连续介质力学

武生智　俞焕然　编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

连续介质力学

连续介质力学

武生智　俞焕然　编著

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学 / 武生智，俞焕然编著．—兰州：兰州大学出版社，2006.9

ISBN 7-311-02879-5

Ⅰ.连… Ⅱ.①武…②俞… Ⅲ.连续介质力学—研究生—教材 Ⅳ.033

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105160 号

连续介质力学

武生智 俞焕然 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州军区空军印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张:9.25

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

字数:196 千字 印数:1～1000 册

ISBN7－311－02879－5/O·195 定价:18.00 元

前言

“连续介质力学”长期以来是我校固体力学专业研究生的必修课之一．我们过去一直使用的教材是 A.C.Eringen 原著的力学学科的世界名著“Mechanics of Continua”，该书由程昌钧和俞焕然合译(中文译名为“连续统力学”)，科学出版社出版．它不同于其它的有关连续介质力学的专著，应该是该类著作中比较直观和便于应用的一本著作．这也是中国力学学会推荐的一本有关理性力学的译著． Eringen 教授曾应邀来兰州大学讲学，并举办了全国有关科研和教学人员讲授该书主要内容的讲习班．

面对科学技术的不断发展，连续介质力学的教学内容和教学方法应该进行改进，以适应 21 世纪对人才培养的要求．作为力学专业研究生的必修课，有关这方面的专著已有相当数量，但大多内容比较抽象，而且内容偏多偏深，不适合作为入门教材．为了满足课程的基本要求和适应课时压缩后的教学，我们编写了此书．

全书共分十章，前八章是必讲的内容，后两章是选学的内容．可供高等院校理工科高年级本科生和研究生的连续介质力学教材使用，也可作为有关科技人员的参考资料．学习时需有“张量分析”的简单知识和“弹性力学”、“流体力学”等课程的前期知识．

本书是根据作者多年来的教学实践以及近年来国内外同行们的先进经验，在俞焕然教授初稿的基础上，经过多次讨论和修改，最后由武生智副教授整理、编写而定稿．

由于编者的知识和水平有限，书中不足之处在所难免，殷切希望专家与读者指正．

编　者

2006 年 8 月于兰州大学

目录

第一章 绪论 1

1.1 连续介质力学的研究对象 1

1.2 连续介质力学中的“基本物理量” 1

1.3 连续介质力学的体系 1

第二章 基本运动学 3

2.1 物体、构形和运动 3

2.2 变形梯度张量 5

2.3 变形梯度张量的极分解 (乘法分解) 6

2.4 变形张量和应变张量 7

2.5 以位移表示的应变张量和应变椭球 10

2.6 应变不变量和主方向 12

2.7 无限小应变和无限小转动 15

2.8 面元和体元的变化 15

2.9 应变的简单举例 17

2.9.1 刚性变形 17

2.9.2 均匀膨胀和压缩 18

2.9.3 单轴应变和简单拉伸 18

2.9.4 简单剪切 19

2.10 协调方程 (相容性条件) 19

2.11 物质导数 20

2.12 速度和加速度 21

2.13 变形梯度张量和 Jacobi 行列式的物质导数 22

2.14 弧长、面元和体元的物质导数 24

2.15 线积分、面积分、体积分的物质导数 26

2.16 间断面引起的跳变条件 27
2.17 流动参考构形和 Rivlin–Ericksen 张量 29

第三章 动力学基本方程 **32**
3.1 质量守恒定律 32
3.2 运动方程和应力张量 33
3.3 在初始坐标系中的运动方程和应力张量 36
3.4 运动方程的跳变条件 37

第四章 连续介质热力学 **40**
4.1 热力学第一定律 40
4.2 在运动间断面上能量的跳变 43
4.3 热力学第二定律与熵产率 44
4.3.1 热力学状态 44
4.3.2 热力学过程和热力学路径 45
4.4 熵的跳变条件 48

