面向21世纪高等院校教材

运筹学基础

主　编　仉志余

副主编　李建平　李岸巍

中国科学技术出版社

面向21世纪高等院校教材

运筹学基础

主　编　仉志余
副主编　李建平　李岸巍

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/李岸巍等编著．—北京：中国科学技术出版社，2003.2
面向21世纪高等院校教材
ISBN 7-5046-3457-3

Ⅰ．运…　Ⅱ．李…　Ⅲ．运筹学-高等学校-教材　Ⅳ．022

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第010486号

责任编辑：郑洪炜
封面设计：赵一东
责任校对：凌红霞
责任印制：王　沛

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街16号　邮政编码：100081
电话：010-62103210　传真：010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京国防印刷厂印刷
*
开本：787毫米×1092毫米　1/16　印张：18.5　字数：485千字
2003年2月第1版　2006年5月第2次印刷
印数：2001—5000册　定价：38.00元

前　言

运筹学是一门新兴的交叉学科，也是一种先进的最优化技术。它广泛应用于生产经营、工程技术、科学管理和军事决策等领域，特别是应用于解决企业的生产、计划、设计、分配、管理和决策中的最优化问题。半个世纪以来，运筹学的理论日臻完善，现在运筹学已成为管理现代化的有效工具。

近几年，随着教育改革的不断深入，许多高等院校开设了运筹学课程。本书在阐述基本概念和基本原理的同时也注重数学上的逻辑性和严密性，特别是注意到了教材本身的应用性、可读性和通俗性。全书以方法——原理——应用为主线，使学生更易理解和接受。

全书共分 14 章，其中第 1 章至第 4 章由王波执笔；第 5、第 7、第 12 章由山西戏剧职业学院李玉军执笔；第 6 章由李岸巍、阮豫红执笔；第 8 章由仉志余执笔；第 9、第 10、第 13、第 14 章由李建平执笔；第 11 章由谢建国执笔。

在编著过程中，我们汲取了大量国内外学者的研究成果，借鉴了大量同类型教材的观点。为此，我们表示感谢。

由于时间仓促和水平有限，差漏之处在所难免，望多指正。

编者：仉志余

2006 年 3 月

作者简介

仉志余　数学教授，硕士生导师。1957年12月生，山东省寿光市人。现任中北大学分校副校长，中国优选法统筹法与经济数学研究会理事，山西省数学会常务理事，山西省管理科学研究会副理事长。自1982年毕业于山东大学数学系以来，一直担任高校数学教学工作，同时从事数学科学研究工作。研究领域主要有常微分方程与泛函微分方程的定性理论和数学在经济、管理科学中的应用等。主持或参与过多个省级和国家级科研项目并通过相应鉴定；多次参加国际国内学术会议，在国际国内重要学术刊物上发表学术论文40余篇，多篇已被ISTP、美国《数学评论》、德国《数学摘评》等收录。主参编已公开出版的“面向21世纪数学规划教材”和教育部“国家级精品课程”配套教材等高校数学教材6套。现承担国家自然科学基金资助课题和“国家级精品课程”的建设与研究等项目。曾三次被评为省部级优秀教师或优秀中青年骨干教师。2003年被评为山西省教学名师；2004年被国家教育部授予“全国优秀教育工作者”称号；2002年和2005年两次获得省级教学成果一等奖；2005年一项科技成果通过省级鉴定，达到国内领先水平。

目　　录

1　线性规划的基本知识

线性规划(Linear Programming 简称 LP)是运筹学中规划理论的重要组成部分。线性规划研究的内容主要分为两类:一类是在现有的资源状况下,如何统筹安排,使有限的资源创造最大的价值;另一类是在目标确定的前提下,如何合理安排,使得用最少的资源达到目标。

1.1　线性规划问题的数学模型

线性规划是规划论中发展最为完善的分支之一。线性规划能够行之有效地解决很多实际问题,在各个领域得到广泛而深入的应用。

1.1.1　线性规划问题实例

【例题 1.1】(生产组织问题)某工厂用 A、B、C 三种原料加工生产甲、乙两种机器零件。已知,生产甲零件分别需要 A、B、C 三种原料为 5kg、4kg 和 2kg,获利 120 元;生产乙零件分别需要 A、B、C 三种原料为 4kg、5kg 和 5kg,获利 210 元。目前,该厂库存 A、B、C 三种原料分别为 2400kg、2000kg 和 1800kg。若仅用库存原料生产甲、乙两种机器零件,问该如何安排生产甲、乙两种机器零件的产量才能使得该厂获利最大?

