青年数学小丛书

格点和面积

闵嗣鹤

北京市数学会编
中国青年出版社

青年数学小丛书

华罗庚：从杨輝三角談起

段学复：对称

华罗庚：从祖冲之的圓周率談起

吳文俊：力学在几何中的一些应用

史济怀：平均

閔嗣鶴：格点和面积

姜伯駒：一笔画和邮递路线問題

龔　昇：从刘徽割圓談起

格　点　和　面　积

閔　嗣　鶴

*

中国青年出版社出版

（北京东四12条老君堂11号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店

*

787×1092 1/32　1 1/4印張　15,000字

1962年11月北京第1版　1962年11月北京第1次印刷

印数1—20,000

統一书号：13009·208

定价(6)一角四分

內 容 提 要

一张方格紙，上面画着縱橫两組平行綫，相邻平行綫之間的距离都相等，这样两組平行綫的交点，就是所謂格点．在平面上一个有限的区域內，格点的个数总是一个整数：怎样用格点的个数去計算平面上有限区域的面积，或者，反过来，在平面上已知面积的一个有限区域內至少有多少格点，这就是这本小册子所要討論的問題．这里面特别討論了一条叫做“数的几何中的基本定理”：关于原点对称的凸区域，如果除原点以外不包含其他格点，它的面积頂多是4．为了証明这条定理，書中还介紹了一条叫“重迭原則”的定理．联系重迭原則，又討論了怎样用有理数逼近无理数等問題．这本小册子就是这样围繞着格点和面积这个主題，講了数学上一些有趣而又有用的問題．

編者的話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义。近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物。在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套“青年数学小丛書”，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求。

考虑到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前教学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来。

这是我們的初步想法和尝試。热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物。

北京市数学会

1962 年四月

目　次

一　什么是格点?

平常我們用的方格紙，都画着縱横两組平行綫，相邻平行綫之間的距离总是相等的。方格紙上两組直綫的交点，就是所謂**格点**.

如果取一个格点做原点 O，如图 1，取通过这个格点的横向和縱向两直綫分别做横坐标軸 OX 和縱坐标軸 OY，并取原来方格紙上相邻平行綫之間的距离做单位长，那末，我們就建立了一个**坐标系**。这时，前面所說的格点，显然就是縱横两坐标都是整数的那些点. 如图 1 中的 O, P, Q, M, N，都是格点。由于这个緣故，我們又叫格点做**整点**.

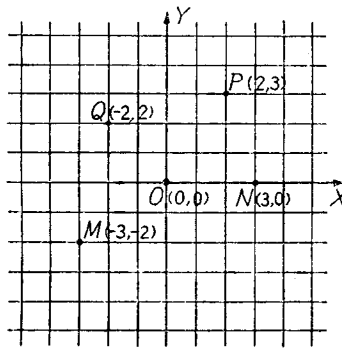

图 1.

二　我們的中心問題

在这本小册子里所要討論的問題，都是围繞着格点和面积这个主題的.

在一个平面上，格点有无穷多，但是两个不同格点的距离至少是 1，因此，我們說平面上的一个个格点是孤立的或**零散**

的．在平面上一个有限的区域內(例如某一个圓內)，格点的个数总是一个整数． 格点的个数如果要增加或减少，增加或减少的至少是 1 个，不会有不到 1 个的零数．和这相反，平面上一个区域的面积，常常随着区域边界的微小变动而連續地改变，比方可以改变 0.1 个单位，或更小如 0.01 个单位，以至 0.001 个单位，0.0001 个单位，……因此，我們可以說面积是一种連續的量．

在数学里面，我們有两个很基本的問題，那就是：第一，怎样用連續的量去概括零散的量；第二，怎样用零散的量去逼近連續的量．这两个問題其实是一个問題的两个方面．不过，第一个問題着重在利用連續的量去研究或估計零散的量．这是古老的物理和数学上的問題．著名的圓內格点問題就属于这一类型．这問題是：知道了以原点做中心的圓的面积，要估計圓內格点的个数(参看习題 2)．近年来，由于电子計算机的长足发展，对于許多零散的量都有了計算的办法，因此，又产生了大量的用零散的量去逼近連續的量的問題．一个簡单的例子就是：怎样用一个区域內的格点数去逼近区域的面积，这也就是本書所要討論的一个問題．

