印数:2001—5000 册 定价:38.00 元

(凡购买本社的图书,如有缺页、倒页、
脱页者,本社发行部负责调换)

前 言

运筹学是一门新兴的交叉学科,也是一种先进的最优化技术。它广泛应用于生产经营、工程技术、科学管理和军事决策等领域,特别是应用于解决企业的生产、计划、设计、分配、管理和决策中的最优化问题。半个世纪以来,运筹学的理论日臻完善,现在运筹学已成为管理现代化的有效工具。

近几年,随着教育的不断深入,许多高等院校开设了运筹学课程。本书在阐述基本概念和基本原理的同时也注重数学上的逻辑性和严密性,特别是注意到了教材本身的应用性、可读性和通俗性。全书以方法——原理——应用为主线,使学生更易理解和接受。

全书共分14章,其中第1章至第4章由王波执笔;第5、第7、第12章由山西戏剧职业学院李玉军执笔;第6章由李岸巍、阮豫红执笔;第8章由仇志余执笔;第9、第10、第13、第14章由李建平执笔;第11章由谢建国执笔。

在编著过程中,我们汲取了大量国内外学者的研究成果,借鉴了大量同类型教材的观点。为此,我们表示感谢。

由于时间仓促和水平有限,差漏之处在所难免,望多指正。

编者:仇志余

2006年3月

作者简介

仇志余 数学教授,硕士生导师。1957年12月生,山东省寿光市人。现任中北大学分校副校长,中国优选法统筹法与经济数学研究会理事,山西省数学会常务理事,山西省管理科学研究会副理事长。自1982年毕业于山东大学数学系以来,一直担任高校数学教学工作,同时从事数学科学研究工作。研究领域主要有常微分方程与泛函微分方程的定性理论和数学在经济、管理科学中的应用等。主持或参与过多个省级和国家级科研项目并通过相应鉴定;多次参加国际国内学术会议,在国际国内重要学术刊物上发表学术论文40余篇,多篇已被ISTP、美国《数学评论》、德国《数学摘评》等收录。主参编已公开出版的“面向21世纪数学规划教材”和教育部“国家级精品课程”配套教材等高校数学教材6套。现承担国家自然科学基金资助课题和“国家级精品课程”的建设与研究等项目。曾三次被评为省部级优秀教师或优秀中青年骨干教师。2003年被评为山西省教学名师;2004年被国家教育部授予“全国优秀教育工作者”称号;2002年和2005年两次获得省级教学成果一等奖;2005年一项科技成果通过省级鉴定,达到国内领先水平。

目 录

前言

1 线性规划的基本知识	1
1.1 线性规划问题的数学模型	1
1.1.1 线性规划问题实例	1
1.1.2 线性规划问题的数学模型	3
1.2 线性规划模型的图解法	3
1.2.1 用图解法求解线性规划模型的一般步骤	4
1.2.2 线性规划模型解的可能结果	5
1.3 线性规划模型的标准型	6
1.3.1 线性规划模型的标准型	6
1.3.2 线性规划模型的标准型的表述形式	6
1.3.3 将线性规划模型转化为标准型	7
1.4 线性规划模型解的基本理论	9
1.4.1 解的基本概念	9
1.4.2 解的性质	11
2 单纯形法	14
2.1 单纯形法的基本思想	14
2.1.1 引例	14
2.1.2 单纯形法的几何意义	17
2.2 最优性检验	17
2.2.1 基本概念	17
2.2.2 最优性检验	18
2.3 单纯形表	19
2.3.1 初始单纯形表	19
2.3.2 单纯形表的计算步骤	20
2.4 人工变量法	24
2.4.1 添加人工变量确定初始可行基的方法	24
2.4.2 大 M 法	25
2.4.3 两阶段法	27
2.5 单纯形法的几种特殊情况	30
2.5.1 主元素列中非正元素不参与 θ 计算的解释	30
2.5.2 对进基变量相持问题的处理	30
2.5.3 对退化与循环问题的处理	31
2.5.4 无穷多解的判定	34
2.5.5 无界解的判定	35
2.6 单纯形法的矩阵描述	36