第五章 本构方程 **49**
5.1 本构方程的必要性 49
5.2 本构理论的基本公理 50
5.2.1 因果性公理 50
5.2.2 决定性公理 50
5.2.3 等存在公理 51
5.2.4 客观性公理 51
5.2.5 物质不变性公理 52
5.2.6 邻域公理 52
5.2.7 记忆公理 53
5.2.8 相容性公理 54
5.3 矢量和张量的客观性原理 55
5.4 简单物质的本构方程 56
5.5 简单物质应力对称性原理 57

第六章 弹性力学 **59**
6.1 Cauchy 弹性物质的本构方程 59
6.2 超弹性材料 60
6.3 线性本构方程 63

6.4 线性理论中的物质对称性 64
6.4.1 关于一个平面的物质对称性 65
6.4.2 关于两个正交平面的对称性 66
6.4.3 六方晶体 66
6.4.4 各向同性固体 67
6.4.5 不可压缩物质 68
6.5 关于各向同性弹性物质弹性系数的限制 68
6.6 各向同性弹性物质的本构方程的不变量表示 69
6.7 Lame 系数与杨氏模量 E 和泊松比 ν 的关系 70
6.8 线性弹性理论问题的提法 71
6.9 弹性理论非线性问题举例 72
6.9.1 简单剪切问题 73
6.9.2 圆柱体的有限扭转 74

第七章 流体力学 77
7.1 流体的应力本构方程 77
7.2 非热传导的 Stokes 流体的本构方程 78
7.3 非热传导流体的线性本构方程 80
7.4 非热传导流体线性本构问题的提法 81
7.5 非热传导流体问题的矢量形式 83
7.6 非热传导流体非线性本构问题举例 87
7.6.1 直线剪切流动 87
7.6.2 Poiseuille 流动 88
7.6.3 Couette 流动 90

第八章 热弹性固体和热粘性流体 93
8.1 热弹性固体的本构方程 93
8.2 线性热弹性本构方程 94
8.3 线性各向同性热弹性固体 96
8.4 各向同性热弹性固体本构方程的不变量表示 97
8.5 各向同性线性热弹性物质的基本方程 98
8.6 固体中的热传导和 Duhamel 定理 100
8.7 半空间内和球腔外部的温度分布 103
8.7.1 具有不变边界温度的半空间 103
8.7.2 受均匀温度作用的球腔 104

8.7.3 受时间相关温度作用的半空间或球腔 105
8.8 热粘性流体的本构方程 106

第九章 粘弹性理论 **109**
9.1 一般的应变率相关的物质 109
9.2 泛函形式的本构方程 112
9.3 热粘弹性理论 115
9.4 非热传导各性同性粘弹性物质的基本方程 115
9.5 对应定理 116

第十章 电磁弹性理论 **118**
10.1 电磁弹性固体热力学 118
10.2 各向同性电磁弹性物质的本构方程 120
10.3 各向同性电磁弹性物质的二次本构方程 122
10.4 各向同性电磁弹性物质的线性本构方程 123
10.5 电磁弹性物质 (线性物质) 的基本方程 124
10.5.1 各向同性弹性电介质 126
10.5.2 压电性 127
10.5.3 磁弹性理论 127

附录 A 矢量和张量分析初步 **129**
A.1 曲线坐标系中的矢量和张量 129
A.1.1 协变与逆变度量张量 129
A.1.2 升标与降标 132
A.1.3 张量的物理分量 132
A.1.4 协变导数 133
A.2 各向同性函数的不变量和生成元 135
A.2.1 各向同性标量值函数的不变量生成元 135
A.2.2 各向同性矢量值函数的生成元 136
A.2.3 各向同性张量值函数的不变量生成元 137

第 1 章 绪论

1.1 连续介质力学的研究对象

“连续介质力学” 研究的是被称为连续介质的物质在外部条件作用下的宏观力学响应. 所谓宏观力学响应, 就是在三维 Euclid 空间和均匀流逝时间中受 Newton 力学支配的物质行为的响应. 简单说来, 连续介质力学研究连续介质 (包括固体、流体等) 在外部作用下的变形和运动以及其破坏机理.

