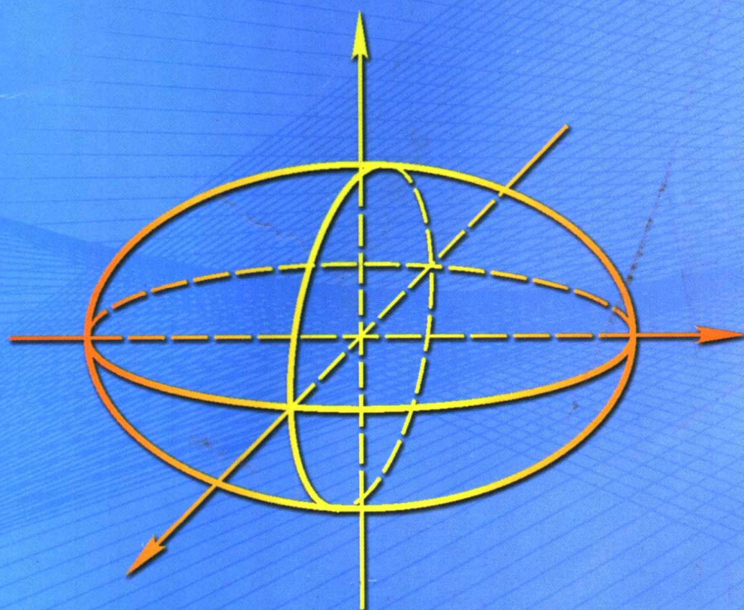
College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

# 医用高等数学
# 学习指导与习题解析


祝国强　主编

王南乡　郭东星　杭国明　副主编


高等教育出版社

Higher Education Press

大学数学学习辅导丛书

# 医用高等数学

## 学习指导与习题解析


祝国强 主 编

王南乡 郭东星 杭国明 副主编

编 者(按章节顺序)

张 勤 东南大学
张世强 重庆医科大学
王南乡 江苏大学
薛金友 江苏大学
郭东星 山西医科大学
李建明 山西医科大学
祝国强 第二军医大学
滕海英 第二军医大学
杭国明 复旦大学
乐经良 上海交通大学



高等教育出版社

## 内容简介

本书是配合乐经良、祝国强等编著的《医用高等数学》教材而编写的辅导教材。全书包括函数与极限，导数与微分，不定积分，定积分及其应用，微分方程，多元函数微积分，概率论初步及线性代数基础等共八章。每章由基本要求、内容提要、典型例题分析、配套教材习题全解和自测题等五部分组成。该书完全与教材同步，书中选用的例题覆盖面广、题型多，有一定的典型性、针对性和启发性。在解题前后增加了解题提示和评注，指出了解题思路、值得注意的地方和易犯的错误，旨在帮助读者深入理解基本概念，提高解决较为复杂的综合性问题的能力。每章末还备有自测题，可供读者自我测试。

本书可作为高等医药院校高等数学习题课教材和教学参考书，也可供学生复习参考使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

医用高等数学学习指导与习题解析/祝国强主编.
北京:高等教育出版社,2006. 8
ISBN 7 - 04 - 019868 - 1

Ⅰ.医... Ⅱ.祝... Ⅲ.医用数学 - 医学院校 - 教学参考资料 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 088170 号

**策划编辑** 李　蕊　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张　楠　**责任绘图** 黄建英
**版式设计** 王　莹　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010 - 58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 800 - 810 - 0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010 - 58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京明月印务有限责任公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 850×1168　1/16 | **版　　次** | 2006 年 8 月第 1 版 |
| **印　　张** | 15.75 | **印　　次** | 2006 年 8 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 390 000 | **定　　价** | 17.40 元 |



**物料号　19868 - 00**

# 前　言

高等数学是医科大学学生的一门公共基础课程，如果仅仅依靠一本教材，一周有限的几个课时，再加上课后少量的练习，往往很难学好本门课程。为了帮助广大读者学好高等数学这门课程，扩大课堂教学的信息量，提高学生的解题能力，我们根据“医科数学教学基本要求”（讨论稿）及乐经良、祝国强等编著的《医用高等数学》教材为框架，精心编写了这本具有工具书性质的《医用高等数学学习指导与习题解析》。本书按照原教材的章节顺序，分为函数与极限，导数与微分，不定积分，定积分及其应用，微分方程，多元函数微积分，概率论初步及线性代数基础等八章。每章由五部分组成，即