三 面积的近似計算

当我們測量田地、园林、湖沼、島屿等等的面积时，需要种种簡便方法来計算面积的近似值．最常用的有所謂平行綫法，方格法和三角法．这里順次簡单介紹如下：

(一)平行綫法 如图 2，我們用 $n+1$ 条直綫把所求面积

分成 n 条，相邻平行綫之間的距离都是 d. 为簡单起見，我們假定平行綫中第 1 条和第 $n+1$ 条跟所求面积的边界或者相切于一点，或者有一段重合，而其他每一条直綫跟面积的边界恰好交于两点. 我們依次用 $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}, l_k, \cdots, l_{n-1}, l_n$ 表示各平行綫和面积相交的一段的长度（可能是 0）. 考慮在第 k 条直綫和第 $k+1$ 条直綫之間的面积. 当 d 很小时，这一条面积是和图中梯形 $ABCD$ 的面积很接近的. 因此，我們可以近似地用梯形面积

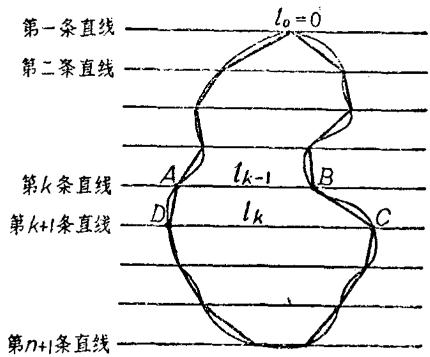

图 2.

$$\frac{1}{2}d\ (l_{k-1}+l_k)$$

来代替这一条面积. 特别当 $k=1$ 或 $k=n$ 时，所謂梯形可能蛻化为三角形. 我們把各条面积的近似值合起来，就得到所求面积（記作 A）的近似值：

$$A \approx \frac{1}{2}d\ (l_0+l_1)+\frac{1}{2}d\ (l_1+l_2)+\cdots+\frac{1}{2}d\ (l_{k-1}+l_k)$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}d\ (l_{n-1}+l_n),$$

即
$$A \approx d\left(\frac{1}{2}l_0+l_1+\cdots+l_{n-1}+\frac{1}{2}l_n\right), \qquad (1)$$

式中 ≈ 表示近似地相等.

（二）**方格法**　在所求面积上，打好方格，如图3．假定相邻平行綫之間的距离是d，那末每一方格的面积就是d^2．考虑左下角格点落在所求面积上的小方格的全体，这就是图中画上了斜綫的那些小方格．在一般情形下，当d取得很小时，这些小方格面积的和是和所求面积很接近的．另一方面，每一个这种画了斜綫的小方格，和它的左下角格点彼此一一对应．因此，計算一下落在面积上的格点数（記作N），就容易得到这种小方格的面积和，它等于Nd^2．如果用A表示所求面积，那末我們就得到下面的近似公式：

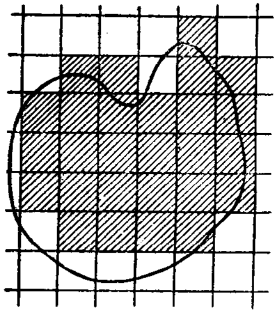

图 3.

$$A \approx Nd^2. \tag{2}$$

（三）**三角法**　在所求面积的边界上，按一定方向順次取$P_1, P_2, \cdots, P_n$，共n个点，依次联結成n边形$P_1P_2\cdots P_n$，如图4．把这n边形用任意方法分成三角形，然后求各三角形的面积和．我們就可以把所得面积和作为所求面积的近似值．这种求近似值的方法比較灵活，便于在测量上运用．

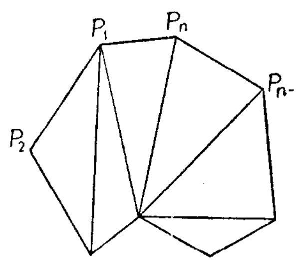

图 4.

以上各种求面积近似值的方法，优点是簡便易算，缺点是对于

誤差，沒有給出任何的估計.

习　题

1. 在果园里种树，相邻两株的距离是 d（图 5 中黑点代表树的位置）. 假如园子的面积是 A，証明果树的株数 N 可以用下面的近似公式表达出来：

$$N\approx\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{A}{d^2}.$$

这是林学上常用的一个公式.