连续性：真实物体所占有的空间可近似地看作是由 “物质点” 连续地、无空隙地充满的. 所谓 “物质点” 是指具有一定的体积和一定的质量, 并在微观上充分大 (包含充分多的原子, 分子结构), 但在宏观上充分小的分子团.

物质不可毁性：即物质正的有限的体积不会变成零、或无限的体积.

物质不可入性：物质的运动使一个物质区域变成一个物质区域, 一个物质曲面变成一个物质曲面, 一条物质曲线变成一条物质曲线. 物质的一部分绝不会进入物质的另一部分.

1.2 连续介质力学中的 “基本物理量”

客观物质世界的运动是非常复杂的. 连续介质力学以现实物体的理论模型作为研究对象, 并力求使它能在本质上准确地描述客观物体的运动, 为此需要给出一些基本的物理量的名词和术语, 它们构成连续介质力学的 “基本物理量”. 这些基本物理量包括物体、质量、时空系、运动、动量、力、功和能、温度和热、熵等等.

1.3 连续介质力学的体系

基本物理量、基本定律和物质的本构方程构成了理性连续介质力学的体系. 也就是说, 通过一些定律、理论和公式, 把连续介质中的基本名词和术语所描述的基本物

理量之间的关系联系起来，构成连续介质力学的理论体系.

连续介质力学的基本方程，大体可分为两类：一类适用于所有连续介质的，反映了自然界的基本规律，如质量守恒、能量守恒和 Newton 运动定律等；另一类是各种连续介质所特有的，描述特定物质性质的本构方程. 把本构方程与描述物质运动的场方程或间断条件组成的方程组，在给定的初始条件和边界条件下求解，就可以得到连续介质的运动解.

第 2 章 基本运动学

2.1 物体、构形和运动

"物体" 是介质粒子的连续集合. 所谓粒子, 就是指构成连续介质的点, 即物质点. 物体在空间所占的区域, 我们称为 "构形" (Configuration) .

物质在初始时刻所占有的区域称为 "初始构形" . 物质在现在时刻 t 所占有的区域称为 "现时构形" . 如采用某一特定时刻的构形, 作为现时构形的对比构形, 则称该构形称为 "参考构形" . 参考构形的选取是任意的, 一般以初始时刻的构形作为参考构形.

物质在运动或变形中, 它的构形也将随时间不断发生变化. 如图 1 所示, 在 $t=0$ 时刻, 连续介质中的诸物质点占据一个空间区域 B, 它由初始时刻的内部区域 V 及其边界 S 组成, 构成初始构形. 发生变化之后, 在 t 时刻, 原来 $V+S$ 中的诸物质点又占据一个新的空间区域 b, 由 t 时刻现时构形的内部区域 v 及其相应的边界 s 组成.

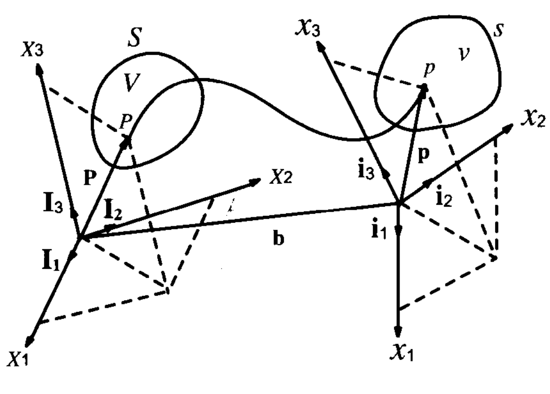

图 1 坐标系

为了方便, 在不同的构形上一般选取不同的坐标系. 在初始构形上选定的坐标系用大写字母表示, 即为 $OX_1X_2X_3$, 它的基矢量为 $\mathbf{I}_K$ $(K=1,2,3)$, 当该坐标系是正交

坐标系时，有

$$\mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \delta_{KL} \quad (K, L = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

这里 δ_{KL} 为 Kronecker 符号. 当两个脚标相同时，它们取值为 1, 否则为零.