**一、基本要求**　根据“医科数学教学基本要求”（讨论稿）制定，简明扼要，一目了然。

**二、内容提要**　总结该章的基本概念、定理、公式等内容，便于读者抓住重点、要点，具有体系完整、逻辑性强的特点。

**三、典型例题分析**　从相关书籍中，精选了具有代表性、典型性、针对性的例题，配以解题提示和评注，并给出了详尽的分析和解析，不少例题还给出了多种解法。例题内容覆盖全面，重点、难点突出，达到开阔视野、融会贯通，举一反三的目的。

**四、配套教材习题全解**　针对《医用高等数学》教材中的所有习题，我们给出了详尽的解题过程，以方便读者对照和分析。

**五、自测题**　便于读者自我检测，以达到巩固和提高复习的效果。

本书旨在帮助读者迅速而全面地掌握本课程的内容及教材中的重点和难点，达到事半功倍的学习效果。值得提醒的是：解题需要亲自动手，只有通过自身实践，才能逐步积累经验，提高水平。

本书可作为高等医药院校高等数学习题课教材和教学参考书，也可供学生复习参考使用。

本书由上海交通大学景继良教授主审，他提出了许多宝贵而中肯的意见及建议，在此谨表感谢。第二军医大学高慕勤和徐玲玲两位老师参与了全书的整理、校对等工作，谨致谢忱。在编辑出版的过程中，还得到高等教育出版社的热情支持，在此一并致谢。

在编写过程中，本书借鉴了同行们的经验，在此深表谢意。限于编者的学识水平，书中不免有错误和不妥之处，恳请广大读者指正。

编　者

二〇〇六年三月

# 目　录

# 第一章　函数与极限

## 一、基本要求

1. 理解函数的概念,了解基本初等函数、复合函数、分段函数、初等函数的定义,掌握函数复合与分解的方法.

2. 理解极限(包括单侧极限)的描述性定义,掌握极限的四则运算法则.

3. 了解无穷小量的概念,了解无穷小量与无穷大量的关系,掌握无穷小量的性质.

4. 了解两个重要极限$\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\right)$,会利用两个重要极限和无穷小量的性质计算函数的极限.

5. 理解连续与间断的概念,了解闭区间上连续函数的性质.

## 二、内容提要

1. 一元函数的概念

(1) 函数的定义

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量,$D$ 是一个给定的数集,变量 $x$ 在数集 $D$ 中取值. 若对 $x$ 取 $D$ 中的每个值,变量 $y$ 按照一定的规律有确定的值与之对应,则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的**函数**. 记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 $x$ 称为**自变量**,而 $y$ 称为**因变量**,因变量与自变量之间的对应规律称为**函数关系**. 集合 $D$ 称为函数的**定义域**,如果 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一点,也称函数 $f(x)$ **在** $x_0$ **点有定义**. 与自变量的值相对应的因变量的值称为**函数值**,而所有函数值的集合称为函数的**值域**.

构成函数关系的要素有两个:定义域及对应规律.

**分段函数**　在定义域中的不同部分内用不同的解析式表示的函数.

(2) 函数的表示方法

函数常用的表示方法有解析法、图像法和列表法三种.

(3) 复合函数

若变量 $y$ 是变量 $u$ 的函数,变量 $u$ 又是 $x$ 的函数,即

$$y=f(u),\ u=\varphi(x)$$

且 $x$ 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的一部分上取值时所对应的 $u$ 值,函数 $y=f(u)$ 是有定义的,则称 $y$ 是 $x$ 的**复合函数**,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 $u$ 称为**中间变量**.

复合函数的中间变量可以不止一个,但不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

(4) 基本初等函数及初等函数

**基本初等函数:**

**幂函数** $y=x^{\mu}$($\mu$ 是实常数);

**指数函数** $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$);

**对数函数** $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$);

**三角函数** 如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 等;

**反三角函数** 如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

**初等函数** 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的函数.

2. 函数的几种特性

(1) 单调性

对于$(a,b)$内的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,总有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)成立,则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$内**单调增加**(或**单调减少**),而区间$(a,b)$称为函数$f(x)$的**单调增加区间**(或**单调减少区间**).单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**;单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增加函数的图形是沿横轴正向上升的,单调减少函数的图形是沿横轴正向下降的.