显然,该厂可以按照不同的比例安排甲、乙两种机器零件的产量。但是,在安排生产时,必须在保证资源的使用量不超过库存资源的前提条件下,选择使得该厂获利最大的方案。

根据对问题的分析,设生产甲机器零件 x_1 件,生产乙机器零件 x_2 件。

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\leqslant 2400 & (A\text{ 原料的限制}) \\ 4x_1+5x_2\leqslant 2000 & (B\text{ 原料的限制}) \\ 2x_1+5x_2\leqslant 1800 & (C\text{ 原料的限制}) \end{cases}$$

其中,不等式称为函数约束。

另外,在安排生产时零件的个数不能为负值(实际应该为正整数),即 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$,称为非负性约束。$x_{j\ \ j=1,2}$ 称为决策变量或变量。将非负性约束与函数约束结合共同构成不等式组

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\leqslant 2400 & (A\text{ 原料的限制}) \\ 4x_1+5x_2\leqslant 2000 & (B\text{ 原料的限制}) \\ 2x_1+5x_2\leqslant 1800 & (C\text{ 原料的限制}) \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 & (\text{零件的个数不能为负值}) \end{cases}$$

上述不等式组是在安排生产时必须保证的前提条件,称为约束条件。一般用 s.t 表示,即“受约束于”(subject to 或 subject that)的意思。

在满足约束的前提下,用 $\max f=120x_1+210x_2$ 表示该厂获利最大,称为目标函数。

综上所述,【例题 1.1】的数学模型为

目标函数：$\max f = 120x_1 + 210x_2$

约束条件：$\text{s.t}\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leqslant 2400 & \text{（函数约束）} \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 2000 & \text{（函数约束）} \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 1800 & \text{（函数约束）} \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 & \text{（非负性约束）} \end{cases}$

【**例题 1.2**】（运输问题）某超市货物配送中心有 3t、2t 和 5t 食用油分别存放在 $A_i \ _{i=1,2,3}$ 三个仓库。现需要将三个仓库的食用油运送到 $B_j \ _{j=1,2,3,4}$ 四个超市。四个超市各需要 1t、3t、2t 和 4t。运输费用见表 1.1，问如何调度才能使运费最省？

表 1.1 （单价：10 元/t）

超市 / 仓库	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	4	8
A_2	1	2	4	1
A_3	3	2	1	4

这个问题实际上是一个平衡运输问题。

每一个仓库可以向任何一个超市运输食用油，但是运输的数量不仅受每一个仓库的库存数量的限制，而且受到每一个超市的需求数量的制约，在满足种种条件限制的情况下，运输费用最少的运输方案是要求达到的目标。

设需要从 A_i 仓库运送到 B_j 超市的食用油数量为 x_{ij} t。

$$\min f = 3x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} + 4x_{34}$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3 & \text{（}A_1\text{ 仓库的库存限制）} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 2 & \text{（}A_2\text{ 仓库的库存限制）} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5 & \text{（}A_3\text{ 仓库的库存限制）} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 & \text{（}B_1\text{ 超市的需求限制）} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3 & \text{（}B_2\text{ 超市的需求限制）} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2 & \text{（}B_3\text{ 超市的需求限制）} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4 & \text{（}B_4\text{ 超市的需求限制）} \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad {}_{i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4} & \text{（非负约束）} \end{cases}$$

【**例题 1.3**】（套裁下料问题）某钢结构厂要生产由 100 根 3.5m、200 根 2.4m 和 50 根 1.8m 的钢管组成的结构架，若统一用 6m 的钢管原料下料，最少需要多少根钢管原料？

在实际生产中，这类问题应用非常广泛。若每一根钢管原料裁一种规格的钢管，显然很浪费，只有将所有要下料的钢管的数量和规格作系统性的整体考虑才能找到最优方案，达到充分合理地使用原材料的目的。

在优先考虑大规格用料的前提下，每一根 6m 的钢管原料可以有 5 种套裁方式，见表 1.2。

表 1.2

	方案Ⅰ	方案Ⅱ	方案Ⅲ	方案Ⅳ	方案Ⅴ
3.5m	1	1	0	0	0
2.4m	1	0	2	1	0
1.8m	0	1	0	2	3
剩余	0.1m	0.7m	1.2m	0m	0.6m