而在时刻 t 的现时构形上选定的坐标系用小写字母表示，即为 $ox_1x_2x_3$, 它的基矢量为 $\mathbf{i}_k$ $(k = 1, 2, 3)$. 同样当该坐标系是正交坐标系时，有

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

而两坐标系的基矢量之间的关系为

$$\mathbf{I}_K \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{Kl} \quad (K, l = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

称为 "移位子"(Shifter) . 当两个坐标系都是正交坐标系时，它实质上是两个坐标系的基矢量之间的方向余弦. 在本书中，如不作特别声明，我们假定坐标系是正交的. 当两个坐标系相同时， δ_{Kl} 就变成为 Kronecker 符号.

在取定两个坐标系后，任一矢量 $\mathbf{V}$ 在两个坐标系中可作不同的表示，如矢量 $\mathbf{V}$ 在标架 (x_k) 中可表示为

$$\mathbf{V} = v_k \mathbf{i}_k \tag{2.4}$$

在本书中已默认求和规则，即在一个公式中，两个相乘的量的脚标相同时，表示这两个量的相应的分量相乘并相加. 如 (2.4) 的一般展开式为

$$\mathbf{V} = v_k \mathbf{i}_k = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3 \tag{2.5}$$

这个矢量在标架 (X_K) 中可表示为

$$\mathbf{V} = V_K \mathbf{I}_K \tag{2.6}$$

因为是同一矢量在不同的坐标系中的表示，所以

$$\mathbf{V} = v_k \mathbf{i}_k = V_K \mathbf{I}_K \tag{2.7}$$

因而

$$V_K = \delta_{Kk} v_k \quad (K = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.8}$$

如在初始构形中处于 $\mathbf{X}$ 点的物质点 $\mathbf{P}$, 其位置矢量在坐标系 $OX_1X_2X_3$ 中为

$$\mathbf{P} = X_K \mathbf{I}_K \tag{2.9}$$

我们称坐标 X_K 为点 $\mathbf{P}$ 的 **物质坐标** 或 Lagrange **坐标** . 在时刻 t 它运动到 $\mathbf{p}$ 点，其位置矢量在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中为

$$\mathbf{p} = x_k \mathbf{i}_k \tag{2.10}$$

我们称坐标 x_k 为该点的 **空间坐标** 或 Euler **坐标**. 物体随着时间的迁移在空间发生移动和变形，称为物体的 "运动", 则下式所给出的表示式

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{2.11}$$

称之为运动方程. 它表示初始时刻处于 $\mathbf{X}$ 的物质点在 t 时刻运动到点 $\mathbf{x}$ 的位置.

我们假定对应于此关系的 Jacobi 行列式

$$j = \left|\frac{\partial x_k}{\partial X_K}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

在区域内处处不为零，则存在逆运动

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{2.13}$$

它表示在时刻 t, 处于位置 $\mathbf{x}$ 的物质点，在初始时刻处于 $\mathbf{X}$ 的位置. 力学问题的根本就在于求解运动方程 (2.11) 或其逆 (2.13) .

2.2 变形梯度张量

物体作一般运动时, 不仅其物质点的空间位置发生改变, 它的构形亦将发生变化. 现在我们来考察物质点 $\mathbf{X}$ 的矢径的微小增量 $\mathrm{d}\mathbf{X}$, 它在现时构形中的相应增量为 $\mathrm{d}\mathbf{x}$, 由 (2.11) 式:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + \mathrm{d}\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\mathrm{d}\mathbf{X} \tag{2.14}$$

我们称 $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ 为 "变形梯度张量" .