2.6.1	线性规划模型的标准型的矩阵描述	36
2.6.2	检验数的确定	37
2.6.3	进基变量和离基变量的确定	37
2.6.4	单纯形表的矩阵描述	38
3	线性规划的对偶理论	39
3.1	线性规划的对偶问题	39
3.1.1	问题的提出	39
3.1.2	线性规划的对偶关系	40
3.1.3	对偶问题的基本性质	43
3.2	影子价格的经济解释	45
3.3	对偶单纯形法	45
3.3.1	问题的提出	45
3.3.2	对偶单纯形法的思路	46
3.3.3	对偶单纯形法的计算步骤	46
3.3.4	原始单纯形法与对偶单纯形法的关系	48
3.4	交替单纯形法	49
3.5	灵敏度分析	51
3.5.1	右端项 \mathbf{b} 的灵敏度分析	51
3.5.2	目标函数的价值系数 C 的灵敏度分析	54
3.5.3	约束条件列向量 P_k 的灵敏度分析	55
3.5.4	增加新的变量 x_{n+1} 的灵敏度分析	56
3.5.5	增加新的函数约束的灵敏度分析	56
4	运输问题	57
4.1	运输问题的数学模型	57
4.1.1	问题的提出	57
4.1.2	运输问题的数学模型	58
4.1.3	运输问题的数学模型的特点	59
4.1.4	运输问题的数学模型的表格形式	59
4.2	表上作业法	59
4.2.1	初始方案的确定	60
4.2.2	最优性检验	65
4.2.3	非最优方案的调整	69
4.2.4	无穷多最优解的判定及求解	70
4.3	非平衡运输问题	71
4.3.1	产大于销的运输问题	71
4.3.2	产小于销的运输问题	72
5	整数规划	75
5.1	分枝定界法	75
5.1.1	分枝定界法的主要思路	75
5.1.2	分枝定界法的步骤	76

5.2	割平面法	80
5.2.1	构造割平面方程的方法	81
5.2.2	割平面法的求解过程	82
5.3	0—1 整数规划	84
5.3.1	特殊约束的处理方法	84
5.3.2	隐枚举法	86
5.3.3	0—1 整数规划模型的应用	88
5.4	指派问题	91
5.4.1	指派问题的数学模型	91
5.4.2	匈牙利法的基本原理	91
5.4.3	匈牙利法的计算步骤	92
5.4.4	非标准型指派问题的求解	94
5.4.5	有条件指派问题的求解	96
6	LINDO 应用简介	99
6.1	LINDO 简介	99
6.1.1	线性规划模型的输入	99
6.1.2	LINDO 软件对模型的要求及常用默认设置	100
6.2	使用 LINDO 求解线性规划模型	100
6.2.1	线性规划模型的输入	100
6.2.2	线性规划模型的运算	100
6.2.3	对报告窗口中运算结果的解释	101
6.3	使用 LINDO 输出线性规划模型的最优单纯形表	102
6.3.1	使用 LINDO 输出线性规划模型的最优单纯形表	102
6.3.2	最优单纯形表报告	102
6.3.3	对最优单纯形表报告的解释	103
6.4	使用 LINDO 对线性规划模型进行灵敏度分析	103
6.4.1	使用 LINDO 对线性规划模型进行灵敏度分析	103
6.4.2	灵敏度分析报告	104
6.4.3	对灵敏度分析报告的解释	104
6.5	使用 LINDO 求解整数规划模型	105
6.5.1	使用 LINDO 求解整数规划模型	105
6.5.2	使用 LINDO 求解 0—1 整数规划模型	106
6.6	使用 LINDO 求解模型时解的判定	108
6.6.1	无穷多解	108
6.6.2	无界解	109
6.6.3	无可行解	110
7	线性目标规划	111
7.1	线性目标规划问题的数学模型	111
7.1.1	问题的提出	111
7.1.2	目标规划的基本概念	112