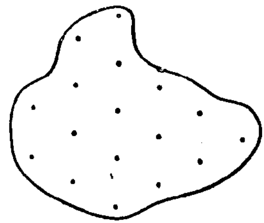

图 5.

2. 以原点做中心，R 做半徑作圓，記圓內格点数做 N，証明：

$$|\pi R^2-N|\leqslant 4\sqrt{2}\pi R.$$

四　格点多边形的面积公式

一个多边形的頂点如果全是格点，这多边形就叫做**格点多边形**. 前面用方格法求面积的时候，得到的是近似公式，这公式的誤差还沒有估計. 由于格点多边形是比較特殊的多边形，它和格点更有密切的关系，因此，我們提出这样的問題：对于格点多边形，能否建立格点数目和面积之間的精密公式？这問題如果能够得到肯定的回答，那对于用方格法求面积也是有帮助的. 如图 6，我們作了两个格点多边形：一个包含着所求面积，一个被含在所求面积的內部. 显然所求面积 A 一定在这两个格点多

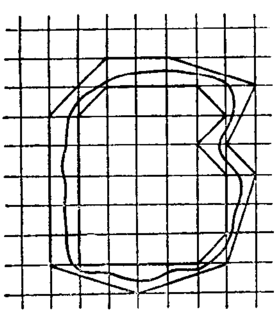

图 6.

边形的面积 A_1 和 A_2 之間，即

$$A_1 \leqslant A \leqslant A_2.$$

从上式各减去 A_1 和 A_2 的平均值，就得到：

$$A_1 - \frac{A_1+A_2}{2} \leqslant A - \frac{A_1+A_2}{2} \leqslant A_2 - \frac{A_1+A_2}{2},$$

即
$$-\frac{A_2-A_1}{2} \leqslant A - \frac{A_1+A_2}{2} \leqslant \frac{A_2-A_1}{2},$$

或
$$\left|A - \frac{A_1+A_2}{2}\right| \leqslant \frac{A_2-A_1}{2}.$$

这說明：如果我們用所作两个格点多边形面积的平均值作为所求面积的近似值，誤差頂多是两个格点多边形面积的差的一半。这种求面积近似值的方法可以看成是方格法和三角法的結合。

在一般数学書里面，只講公式的証明而不講怎样寻求公式。这里，为了引起讀者鑽研問題的兴趣，我們要借助这一个簡单的例子——寻求联系格点多边形的面积和格点数的精确关系——說明怎样通过特殊的情形归納出一般的公式。

为簡单起見，我們假定每个小方格的边长 $d=1$。首先，我們选择面积和格点数都容易計算的格点多边形作为具体例子，加以討論。例如边长是1或2的格点正方形（图7中的 $OABC$ 和 $OPQR$），两腰是1的格点三角形（图7中的 OAB），一腰是1，一腰是2的直角三角形（图7中的 OPC），边长

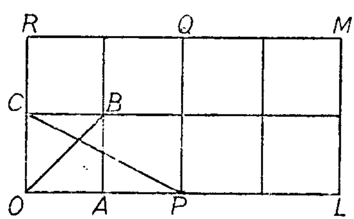

图 7.

是 2 和 4 的格点矩形(图 7 中的 $OLMR$). 我們把它們的面积A,内部格点数 N 和边上格点数 L,列成一表如下:

图　形	A	N	L	$A-N$	$L/2$
$OABC$	1	0	4	1	2
$OPQR$	4	1	8	3	4
OAB	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
OPC	1	0	4	1	2
$OLMR$	8	3	12	5	6

看过上表的前四行,我們可能感到很失望,A,N,L 之間几乎看不出什么联系来. 不过我們在前面已經看到,当 A 很大时,A 和 N 的差是(相对地說)很小的. 因此,我們在表上添了一行,包含 $A-N$ 的値. 这行数字是随着 L 而增大的. 如果用 2 去除 L,列到最后一行,我們立刻得到下面的有趣的关系:

$$A-N=\frac{L}{2}-1,$$

即

$$A=N+\frac{L}{2}-1. \tag{3}$$

这就是說,如果我們把边上的每一个格点作为半个来計算,那末,格点数 $N+\frac{L}{2}$ 和面积 A 的差就恰好是 1.