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

或简记为: $F_{kK} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}$ $(k, K = 1, 2, 3)$. 它表示初始时的微元段 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 与变形后的微元段 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 之间的关系. 用张量符号记为

$$\mathrm{d}x_k = x_{k,K}\mathrm{d}X_K \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.16}$$

或由逆 (2.13) 式，有

$$\mathrm{d}X_K = X_{K,k}\mathrm{d}x_k \quad (K = 1, 2, 3) \tag{2.17}$$

上面两式中脚标中的逗号表示偏导数，即

$$x_{k,K}=\frac{\partial x_k}{\partial X_K}\quad (k,K=1,2,3) \tag{2.18}$$

$$X_{K,k}=\frac{\partial X_K}{\partial x_k}\quad (k,K=1,2,3) \tag{2.19}$$

由微分的链式法则，有

$$x_{k,K}X_{K,l}=\delta_{kl},\quad X_{K,k}x_{k,L}=\delta_{KL} \tag{2.20}$$

这两组方程中的每一组都是关于 9 个未知量 $x_{k,K}$ 或 $X_{K,k}$ 的 9 个线性方程组成的方程组.

而运动方程 (2.11) 的 Jacobi 行列式可用偏导数表示为

$$j\equiv|x_{k,K}|=\frac{1}{6}e_{KLM}e_{klm}x_{k,K}x_{l,L}x_{m,M} \tag{2.21}$$

这里符号 e_{KLM} 和 e_{klm} 为置换张量 $(k,l,m,K,L,M=1,2,3)$.

2.3 变形梯度张量的极分解 (乘法分解)

任意一非奇异的张量 $\mathbf{F}$ 可惟一地分解成下面两种形式之一:

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU}=\mathbf{VR} \tag{2.22}$$

它表示张量 $\mathbf{F}$ 可以分解为两个张量的乘积, 其中一个是正交的, 另一个是对称的.

为了说明上述的分解成立，我们令 $\mathbf{U}=(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2}$, 显然它是一个正定对称张量，而且存在 “逆张量”$\mathbf{U}^{-1}$ 满足:

$$\mathbf{UU}^{-1}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}=\mathbf{I} \tag{2.23}$$

定义 $\mathbf{R}=\mathbf{FU}^{-1}$, 它满足关系

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{RR}^T=\mathbf{I} \tag{2.24}$$

这样的张量称作 “正交张量”, 所以有

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU} \tag{2.25}$$

式中 $\mathbf{R}$ 为正交张量，它代表纯转动； $\mathbf{U}$ 为正定对称张量，它和转动无关，代表纯粹的变形，称为 “右 Cauchy–Green 伸长张量” .

如令 $\mathbf{V}=(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2}$, 它也是一个正定对称张量, 存在 "逆张量"$\mathbf{V}^{-1}$ 满足: $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}=\mathbf{I}$, 我们定义 $\mathbf{R}'=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$, 则

$$\mathbf{F}=\mathbf{V}\mathbf{R}' \tag{2.26}$$

我们称 $\mathbf{V}$ 为 "左 Cauchy–Green 伸长张量", 它也和转动无关, 代表纯粹的变形. 可以证明: $\mathbf{R}'=\mathbf{R}$, 于是得

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R} \tag{2.27}$$

对于表示旋转的张量 $\mathbf{R}$, 当它作用在任意一个矢量 $\mathbf{u}$ 上时, 有

$$\mathbf{v}=\mathbf{R}\,\mathbf{u} \tag{2.28}$$

则

$$\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{v}=(\mathbf{R}\mathbf{u})^T\cdot(\mathbf{R}\mathbf{u})=\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{u}=\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{u} \tag{2.29}$$

所以, 在 $\mathbf{R}$ 的作用下矢量的长度是不变的, 由此可见正交张量 $\mathbf{R}$ 表示纯粹的旋转.