7.1.3	线性目标规划的数学模型	113
7.2	线性目标规划模型的图解法	114
7.3	线性目标规划模型的序贯式解法	118
7.4	线性目标规划模型的单纯形解法	122
8	图与网络分析	128
8.1	图的基本概念	128
8.1.1	图	128
8.1.2	图的矩阵表示	132
8.1.3	网络	134
8.2	树	134
8.2.1	树的基本概念	134
8.2.2	最小树的求法	135
8.3	最短路问题	137
8.3.1	最短路问题的 Dijkstra 算法	137
8.3.2	最短路问题的矩阵算法	142
8.3.3	含负权的有向图最短路的算法	144
8.4	最大流问题	145
8.4.1	问题的提出	145
8.4.2	基本概念	146
8.4.3	最大流问题的算法	148
8.5	最小费用最大流问题	151
8.5.1	最小费用最大流问题的数学模型	151
8.5.2	最小费用最大流问题的算法	152
9	存贮论	156
9.1	引言	156
9.1.1	存贮问题的基本要素	156
9.1.2	与存贮问题有关的基本费用项目	157
9.2	经济订货批量的存贮模型	157
9.2.1	基本的 EOQ(经济订货批量)模型	157
9.2.2	一般的 EOQ 模型	158
9.2.3	订货提前期为零、允许缺货的 EOQ 模型	161
9.2.4	生产需一定时间、不允许缺货的 EOQ 模型	161
9.3	具有约束条件的存贮模型	162
9.4	动态的存贮模型	164
9.5	单时期的随机存贮模型	167
9.6	多时期的随机存贮模型	170
10	对策论	174
10.1	对策论概述	174
10.2	二人零和对策的模型	175
10.3	对策问题的解和具有鞍点的对策	176

10.3.1	对策问题的解和对策值	176
10.3.2	最大最小(max min)和最小最大(min max)准则	177
10.3.3	具有鞍点的对策	178
10.4	优势原则和具有混合策略的对策	179
10.4.1	优势原则	179
10.4.2	用图解法求解具有混合策略的对策	180
10.4.3	用分析法求解具有混合策略的对策	183
10.5	用线性规划求解矩阵对策问题	184
10.6	冲突分析	188
10.6.1	冲突分析的模型	188
10.6.2	稳定性分析	189
10.6.3	应用举例	190
11	质量管理决策	192
11.1	概述	192
11.1.1	质量的含义和概念	192
11.1.2	质量管理	193
11.2	全面质量管理	194
11.2.1	全面质量管理的概念	194
11.2.2	全面质量管理的特点	194
11.2.3	全面质量管理的内容	195
11.2.4	全面质量管理的基础工作	195
11.3	工序质量控制及统计方法	196
11.3.1	排列图、因果图和调查表	196
11.3.2	直方图、分层法和相关图	199
11.3.3	工序能力指数	207
11.3.4	控制图法	210
12	决策理论及方法	218
12.1	决策的基本问题	218
12.1.1	概述	218
12.1.2	经济决策的作用	219
12.1.3	经济决策的民主化和科学化	220
12.1.4	决策的原则	220
12.1.5	决策的分类	222
12.1.6	决策的程序	224
12.2	确定性决策	226
12.2.1	什么是确定性决策	226
12.2.2	几种常用的具体模型选优决策法	226
12.2.3	线性规划决策法	233
12.3	非确定性决策	235
12.3.1	最大最小决策准则	235

12.3.2	最大最大决策准则	236
12.3.3	赫威斯决策准则	237
12.3.4	最小最大后悔值决策准则	238
12.3.5	等概率决策准则	238
12.3.6	决策准则的评价与选择	239
12.4	几种常见的风险型决策法	239
12.4.1	什么是风险型决策	239
12.4.2	期望损益决策法	240
12.4.3	边际分析决策法	243
12.4.4	计算各方案决策树法	245
12.4.5	矩阵决策法	249
12.4.6	敏感性分析	251
13	效用理论	254
13.1	效用的概念	254
13.1.1	效用的定义	254
13.1.2	效用的公理	254
13.1.3	效用测定简法	255
13.2	偏爱结构和效用函数	256
13.2.1	偏爱结构	256
13.2.2	效用函数	257
13.3	效用函数的构造方法	258
13.4	效用决策模式	261
14	决策的可行性研究	264
14.1	可行性研究的重要性	264
14.1.1	可行性研究是方案优选的前提	264
14.1.2	可行性研究是提高投资效果的重要环节	265
14.1.3	可行性研究是促进现代化建设的重要条件	265
14.2	可行性研究的复杂性	266
14.2.1	可行性研究的四个阶段	266
14.2.2	可行性研究的内容	267
14.2.3	可行性研究的经济评价	267
14.2.4	可行性研究的实例	269
14.3	可行性研究的相对性	271
14.3.1	质量问题	271
14.3.2	时间问题	271
14.3.3	费用问题	272
	附录:习题	273
	参考文献	285