设:用第 j 种方案下料 $x_{j\quad j=1,2,3,4,5}$根(实际应该为正整数)。

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geqslant 200 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 \geqslant 50 \\ x_j \geqslant 0 \quad {\scriptstyle j=1,2,3,4,5} \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

根据对上述线性规划问题的分析,归纳线性规划问题的数学模型特点:

①可以定义一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 往往表示一组备选方案,并且要求变量非负。

②存在一定的约束条件。这些约束条件是若干个决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性等式或不等式。

③有唯一一个期望达到的最优目标。该目标是决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数。

具有以上三个特点的一类问题称为线性规划问题。

上述三点也是建立线性规划问题的数学模型的一般过程。线性规划问题的数学模型简称为线性规划模型。

线性规划模型的一般形式:

$$\text{opt } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant = \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant = \geqslant b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant = \geqslant b_m \\ x_j \geqslant 0 \quad {\scriptstyle j=1,2,3,\cdots,n} \end{cases}$$

其中,opt(optimize)"最优化"表示目标函数 f 可以取"最大化"max,也可以取"最小化"min。$\leqslant = \geqslant$表示函数约束可以是"小于"、"等于"或者"大于"不等式。

1.2 线性规划模型的图解法

对于两个变量的线性规划模型,可以通过作图的方法对其求解。图解法在运筹学实践中意义不大。但是,通过对图解法的学习,有助于了解线性规划模型求解的基本原理。

【**例题 1.4**】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\max\ f = 120x_1 + 210x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}5x_1 + 4x_2 \leqslant 2400\\4x_1 + 5x_2 \leqslant 2000\\2x_1 + 5x_2 \leqslant 1800\\x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

1.2.1 用图解法求解线性规划模型的一般步骤

(1)画出平面直角坐标系

由于变量的非负约束$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$,在以 x_1 为横坐标轴、x_2 为纵坐标轴的平面直角坐标系中,画出第一象限即可。

(2)确定可行域

【例题 1.4】中的每一个函数约束条件都代表以该约束条件对应的等式为边界的半个平面。如函数约束 $5x_1 + 4x_2 \leqslant 2400$ 代表以 $5x_1 + 4x_2 = 2400$ 为边界的左下方的半个平面。

所有约束条件对应的半平面的交集为一个多边形 $OABCD$。在该区域上的每一点都满足约束条件,都是线性规划模型的解。该区域是线性规划模型解的集合,称为可行域。

(3)确定目标函数的等值线族的梯度方向

对于目标函数 $\max\ f = 120x_1 + 210x_2$,可以视为平行于直线 l:$120x_1 + 210x_2 = 0$ 的一族直线。将直线 l:$120x_1 + 210x_2 = 0$ 上的每一点(x_1, x_2)代入目标函数,目标函数值相同,称直线 l 为等值线,与其平行的一族直线称为等值线族。

等值线族的梯度 $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}} = (120, 210)^{\mathrm{T}}$,$\nabla f$ 的梯度方向为 $\mathbf{t}$,在平面直角坐标系中标明 $\mathbf{t}$。

(4)求出线性规划模型的最优解

沿 $\mathbf{t}$ 方向平移直线 l,当移动到 B 点时,目标函数 f 在可行域边界实现最大化。$B(100, 320)$是线性规划模型的最优解,最优值 $f = 120x_1 + 210x_2 = 120 \times 100 + 210 \times 320 = 79200$。见图 1.1。