公式(3)是我們从五个特例归納出来的. 它到底是正确的,还是一种巧合呢? 要彻底解决这个問題,当然还要通过严格的証明. 不过,目前我們还应該抱怀疑的态度,再检驗一

下，理由是，我們的五个特例还是旣簡单又特殊的。为了容易列表，我們的确应該先选择簡单而易于驗算的特例，但在归納出公式以后，就需要找一个更复杂更有代表性的例子，再来驗証一下公式的正确性。例如我們选择图 8 的四边形 $ABCD$，不难看出，对于这个四边形，我們有

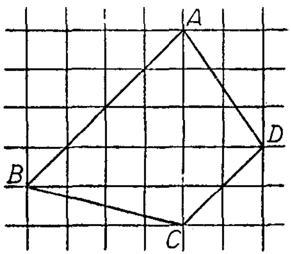

图 8.

$$A=15,\ N=12,\ L=8,$$

而 $$15=12+\frac{8}{2}-1.$$

这一个附加的特例，使我們对于公式（3）的正确性，得到更大的保証。因此，我們应該进一步考虑怎样去証明这个公式了。

五　格点多边形面积公式的証明

像寻求公式的时候那样，我們在思索一个公式的証明时，也可以先从比較簡单的特殊情形想起。現在我們就先考虑两边平行于坐标軸的格点矩形 $ABCD$，如图 9。我們假定这矩形的长寬分别是 m 和 n。容易从图看出，这时，面积 A，内部格点数 N 和边上格点数 L 分别是：

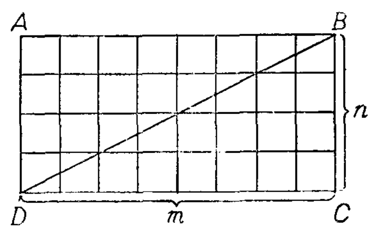

图 9.

$$\left.\begin{aligned}&A=mn,\\&N=(m-1)(n-1),\\&L=2(m+1)+2(n-1)=2(m+n).\end{aligned}\right\}(4)$$

（最后一式中，$2(m+1)$是上下两边的格点数，$2(n-1)$是左右两边除去頂点以外的格点数.）因此，

$$N+\frac{L}{2}-1=(m-1)(n-1)+(m+n)-1=mn=A.$$

这表明公式（3）对于矩形是成立的.

有了矩形作基础，我們就不难討論两腰分别和两坐标軸平行的格点直角三角形，例如上图中的$\triangle BCD$或$\triangle ABD$. 由图形的对称性，容易看出$\triangle BCD$和$\triangle ABD$的面积，內部格点数和边上格点数都是分别相等的.（事实上，如果把矩形$ABCD$繞它的中心即对角綫的交点旋轉$180°$，那末$\triangle ABD$就和$\triangle CDB$重合，而且格点也都一一重合起来了.）如果用L_1表BD綫段內部格点数（即不包含端点的格点数），那末，除去这L_1个格点以后，矩形內部的格点就平均分配在$\triangle BCD$和$\triangle ABD$的內部. 又前面已經算出，矩形內部的格点数是$(m-1)(n-1)$，所以这两个三角形內部都有

$$N=\frac{(m-1)(n-1)-L_1}{2}$$

个格点. 又容易看出，这两个三角形边上的格点数都是

$$L=m+1+n+L_1,$$

而面积显然都是

$$A=\frac{mn}{2}.$$

因此，

$$N+\frac{L}{2}=\frac{(m-1)(n-1)-L_1}{2}+\frac{m+n+1+L_1}{2}$$

$$=\frac{mn}{2}+1=A+1.$$

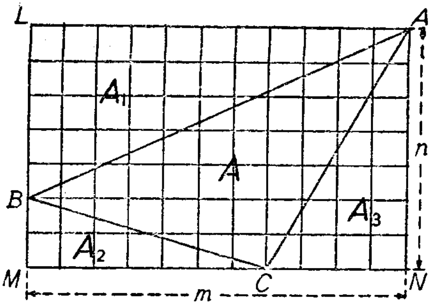

图10.

这表明公式(3)对于两腰平行于坐标軸的格点直角三角形是正确的.

現在我們进一步討論一般的格点三角形.