1 线性规划的基本知识

线性规划(Linear Programming 简称 LP)是运筹学中规划理论的重要组成部分。线性规划研究的内容主要分为两类:一类是在现有的资源状况下,如何统筹安排,使有限的资源创造最大的价值;另一类是在目标确定的前提下,如何合理安排,使得用最少的资源达到目标。

1.1 线性规划问题的数学模型

线性规划是规划论中发展最为完善的分支之一。线性规划能够行之有效地解决很多实际问题,在各个领域得到广泛而深入的应用。

1.1.1 线性规划问题实例

【例题 1.1】(生产组织问题)某工厂用 A、B、C 三种原料加工生产甲、乙两种机器零件。已知,生产甲零件分别需要 A、B、C 三种原料为 5kg、4kg 和 2kg,获利 120 元;生产乙零件分别需要 A、B、C 三种原料为 4kg、5kg 和 5kg,获利 210 元。目前,该厂库存 A、B、C 三种原料分别为 2400kg、2000kg 和 1800kg。若仅用库存原料生产甲、乙两种机器零件,问该如何安排生产甲、乙两种机器零件的产量才能使得该厂获利最大?

显然,该厂可以按照不同的比例安排甲、乙两种机器零件的产量。但是,在安排生产时,必须在保证资源的使用量不超过库存资源的前提条件下,选择使得该厂获利最大的方案。

根据对问题的分析,设生产甲机器零件 x_1 件,生产乙机器零件 x_2 件。

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 2400 & (A \text{ 原料的限制}) \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 2000 & (B \text{ 原料的限制}) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1800 & (C \text{ 原料的限制}) \end{cases}$$

其中,不等式称为函数约束。

另外,在安排生产时零件的个数不能为负值(实际应该为正整数),即 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,称为非负性约束。 $x_j, j=1,2$ 称为决策变量或变量。将非负性约束与函数约束结合共同构成不等式组

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 2400 & (A \text{ 原料的限制}) \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 2000 & (B \text{ 原料的限制}) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1800 & (C \text{ 原料的限制}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (\text{零件的个数不能为负值}) \end{cases}$$

上述不等式组是在安排生产时必须保证的前提条件,称为约束条件。一般用 s. t 表示,即“受约束于”(subject to 或 subject that)的意思。

在满足约束的前提下,用 $\max f = 120x_1 + 210x_2$ 表示该厂获利最大,称为目标函数。

综上所述,【例题 1.1】的数学模型为

目标函数: $\max f = 120x_1 + 210x_2$

$$\text{约束条件: s. t } \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 2400 & (\text{函数约束}) \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 2000 & (\text{函数约束}) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1800 & (\text{函数约束}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (\text{非负性约束}) \end{cases}$$

【例题 1.2】(运输问题)某超市货物配送中心有 3t、2t 和 5t 食用油分别存放在 A_i $i=1,2,3$ 三个仓库。现需要将三个仓库的食用油运送到 B_j $j=1,2,3,4$ 四个超市。四个超市各需要 1t、3t、2t 和 4t。运输费用见表 1.1,问如何调度才能使运费最省?

表 1.1

(单价:10 元/t)

超 市 仓 库	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	4	8
A_2	1	2	4	1
A_3	3	2	1	4

这个问题实际上是一个平衡运输问题。

每一个仓库可以向任何一个超市运输食用油,但是运输的数量不仅受每一个仓库的库存数量的限制,而且受到每一个超市的需求数量的制约,在满足种种条件限制的情况下,运输费用最少的运输方案是要求达到的目标。

设需要从 A_i 仓库运送到 B_j 超市的食用油数量为 x_{ij} t。

$$\min f = 3x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} + 4x_{34}$$

$$\text{s. t } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3 & (A_1 \text{ 仓库的库存限制}) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 2 & (A_2 \text{ 仓库的库存限制}) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5 & (A_3 \text{ 仓库的库存限制}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 & (B_1 \text{ 超市的需求限制}) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3 & (B_2 \text{ 超市的需求限制}) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2 & (B_3 \text{ 超市的需求限制}) \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4 & (B_4 \text{ 超市的需求限制}) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4 & (\text{非负约束}) \end{cases}$$

【例题 1.3】(套裁下料问题)某钢结构厂要生产由 100 根 3.5m、200 根 2.4m 和 50 根 1.8m 的钢管组成的结构架,若统一用 6m 的钢管原料下料,最少需要多少根钢管原料?