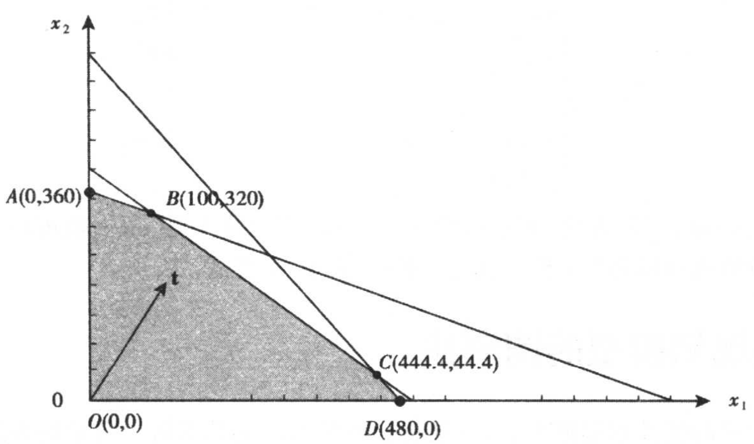

图 1.1

1.2.2 线性规划模型解的可能结果

求解线性规划模型时可能会产生几种结果。从存在解与否的角度分析，可能会产生有解和无解两种情况。对于有解的情况，根据解的数量又可分为唯一解和无穷多解两种结果；对于无解的情况，根据产生无解的原因可分为无界解和无可行解两种结果。

(1)唯一解

在【例题 1.4】中，线性规划模型只有唯一解 $\mathbf{X}=(100,320)^{\mathrm{T}}$ 能够使得目标函数达到最优化要求，其对应的目标函数值为 79200 元。

(2)无穷多解

【例题 1.5】在【例题 1.4】中，若目标函数改为 $\max\ f=120x_1+150x_2$，其他条件不变，目标函数的等值线与 $4x_1+5x_2\leqslant 2000$ 的边界线平行。线段 BC 上的每一点都是该线性规划模型可行域上的点，这些点都能够使得目标函数取得相同的最大值。即存在无穷多的解能够使得目标函数达到最优化要求。见图 1.2。

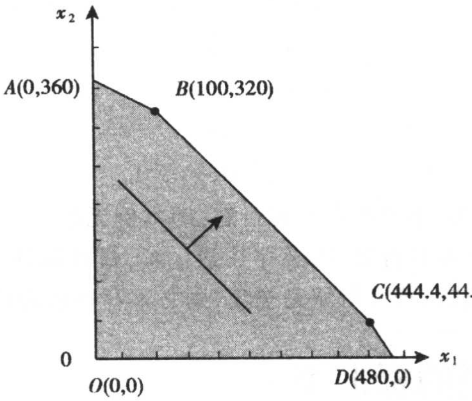

图 1.2

(3)无界解

【例题 1.6】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\max\ f=x_1+x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}-3x_1+x_2\leqslant 6\\ x_1-2x_2\leqslant 2\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

该模型的可行域是无界集，目标函数的等值线沿目标函数的梯度方向移动，不可能得到最大值的等值线，因此本例无最优解。见图 1.3。

并不是所有无界的可行域一定无解。若本题目标函数是最小化问题，显然可以得到最优解 $X^*=(0,0)^{\mathrm{T}}$，最优值 $f^*=0$。

(4)无可行解

若线性规划模型无可行域，显然线性规划模型就无解，这种结果称为无可行解。

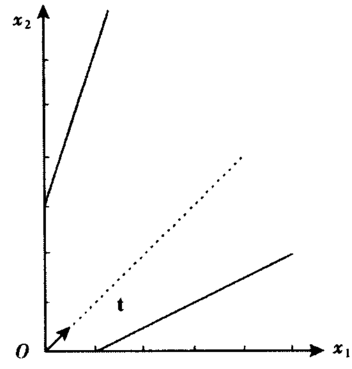

图 1.3

【例题 1.7】用图解法求解下列线性规划模型。

$$\max\ f=x_1+x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1+5x_2\leqslant 10\\3x_1+2x_2\leqslant 6\\x_1\geqslant 4\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

该模型的约束条件为空集,不可能存在可行解,即本例无解。

综上所述,若可行域非空并且有界,则必存在最优解,最优解的个数唯一或无穷多;若可行域非空但无界,未必存在最优解;若可行域是空集,则必不存在最优解。

1.3 线性规划模型的标准型

1.3.1 线性规划模型的标准型

线性规划模型中目标函数有可能要求“最大化”,也有可能要求“最小化”;每一个函数约束都有可能有$<$、$\leqslant$、$=$、$\geqslant$、$>$等五种情况;决策变量可能是非负,也有可能无要求……鉴于线性规划模型形式的多样性给线性规划模型的研究带来的诸多不便,规定具有以下特点的一种线性规划模型称为线性规划模型的标准型。

①目标函数要求为“最大化”。

②每个函数约束都为等式。

③决策变量都非负。

1.3.2 线性规划模型的标准型的表述形式

(1)一般形式

$$\max\ f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$