对于伸长张量 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ 而言, 根据线性代数理论, 对称实矩阵具有三个互相垂直的主轴及对应有三个实主值, 且有关系

$$\mathbf{U}\,\mathbf{a}\;=\;\lambda\,\mathbf{a}\,,\quad \mathbf{V}\,\mathbf{b}\;=\;\lambda'\,\mathbf{b} \tag{2.30}$$

对于任意一个不为零的矢量 $\mathbf{v}$, 可分解成平行于主轴的三个矢量的和, 所以 $\mathbf{U}(\mathbf{V})$ 作用于 $\mathbf{v}$ 的结果是在三个主轴方向上与 $\lambda(\lambda')$ 成比例的伸长 $(\lambda>1)$ 或缩短 $(\lambda<1)$, 由此对称张量 $\mathbf{U}(\mathbf{V})$ 表示纯粹的变形.

在伸长张量 $\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{V}$ 之间, 存在如下关系

$$\mathbf{U}=\mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}\,,\qquad \mathbf{V}=\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \tag{2.31}$$

可以证明, 当被作用的矢量满足关系 $\mathbf{b}=\mathbf{R}\,\mathbf{a}$, $\mathbf{a}=\mathbf{R}^T\mathbf{b}$ 时, 有 $\lambda=\lambda'$.

2.4 变形张量和应变张量

因为 $\mathbf{P}=X_K\mathbf{I}_K$, 由 (2.13) 式, 它是 $\mathbf{x}$ 和时间 t 的函数. 当 $\mathbf{x}$ 有增量 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 时, 则

$$\mathrm{d}\mathbf{P}=X_{K,k}\mathrm{d}x_k\mathbf{I}_K \tag{2.32}$$

又因为 $\mathbf{p}=x_k\mathbf{i}_K$, 所以由 (2.11) 式, 它是 $\mathbf{X}$ 和时间 t 的函数, 当 $\mathbf{X}$ 有增量 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 时, 有

$$\mathrm{d}\mathbf{p}=x_{k,K}\mathrm{d}X_K\mathbf{i}_k \tag{2.33}$$

我们记

$$\mathbf{c}_k(\mathbf{x},t)=X_{K,k}\mathbf{I}_K \tag{2.34}$$

$$\mathbf{C}_K(\mathbf{X},t)=x_{k,K}\mathbf{i}_k \tag{2.35}$$

则

$$\mathrm{d}\mathbf{P}=\mathbf{c}_k\mathrm{d}x_k \quad \mathrm{d}\mathbf{p}=\mathbf{C}_K\mathrm{d}X_K \tag{2.36}$$

在初始构形中，弧长平方可表示为

$$\mathrm{d}S^2=\delta_{KL}\mathrm{d}X_K\mathrm{d}X_L \tag{2.37}$$

在变形后的构形中，弧长平方可表示为

$$\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}\mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{P}=c_{kl}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l \tag{2.38}$$

这里

$$c_{kl}(\mathbf{x},t)=\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{c}_l=X_{K,k}X_{K,l} \tag{2.39}$$

反之，在 t 时刻的现时构形中弧长平方可表示为

$$\mathrm{d}s^2=\delta_{kl}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l \tag{2.40}$$

在变形前的构形中，即在初始时的坐标中可表示为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}=C_{KL}\mathrm{d}X_K\mathrm{d}X_L \tag{2.41}$$

这里

$$C_{KL}(\mathbf{X},t)=\mathbf{C}_K\cdot\mathbf{C}_L=x_{k,K}x_{k,L} \tag{2.42}$$

我们称 (2.39) 中的 c_{kl} 为 “Cauchy **变形张量**”，称 (2.42) 中的 C_{KL} 为 “Green **变形张量**”．它们都是对称的，即：$c_{kl}=c_{lk}$,$C_{KL}=C_{LK}$，而且是正定的．由变形梯度张量 $\mathbf{F}$ 的定义和它的极分解，我们可得