在实际生产中,这类问题应用非常广泛。若每一根钢管原料裁一种规格的钢管,显然很浪费,只有将所有要下料的钢管的数量和规格作系统性的整体考虑才能找到最优方案,达到充分地使用原材料的目的。

在优先考虑大规格用料的前提下,每一根 6m 的钢管原料可以有 5 种套裁方式,见表 1.2。

表 1.2

	方案 I	方案 II	方案 III	方案 IV	方案 V
3.5m	1	1	0	0	0
2.4m	1	0	2	1	0
1.8m	0	1	0	2	3
剩余	0.1m	0.7m	1.2m	0m	0.6m

设:用第 j 种方案下料 x_j , $j=1,2,3,4,5$ 根(实际应该为正整数)。

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s. t } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 200 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 \geq 50 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,4,5 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

根据对上述线性规划问题的分析,归纳线性规划问题的数学模型特点:

①可以定义一组变量 x_1, x_2, \dots, x_n 。变量 x_1, x_2, \dots, x_n 往往表示一组备选方案,并且要求变量非负。

②存在一定的约束条件。这些约束条件是若干个决策变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性等式或不等式。

③有唯一一个期望达到的最优目标。该目标是决策变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性函数。

具有以上三个特点的一类问题称为线性规划问题。

上述三点也是建立线性规划问题的数学模型的一般过程。线性规划问题的数学模型简称为线性规划模型。

线性规划模型的一般形式:

$$\begin{aligned} \text{opt } f &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s. t } \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq = \geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq = \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq = \geq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,3,\dots,n \end{cases} \end{aligned}$$

其中, opt(optimize)“最优化”表示目标函数 f 可以取“最大化”max,也可以取“最小化”min。
 $\leq = \geq$ 表示函数约束可以是“小于”、“等于”或者“大于”不等式。

1.2 线性规划模型的图解法

对于两个变量的线性规划模型,可以通过作图的方法对其求解。图解法在运筹学实践中意义不大。但是,通过对图解法的学习,有助于了解线性规划模型求解的基本原理。

【例题 1.4】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\begin{aligned} \max f &= 120x_1 + 210x_2 \\ \text{s. t} &\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 2400 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.1 用图解法求解线性规划模型的一般步骤

(1) 画出平面直角坐标系

由于变量的非负约束 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, 在以 x_1 为横坐标轴、 x_2 为纵坐标轴的平面直角坐标系中, 画出第一象限即可。

(2) 确定可行域

【例题 1.4】中的每一个函数约束条件都代表以该约束条件对应的等式为边界的半个平面。如函数约束 $5x_1 + 4x_2 \leq 2400$ 代表以 $5x_1 + 4x_2 = 2400$ 为边界的左下方的半个平面。

所有约束条件对应的半平面的交集为一个多边形 $OABCD$ 。在该区域上的每一点都满足约束条件, 都是线性规划模型的解。该区域是线性规划模型解的集合, 称为可行域。

(3) 确定目标函数的等值线族的梯度方向

对于目标函数 $\max f = 120x_1 + 210x_2$, 可以视为平行于直线 $l: 120x_1 + 210x_2 = 0$ 的一族直线。将直线 $l: 120x_1 + 210x_2 = 0$ 上的每一点 (x_1, x_2) 代入目标函数, 目标函数值相同, 称直线 l 为等值线, 与其平行的一族直线称为等值线族。

等值线族的梯度 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^T = (120, 210)^T$, ∇f 的梯度方向为 \mathbf{t} , 在平面直角坐标系中表明 \mathbf{t} 。

(4) 求出线性规划模型的最优解

沿 \mathbf{t} 方向平移直线 l , 当移动到 B 点时, 目标函数 f 在可行域边界实现最大化。 $B(100, 320)$ 是线性规划模型的最优解, 最优值 $f = 120x_1 + 210x_2 = 120 \times 100 + 210 \times 320 = 79200$ 。见图 1.1。