$\triangle ABC$ 是一个格点三角形,如图10,方格紙上通过三頂点的直綫围成一个矩形$ALMN$. 三角形ALB,BMC,CNA都是直角三角形,因此都滿足公式(3). 現在把图中四个三角形的面积,内部格点数和边上格点数,分别用不同的記号表示出来,列成下表:

三角形	面积	內部格点数	边上格点数
$\triangle ABC$	A	N	L
$\triangle ALB$	A_1	N_1	L_1
$\triangle BMC$	A_2	N_2	L_2
$\triangle CNA$	A_3	N_3	L_3

利用前面所得到的关于矩形面积和格点的公式(4),容易由图10看出:

$$\left.\begin{aligned} &A+A_1+A_2+A_3=mn,\\ &N+N_1+N_2+N_3+L-3=(m-1)(n-1),\\ &L+L_1+L_2+L_3-2L=2(m+n).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

对于最后一行，还需要解释一下．显然$\triangle ABC$边上每一个格点也是相邻三角形边上的一个格点．因此，每一个这样的格点恰好在$L_1+L_2+L_3$中計算了一次．又A,B,C三点，都在$L_1+L_2+L_3$中計算了两次．所以$L+L_1+L_2+L_3-2L=L_1+L_2+L_3-L$实际上就是矩形边界上的格点数，因此，它等于$2(m+n)$．

順次用$1,-1,-\frac{1}{2}$乘（5）的三个式子，然后相加，就得到：

$$A-(N+\frac{1}{2}L)+[A_1-(N_1+\frac{1}{2}L_1)]$$

$$+[A_2-(N_2+\frac{1}{2}L_2)]+[A_3-(N_3+\frac{1}{2}L_3)]-3=1.$$

但是，我們已經知道公式（3）对于直角三角形是成立的，因此，上式中有方括号的各項都等于1．所以由上式得

$$A-(N+\frac{1}{2}L)=1.$$

这表明对于格点三角形，公式（3）是正确的（参看习題5）．

最后，討論一般的格点多边形$A_1A_2\cdots A_n$，如图11．我們可以用数学归納法．当$n=3$时，公式已經証明．現在假定公式对于$n-1$边形成立，要証明公式对于n边形也成立．联結$A_{n-1}A_1$，我們就把这个n边形分成一个格点三角形和一个$n-1$边格点多边形．用

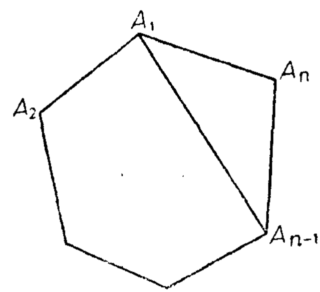

图11．

$$A_1, \qquad A_2, \qquad A;$$
$$N_1, \qquad N_2, \qquad N;$$
$$L_1, \qquad L_2, \qquad L$$

分别表示这三角形，$n-1$ 边形和原来的 n 边形的面积，內部格点数和边上格点数，我們就得到：

$$A=A_1+A_2,$$
$$N=N_1+N_2+L_0-2,$$
$$L=L_1+L_2-2L_0+2,$$

其中 L_0 表示 A_1A_{n-1} 上的格点数（包含 A_1, A_{n-1} 两点）。因此，根据归納法的假設，

$$\begin{aligned}N+\frac{L}{2}&=(N_1+\frac{L_1}{2})+(N_2+\frac{L_2}{2})-1\\&=A_1+1+A_2+1-1\\&=A+1.\end{aligned}$$

这就証明了公式（3）对于 n 边形也成立（参看习题5）。

习　题

3. 証明：內部和边上（頂点除外）没有格点的格点三角形的面积等于$\frac{1}{2}$.

4. 証明：对边平行的 $2n$ 边格点多边形面积总是一个整数.

5. 上面对于公式（3）的証明还需要一些补充．在我們考虑一般的格点三角形时，可能遇到像图12中的那种情形．試考虑一切可能的情形，并且加以討

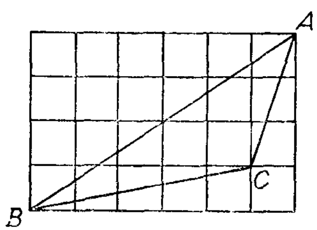

图12.