21世纪高等继续教育精品教材

《概率论与数理统计》习题集

主　编　李林曙

副主编　顾静相　张旭红

随书赠送

中国人民大学出版社

《概率论与数理统计》
习题集

21世纪高等继续教育精品教材

《概率论与数理统计》习题集

主　编　李林曙

副主编　顾静相　张旭红

中国人民大学出版社

目　录

第 1 章　随机事件与概率

一、本章主要内容

(一) 主要概念

1. 随机试验与随机事件

为了研究随机现象的统计规律性而进行的各种试验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，通常用字母 E 表示.

把每一个可能发生的不能再分解的事件称为该试验的**基本事件**或**样本**点，用 ω 表示；由全体基本事件组成的集合称为样本空间，通常用 U 表示．而把在一定条件下必定不会发生的事件称为**不可能事件**，一般用 $\varnothing$ 表示.

一般地，我们把试验 E 的样本空间 U 的子集称为 E 的**随机事件**，简称为**事件**.

随机事件具有以下特点：

(1) 一次试验是否发生是不确定的，即随机性；

(2) 在相同的条件下重复试验时，发生可能性的大小是确定的，即统计规律性.

2. 事件间的关系和运算

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则说 B 包含 A，或说 A 包含于 B，记作 $A \subset B$.

如果 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

两个事件 A 与 B 至少有一个发生是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记作 $A+B$.

两个事件 A 与 B 同时发生也是一个事件，称为事件 A 与 B 的积，记作 AB.

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互不相容，或称 A 与 B 是互斥的.

事件 A 不发生，即事件"非 A"发生，称为事件 A 的**对立事件**，或称为 A 的**逆事件**，记作 $\overline{A}$.

3. 概率的统计定义

在一组相同的条件下重复 n 次试验，如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在某个常数 p 附近摆动，而且随着试验次数 n 的增大，摆动的幅度将减小，则称常数 p 为事件 A 的**概率**，记作

$$P(A)=p$$

4. 古典概型

满足下列条件的试验模型称为**古典概型**.

(1) 试验结果的个数是有限的，即基本事件的个数是有限的；

(2) 每个试验结果出现的可能性相同，即每个基本事件发生的可能性是相同的；

(3) 在任一试验中，只能出现一个结果，也就是有限个基本事件是两两互不相容的.

5. 概率的古典定义

若古典概型中的基本事件的总数是 n，事件 A 包含的基本事件的个数是 m，则事件 A 的**概率**为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$$

6. 排列与组合

(1) 从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中每次取 m 个元素的一个排列．全部的排列数记为 P_n^m，则

$$\mathrm{P}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

其中 $n!=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$（读作 n 的阶乘）.

规定 $0!=1$.

当 $m=n$ 时，P_n^m 记为 P_n，$\mathrm{P}_n=n!$，这种排列叫做全排列.

(2) 从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素，每个元素可以重复出现，按照一定的顺序排成一列．在这种情况下，第一，第二，……，第 m 位上选取元素的方法都有 n 种，所以，从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素的重复排列的种数是

$$n\times n\times\cdots\times n=n^m$$

这种允许元素重复出现的排列叫做重复排列.

(3) 从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，不考虑顺序编成一组，叫做从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的一个组合．这些组合的个数记为 C_n^m，且有

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{P}_n^m}{\mathrm{P}_m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

7. 条件概率

设 A，B 是随机试验 E 的两个事件，且 $P(B)\neq 0$，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**.

8. 事件的独立性

(1) 如果二事件 A，B 中任一事件的发生不影响另一事件的概率，即

$$P(A\mid B)=P(A)，\text{或 } P(B\mid A)=P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 是**独立的**.

(2) 设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个随机事件，若对任何正整数 k $(2\leqslant k\leqslant n)$ 及 $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\cdots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k})$$

则称 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

9. 贝努里概型

若试验E中一次试验的结果只有两个A和$\overline{A}$，且$P(A)=p$保持不变，则将试验E在条件相同的情况下独立地重复n次，这n个独立试验称为独立试验序列，这个试验模型称为**n重独立试验序列概型**，也称为**贝努里概型**.