(2) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称,如果 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是**偶函数**;如果$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$是**奇函数**.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

(3) 周期性

设函数$f(x)$的定义域为 $D$,如果存在一个不为零的常数 $L$,使得对于任意一个 $x\in D$ 有

$$(x\pm L)\in D \quad \text{且} \quad f(x\pm L)=f(x)$$

恒成立,则称此函数为**周期函数**,$L$ 称为函数$f(x)$的**周期**(通常,周期函数的周期是指它的最小正周期).

(4) 有界性

设函数 $y=f(x)$在定义域 $D$ 内有定义,若存在某个正数 $M$,使得不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

对于定义域 $D$ 内的一切 $x$ 值都成立,则称函数$f(x)$在定义域 $D$ 内是**有界**的.如果这样的正数 $M$ 不存在,则称函数$f(x)$在定义域 $D$ 内是**无界**的.

3. 极限的概念

(1) 当 $x\to\infty$ 时函数$f(x)$的极限

如果自变量 $x$ 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 $A$,则称常数 $A$ 为当 $x\to\infty$ 时函数$f(x)$的**极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty)$$

(2) 当 $x\to x_0$ 时函数$f(x)$的极限

设函数 $y=f(x)$在 $x_0$ 点附近有定义(在 $x_0$ 点可以无定义),若当 $x(x\neq x_0)$无论以怎样的方式趋近于 $x_0$ 时,函数$f(x)$都趋近于常数 $A$,则称常数 $A$ 为当 $x\to x_0$ 时函数$f(x)$的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0)$$

(3) 左极限与右极限

若当 $x$ 从 $x_0$ 的左侧($x<x_0$)趋近于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$,则称 $A$ 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

若当 $x$ 从 $x_0$ 的右侧($x>x_0$)趋近于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$,则称 $A$ 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**右极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A$$

左极限与右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点极限存在的充分必要条件是在该点的左右极限都存在,并且两者相等.

4. 极限的四则运算法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量 $x$ 的同一变化过程中极限分别为 $A$ 和 $B$,即

$$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$$

则

(1) $\lim\,[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\,[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

特别地,

$$\lim[kf(x)]=k\lim f(x)=kA \quad (k\ 为常数)$$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B} \quad (B\neq 0)$.

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

6. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量与无穷大量的概念

**无穷小量** 若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**,简称**无穷小**.

**无穷大量** 若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**,简称**无穷大**,记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

(2) 无穷小量的性质

**性质 1** 有限个无穷小量的和、差、积以及常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

**性质 2** 有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

函数 $f(x)$ 以常数 $A$ 为极限的充分必要条件是

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是在自变量的同一变化过程中的无穷小量.

**无穷小量与无穷大量的关系** 若函数 $f(x)$ 为无穷大量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量;反之,若 $f(x)$($f(x)\neq 0$)是无穷小量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

(3) 无穷小量的阶

设 $\alpha$ 与 $\beta$ 是在自变量的同一个变化过程中的两个无穷小量，在此过程中，如果

① $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 $\alpha$ 是比 $\beta$ **高阶的无穷小量**，记为 $\alpha=o(\beta)$；

② $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=k(k\neq0)$，则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是**同阶无穷小量**，记为 $\alpha=O(\beta)$；

③ $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是**等价无穷小量**，记为 $\alpha\sim\beta$.

7. 函数的连续性

(1) 函数在 $x_0$ 点连续的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点及其附近有定义，若当自变量 $x$ 在 $x_0$ 点的增量 $\Delta x$ 趋于零时，对应的函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点**连续**，并称 $x_0$ 点是函数 $f(x)$ 的**连续点**. 也可定义为：

设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点及其附近有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点**连续**.

(2) 左连续与右连续

**左连续**　函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点及其左侧附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

**右连续**　函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点及其右侧附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

**连续与左右连续的关系**　函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点既左连续又右连续.

(3) 函数在区间连续

**$f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续**　函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内的每一点都连续.