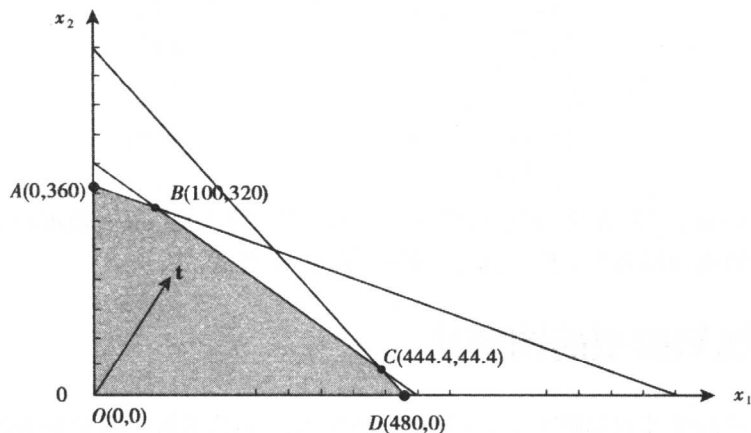


图 1.1

1.2.2 线性规划模型解的可能结果

求解线性规划模型时可能会产生几种结果。从存在解与否的角度分析,可能会产生有解和无解两种情况。对于有解的情况,根据解的数量又可分为唯一解和无穷多解两种结果;对于无解的情况,根据产生无解的原因可分为无界解和无可行解两种结果。

(1) 唯一解

在【例题 1.4】中,线性规划模型只有唯一解 $X = (100, 320)^T$ 能够使得目标函数达到最优化要求,其对应的目标函数值为 79200 元。

(2) 无穷多解

【例题 1.5】在【例题 1.4】中,若目标函数改为 $\max f = 120x_1 + 150x_2$,其他条件不变,目标函数的等值线与 $4x_1 + 5x_2 \leq 2000$ 的边界线平行。线段 BC 上的每一点都是该线性规划模型可行域上的点,这些点都能够使得目标函数取得相同的最大值。即存在无穷多的解能够使得目标函数达到最优化要求。见图 1.2。

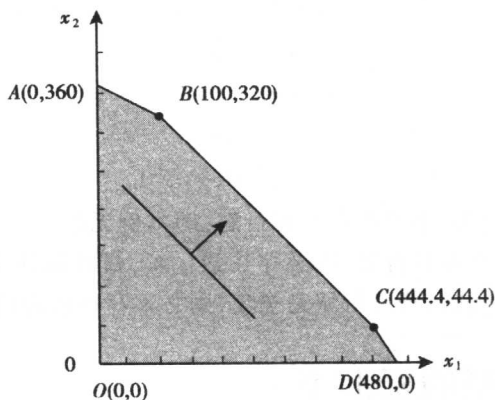


图 1.2

(3) 无界解

【例题 1.6】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\begin{aligned} \max f &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t } &\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

该模型的可行域是无界集,目标函数的等值线沿目标函数的梯度方向移动,不可能得到最大值的等值线,因此本例无最优解。见图 1.3。

并不是所有无界的可行域一定无解。若本题目标函数是最小化问题,显然可以得到最优解 $X^* = (0, 0)^T$,最优值 $f^* = 0$ 。

(4) 无可行解

若线性规划模型无可行域,显然线性规划模型就无解,这种结果称为无可行解。

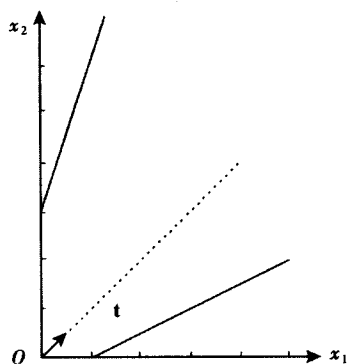


图 1.3

【例题 1.7】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\begin{aligned} \max f &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t } &\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

该模型的约束条件为空集,不可能存在可行解,即本例无解。

综上所述,若可行域非空并且有界,则必存在最优解,最优解的个数唯一或无穷多;若可行域非空但无界,未必存在最优解;若可行域是空集,则必不存在最优解。

1.3 线性规划模型的标准型

1.3.1 线性规划模型的标准型

线性规划模型中目标函数有可能要求“最大化”,也有可能要求“最小化”;每一个函数约束都有可能 $<$ 、 \leq 、 $=$ 、 \geq 、 $>$ 等五种情况;决策变量可能是非负,也有可能无要求……鉴于线性规划模型形式的多样性给线性规划模型的研究带来的诸多不便,规定具有以下特点的一种线性规划模型称为线性规划模型的标准型。

- ① 目标函数要求为“最大化”。
- ② 每个函数约束都为等式。
- ③ 决策变量都非负。

1.3.2 线性规划模型的标准型的表述形式

(1) 一般形式

$$\max f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$