（二）主要定理

定理1.1（加法公式） 两个互不相容事件A，$B(AB=\varnothing)$之和的概率等于这两个事件概率之和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

推论1 设A为随机事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

推论2 设A，B是两个随机事件，且$B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

定理1.2（广义加法公式） 对任意两个事件A，B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

定理1.3（乘法公式） 设$P(A)\neq0$，$P(B)\neq0$，则事件A与B之积AB的概率等于其中任一事件的概率乘以在该事件发生的条件下另一事件发生的概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

定理1.4（全概率公式） 若事件A_1，A_2，…，A_n构成一个完备事件组，且$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意事件A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(A\mid A_i)$$

定理1.5 两个事件A，B相互独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

定理1.6 若事件A，B相互独立，则事件$\overline{A}$与B、A与$\overline{B}$、$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

（三）主要性质

性质1 对任一随机事件A，有$0\leqslant P(A)\leqslant1$.

这是因为随机事件A的频率$f_n(A)$总有$0\leqslant f_n(A)\leqslant1$，故相应的概率$p=P(A)$也有

$$0\leqslant P(A)\leqslant1$$

性质2 $P(U)=1$，$P(\varnothing)=0$.

这是因为对于必然事件U和不可能事件$\varnothing$，频率分别为1和0，所以相应的概率也分别为1和0.

性质3 对于有限个或可数个随机事件A_1，A_2，…，A_n，…，若它们两两互不相容，则

$$P(\sum_k A_k)=\sum_k P(A_k)$$

（四）主要公式

1. 事件间的关系和运算公式：

设 A，B，C 为任意三个事件，则

（1）包含关系

$\varnothing \subset A \subset U$，$A+B \supset A$，$A \supset A-B$，$A \supset AB$.

（2）和运算

$A+\varnothing=A$，$A+U=U$，$A+\overline{A}=U$，$A+A=A$，

$A+B=B+A$，$A+(B+C)=(A+B)+C$.

（3）积运算

$AA=A$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A\varnothing=\varnothing$，$AU=A$，

$AB=BA$，$A(BC)=(AB)C$.

（4）和与积运算的分配律

$(A+B)C=AC+BC$，$A+BC=(A+B)(A+C)$；

（5）和、积与逆运算的摩根律

$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，

$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

（6）逆运算与互不相容

$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{U}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=U$.

$A+B=(A-B)+(B-A)+AB$，且 $A-B$，$B-A$，AB 两两互不相容.

$A+B=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$，且 $A\overline{B}$，AB，$\overline{A}B$ 两两互不相容.

$A+B=(A-B)+B=(B-A)+A$，且 $A-B$ 与 B 互不相容，$B-A$ 与 A 互不相容.

2. 三个随机事件的加法公式：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

3. 三个随机事件的乘法公式：

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

4. 设 n 个随机事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则：

（1）$P(A_1A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$；

（2）$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})$.

二、解题方法

1. 各种事件记号与集合记号的比较

事件间的关系及运算基本上与集合间的关系及运算是一致的，为了便于大家更好地理解和运用，用表1—1加以对照说明.

表 1—1　　各记号在概率论与集合论中的比较

记　号	概　率　论　中	集　合　论　中
U	必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	子集
$A\subset B$	事件 A 发生，则 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 是同一事件	A 与 B 相等
$A+B$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生，而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 的交集为空集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集

注意：在理解随机事件的概念时，要深刻体会它的"随机"性，也就是说，随机事件是可能发生也可能不发生的．大家要注意，在每次试验中一定发生或一定不发生的结果不是随机事件，但为了讨论方便与统一，我们把这两种结果看作特殊的随机事件，分别称为必然事件与不可能事件.

2. 以频率计算概率

在日常生活和统计中常用频率作为概率的近似值．例如，说某篮球运动员的投篮命中率是 0.65，0.65 就是对他多次投篮命中统计的频率，我们把 0.65 作为他投篮命中概率的近似值.

3. 用古典概型计算概率

$$P(A)=\frac{\text{导致 } A \text{ 出现的结果数}}{\text{等可能结果总数}}=\frac{k}{n}$$

计算概率要注意三点：

（1）计算总共有多少可能事件（即求 n）；

（2）这些事件的概率是不是相等（判断等概性）；

（3）导致事件 A 发生的事件有多少（即求 k）.

计算古典概型的概率常采用文氏图或列表的方法.