**$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续**　函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续，且在左端点 $a$ 右连续，在右端点 $b$ 左连续.

(4) 间断点及其分类

**间断点**　若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点不连续，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点**间断**，$x_0$ 点为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

**第一类间断点**　若 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 $x_0$ 为**第一类间断点**.

**可去间断点**　若 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称 $x_0$ 为**可去间断点**.

**第二类间断点**　非第一类间断点的间断点.

(5) 连续函数的运算法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x_0$ 点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq0)$ 在 $x_0$ 点连续.

若函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x_0$ 点连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $y=f(u)$ 在 $u_0$ 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x_0$ 点连续.

**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.**

(6) 闭区间上连续函数的性质

**最值定理** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在该区间上必能取到最大值和最小值.

**介值定理** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在两个端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 不相等，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 $c$，在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f(\xi)=c \quad (a<\xi<b)$$

**推论**(根的存在定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$, $f(b)$ 异号，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f(\xi)=0 \quad (a<\xi<b)$$

## 三、典型例题分析

**例 1** 判断下列各组函数是否相等：

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$ 与 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

**解题提示** 当且仅当给定的函数组其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同函数.

**解** (1) 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)\neq g(x)$.

(2) 由于函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对所有 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$，故 $f(x)=g(x)=h(x)$.

**例 2** 求由函数 $f(u)=\begin{cases}u^2, & |u|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{u^2}, & |u|>1\end{cases}$ 与 $g(x)=\ln x$ 复合而成的函数 $f(g(x))$.

**解题提示** 复合函数 $f(g(x))$ 要求 $g(x)$ 的值域必须是 $f(u)$ 的定义域的子集. 因此，首先判断此条件是否成立，若成立，再根据复合函数的定义将 $f(g(x))$ 写成关于 $x$ 的表达式.

**解** 函数 $g(x)$ 的值域和函数 $f(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，故可以复合成 $f(g(x))$.

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln^2 x, & |\ln x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & |\ln x|>1\end{cases}=\begin{cases}\ln^2 x, & \mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & x>\mathrm{e} \text{ 或 } 0<x<\mathrm{e}^{-1}\end{cases}$$

**例 3** 将下列复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商.

(1) $\sin\left(\dfrac{3x-2}{5x+2}\right)$； (2) $\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}$.

**解** (1) $y=\sin u$, $u=\dfrac{3x-2}{5x+2}$；

(2) $y=e^u$, $u=\cos v, v=\sqrt{x}$.

**评注** 对复合函数而言,关键是弄清复合的过程.

**例 4** 求证:函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

**解题提示** 按照奇函数的定义,只要证明$f(-x)=-f(x)$即可.

**证** 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

**例 5** 下列函数在其定义域上是否有界?

(1) $y=\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$; (2) $y=\dfrac{e^x}{2+\cos x}$.

**解** (1) 因为 $|y|=\left|\dfrac{x\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$,所以$y=\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$有界.

(2) 函数$y=\dfrac{e^x}{2+\cos x}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因为 $|y|=\left|\dfrac{e^x}{2+\cos x}\right|\geqslant\dfrac{e^x}{3}$,所以对任意的常数$M(M>0)$,总存在$x\in(-\infty,+\infty)$,使得 $|y(x)|>M$,故$y=\dfrac{e^x}{2+\cos x}$在其定义域上无界.

**例 6** 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

**解题提示** 首先进行适当的化简,去掉分母的零因子,使得极限四则运算法则的条件得以满足.

**解** (1) 约分后用极限的四则运算法则.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

(2) 通分,约分后用极限的四则运算法则.

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-x-2}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1$$

**例 7** 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{x^2+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3}{2x^2+x+1}$.