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{2.43}$$

它被称为 “**右** Cauchy–Green **张量**”．我们也可得

$$\mathbf{b}=\mathbf{V}^2=\mathbf{F}\mathbf{F}^T \tag{2.44}$$

它被称为 “**左** Cauchy–Green **张量**”．

定义矢量

$$\overset{-1}{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},t)=x_{k,K}\mathbf{I}_K \quad \overset{-1}{\mathbf{C}}_{\mathbf{K}}(\mathbf{X},t)=X_{K,k}\mathbf{i}_k \tag{2.45}$$

对它们有关系

$$\mathbf{c}_k \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}_l = (X_{K,k}\mathbf{I}_K) \cdot (x_{l,L}\mathbf{I}_L) = X_{K,k}x_{l,L}\delta_{KL} = X_{K,k}x_{l,K} = \delta_{kl} \tag{2.46}$$

$$\mathbf{C}_K \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}_L = (x_{k,K}\mathbf{i}_k) \cdot (X_{L,l}\mathbf{i}_L) = x_{k,K}X_{L,l}\delta_{kl} = x_{k,K}X_{L,k} = \delta_{KL} \tag{2.47}$$

我们称 $\overset{-1}{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}$ 和 $\overset{-1}{\mathbf{C}}_{\mathbf{K}}$ 分别是 $\mathbf{c}_k$ 和 $\mathbf{C}_K$ 的“**互易矢量**”.

类似地，我们定义

$$b_{kl} = \overset{-1}{c}_{kl} = \overset{-1}{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}} \cdot \overset{-1}{\mathbf{c}}_{\mathbf{l}} = \delta_{KL}x_{k,K}x_{l,L} \tag{2.48}$$

$$B_{KL} = \overset{-1}{C}_{KL} = \overset{-1}{\mathbf{C}}_{\mathbf{K}} \cdot \overset{-1}{\mathbf{C}}_{\mathbf{L}} = \delta_{kl}X_{K,k}X_{L,l} \tag{2.49}$$

因为

$$\overset{-1}{c}_{kl}\, c_{lm} = (\delta_{KL}x_{k,K}x_{l,L})(\delta_{MN}X_{M,l}X_{N,m}) \tag{2.50}$$

$$= x_{k,K}(x_{l,K}X_{M,l})X_{M,m} = x_{k,K}X_{K,m} = \delta_{km} \tag{2.51}$$

我们将 b_{kl} 和 B_{KL} 分别称之为 c_{kl} 和 C_{KL} 的“**互易张量**”. 我们也分别称 $\overset{-1}{C}_{KL}$ 和 $\overset{-1}{c}_{kl}$ 为 Piola **变形张量** 和 Finger **变形张量** .

以初始时的坐标系中度量，变形前的弧长平方，由 (2.37) 式为

$$\mathrm{d}S^2 = \delta_{KL}\mathrm{d}X_K\mathrm{d}X_L \tag{2.52}$$

而变形后的弧长平方在初始构形中被表示为

$$\mathrm{d}s^2 = C_{KL}\mathrm{d}X_K\mathrm{d}X_L \tag{2.53}$$

所以弧长的增量为

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = (C_{KL} - \delta_{KL})\mathrm{d}X_K\mathrm{d}X_L \tag{2.54}$$

我们定义

$$E_{KL}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(C_{KL}(\mathbf{X},t) - \delta_{KL}) \tag{2.55}$$

为 “Lagrange **应变张量**” . 对于 Lagrange 应变张量有关系

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{2.56}$$

如在变形后的坐标系中度量，则变形前的弧长平方，由 (2.38) 式为

$$\mathrm{d}S^2 = c_{kl}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l \tag{2.57}$$