**解题提示** 先把分子分母同除以分母的最高次幂,使分子、分母都不趋于无穷大,再用极限的四则运算法则.

**解** (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{5}{2}$.

**例 8** 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}$.

**解题提示** 先把分子分母同除以一个函数 $e^x$,使分子、分母都不趋于无穷大,再用极限的四则运算法则.

**解** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2e^{-2x}}{2+3e^{-2x}}=\dfrac{3}{2}$.

**例 9** 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

**解题提示** 先对分子有理化后,去掉分母的零因子,再用极限的四则运算法则.

**解** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\dfrac{1}{3}$.

**评注** 以上极限都是通过化简后再利用极限的四则运算法则计算的,所以在学习过程中要善于总结化简的技巧.

**例 10** 计算极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

**解题提示** 结合三角函数的化简,再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**解** (1) 
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 设 $1-x=u$,则
$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim_{u\to0}u\tan\frac{\pi}{2}(1-u)=\lim_{u\to0}u\cot\frac{\pi}{2}u$$
$$=\lim_{u\to0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\cdot\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}u\right)=\frac{2}{\pi}$$

**例 11** 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x=4$,求常数 $c$.

**解题提示** 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,求出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x$,由此极限值确定 $c$.

**解** 因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{c}{x}\right)^{\frac{-x}{c}\cdot(-c)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^{\frac{x}{c}\cdot c}}=e^{-2c}$$

由题设知 $e^{-2c}=4$,所以 $c=-\ln 2$.

**例 12** 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$.

**解题提示** 利用有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量这个性质.

**解**
$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$
$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$,且 $\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$ 是有界变量,故
$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})=0$$

**例 13** 计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-\ln\sin x)$.

**解题提示** 利用函数的连续性和重要极限.

**解**
$$\lim_{x\to0^+}(\ln x-\ln\sin x)=\lim_{x\to0^+}\ln\frac{x}{\sin x}=\ln 1=0$$

**例 14** 求下列函数的间断点,并判断间断点的类型.

(1) $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ -x-2, & x>1.\end{cases}$

**解题提示** 初等函数在其定义区间内都是连续的,因此,其间断点只能出现在函数无定义的点上;如果分段函数在每一段上都是初等函数,那么间断点只能出现在分点上.

**解** (1) 函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 是初等函数,在 $x=0$ 处 $f(x)$ 无定义,所以 $x=0$ 是其间断点,且为第二类间断点.

(2) 若 $x<1$,则 $f(x)=x^2$ 是初等函数,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内连续. 类似地,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内也连续. 在分点 $x=1$ 处,由于
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x-2)=-3$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$
所以 $x=1$ 是其间断点,且为第一类间断点.

**例 15** 试证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

**解题提示** 利用介值定理.

**证** 令 $F(x)=x\cdot2^x-1$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 又由于 $F(0)=-1<0$,$F(1)=1>0$,由介值定理知,在 $(0,1)$ 之间至少存在一点 $\xi$,使得 $F(\xi)=0$ 成立,即 $\xi\cdot2^{\xi}=1$ 成立,故原结论成立.

## 四、配套教材习题全解

1. 下列各题中的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$, $y=\sqrt{x^2}$;

**解** 因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,与 $y=x$ 的对应规律不相同,所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 不相同.

(2) $y=\lg x^2$, $y=2\lg x$;

**解** 因为 $y=\lg x^2$ 的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数,而 $y=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$ 的实数,所以 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 不相同.

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x^2+y^2=1$.

**解** 因为 $x^2+y^2=1$ 可以写成 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,所以 $x^2+y^2=1$ 与 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是不相同的.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

**解** 由 $\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 得函数 $y$ 的定义域为 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$;

**解** 由 $|x|-x\neq 0$,得 $x<0$,于是函数 $y$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)$.

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

**解** 由 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\16-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 得函数 $y$ 的定义域为 $D=[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

**解** 由 $x+\sqrt{x^2+1}>0$,得函数 $y$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

(5) $y=\dfrac{1}{\lg x}$;

**解** 由 $\begin{cases}x>0\\\lg x\neq 0\end{cases}$ 得函数 $y$ 的定义域为 $D=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(6) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5-x}$.

**解** 由 $\left|\dfrac{x-2}{5-x}\right|\leqslant 1$ 得函数 $y$ 的定义域 $D=\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right]$.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问 $f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(x+a)\,(a>0)$ 的定义域各是什么？

**解** 由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,所以 $f(x^2)$ 中变量 $x^2$ 必须满足 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,于是 $x$ 只能在 $[-1,1]$ 中取值,故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

类似地,对于 $f(\sin x)$,由于 $\sin x$ 必须满足 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

对于 $f(x+a)$,由于 $0\leqslant x+a\leqslant 1$,即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,所以其定义域为 $[-a,1-a]$.

4. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;

**解** 因为

$$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$$

所以 $y$ 是偶函数.

(2) $y=2x^2-x^3$;

**解** 因为

$$f(-x)=2(-x)^2-(-x)^3=2x^2+x^3$$

所以 $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,故 $y$ 既不是偶函数也不是奇函数.

(3) $y=x(x-1)(x+1)$;

**解** 因为

$$f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-f(x)$$

所以 $y$ 是奇函数.

(4) $y=\sin x-\cos x+1$.

**解** 因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$$

所以 $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,故 $y$ 既不是偶函数也不是奇函数.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(2)$,并作函数的图形.

**解** 因为 $x=-2<0$,所以 $f(-2)=-1$;$f(0)=0$;因为 $x=2>0$,所以 $f(2)=2\times 2=4$.(见图1.1)

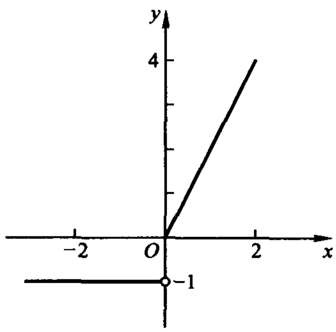



图1.1

6. 设婴儿出生时的体重平均为3 000 g,从出生至6个月,每月长600 g,6个月后至12个月,每月长500 g,试写出婴儿从出生至1岁其体重与月龄的关系式.若一婴儿刚满10个月,试估计其体重.

**解** 在出生起至6个月期间,体重 $W$ 与月龄 $m$ 的关系式为

$$W=3\ 000+600m$$

在出生6个月至12个月期间,体重 $W$ 与月龄 $m$ 的关系式是

$$W=3\ 000+600\times 6+500(m-6)=3\ 600+500m$$

所以,婴儿从出生至1岁其体重与月龄的关系式是

$$W=\begin{cases}3\ 000+600m, & 0\leqslant m\leqslant 6\\ 3\ 600+500m, & 6<m\leqslant 12\end{cases}$$

刚满10个月时的体重为

$$W(10)=3\ 600+500\times 10=8\ 600\ \text{g}$$

7. 将下列复合函数分解成基本初等函数,或基本初等函数的和、差、积、商:

(1) $y=\sin 2x$;

**解** $y=\sin u, u=2x$.

(2) $y=\cos^2 x$;

**解** $y=u^2,\ u=\cos x.$

(3) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

**解** $y=u^{\frac{2}{3}},u=1+x.$

(4) $y=\sin^3\frac{x}{2}$;

**解** $y=u^3,\ u=\sin v,v=\frac{x}{2}.$

(5) $y=\lg\tan\frac{x}{2}$;

**解** $y=\lg u,\ u=\tan v,v=\frac{x}{2}.$

(6) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$;

**解** $y=e^u,\ u=\tan v,v=\frac{1}{x}.$

(7) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$;

**解** $y=\arcsin u,\ u=\frac{1-x}{1+x}.$

(8) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

**解** $y=\ln u,\ u=v^{\frac{1}{2}},v=\frac{1-x}{1+x}.$

或因为 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$,所以 $y=\frac{1}{2}\ln u,\ u=\frac{1-x}{1+x}.$

(9) $y=\sqrt{\ln\frac{1-x}{1+x}}.$

**解** $y=u^{\frac{1}{2}},v=\ln v,\ v=\frac{1-x}{1+x}.$

8. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

**解** 利用极限的四则运算法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

**解** 因为分母的极限为零,所以不能直接用极限的四则运算法则. 但分子分母有公因式 $(x-1)$,故可以先约去这个零因式,再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

**解** 先将分式的分子分母同除以分母的最高次幂,然后取极限,可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

**解**
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

**解**
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+1}{x^3-100x}$;

**解**
$$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+1}{x^3-100x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{100}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{100}{x^2}}=0$$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

**解** 因为 $x\to1$ 时,$\dfrac{1}{1-x}$与$\dfrac{3}{1-x^3}$的极限都不存在,所以先变形,再取极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1$$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

**解** 首先把分子有理化,再取极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

**解** 分子分母同时有理化,再取极限.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}$$