4. 用概率的性质和公式计算概率

当事件较为复杂时，分析事件的关系与运算，利用概率的性质、概率公式（加法公式，乘法公式和全概率公式）或条件概率、事件独立性等计算概率.

（1）对立事件之和的概率公式

$$P(A)+P(\overline{A})=1,\ \text{或}\ P(\overline{A})=1-P(A)$$

是很有用的．在计算概率时，$P(A)$ 和 $P(\overline{A})$ 之中哪一个容易计算，就先求哪一个，另一个由上述公式求得.

（2）概率的加法公式和乘法公式是计算概率的两条重要运算法则，它们是计算概率的重

要基础．在用概率加法公式时，要清楚两个任意事件和的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

与两个互斥事件和的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\ (AB=\varnothing)$$

使用条件的不同.

(3) 在用概率乘法公式时，首先要弄懂条件概率的概念，其次要弄清事件积的概念．并要注意一般的概率乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\qquad (P(A)\neq 0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\qquad (P(B)\neq 0)$$

和独立事件的概率乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B)\ (\text{事件 } A,B \text{ 独立})$$

使用条件的不同.

注意：1) 对于 n 个相互独立的随机事件 A_1，A_2，…，A_n，则有

$$P(A_1A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$$

2) 应用相互独立随机事件的乘法公式计算相互独立随机事件的和的概率时可用

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\ (A,B \text{ 相互独立})$$

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A}_n)$$

3) (2) 和 (3) 中的公式均为：后者是前者的特殊情况，前者包含了后者．前者使用时不附加条件；后者必须满足特定的条件时，方可使用.

4) 计算条件概率的一般方法是先分别计算 $P(AB)$ 和 $P(A)$，再计算 $P(B\mid A)$；或者先分别计算 $P(AB)$和 $P(B)$，再计算 $P(A\mid B)$.

5) 使用全概公式计算事件 B 的概率的关键是要找到一个完备事件组 A_1、A_2，…，A_n，使得 B 能且仅能与 A_1，A_2，…，A_n 之一同时发生．如果把 A_1，A_2，…，A_n 看成是导致 B 发生的一组原因，那么 A_1，A_2，…，A_n 比较容易找到，而 $P(A_i)$与 $P(B\mid A_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 可以用古典概率及概率的加法、乘法公式计算得出.

5. 用贝努里概型（或二项概型）计算概率

贝努里试验是独立试验中重要的一类试验，它可用来计算在 n 次重复试验中某个事件 A 恰好发生 k $(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率，即

$$P_k(A)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

因为上式中的 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 刚好是二项式的展开式中的第 $k+1$ 项，所以上式也称为二项概型计算公式．由此还可以计算 A 至少发生 k $(0\leqslant k\leqslant n)$ 次或 A 最多发生 k 次的概率，计算公式为

$$P(A\text{ 至少发生 } k \text{ 次})=\sum_{i=k}^{n}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}$$

或

$$P(A\text{ 最多发生 } k \text{ 次})=\sum_{i=1}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}$$

三、例题解析

例 1　设袋内有 10 个编号为 1～10 的球，从中任取一个，观察其号码.

(1) 若设 A = {取得的球的号码是奇数}，B = {取得的球的号码是偶数}，C = {取得的球的号码小于 5}，D = {取得的球的号码大于 5}，则下列事件各表示什么事件？

①$A+B$，　②AB，　③$\overline{C}$，　④$A+C$，　⑤AC，

⑥$\overline{A}\,\overline{C}$，　⑦$\overline{B+C}$，　⑧$\overline{BC}$，　⑨$A-C$，　⑩$C-A$.

(2) 事件 A 与 B 是否互不相容？

(3) 事件 C 与 D 是否互不相容？

(4) 事件 AC 与 $\overline{A}\,\overline{C}$ 是否互不相容？

[分析]　设 ω_i={取得的球的号码为 i}（$i=1,2,\cdots,10$），则这个试验的样本空间为 $U=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$，而 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$ 就是基本事件，它们构成了一个完备事件组．本题所给事件为

A={取得的球的号码是奇数}$=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$

B={取得的球的号码是偶数}$=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8,\omega_{10}\}$

C={取得的球的号码小于 5}$=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$

D={取得的球的号码大于 5}$=\{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$

因此，可利用事件运算的定义和相关性质进行解答.

解 (1)

①$A+B$={取得的球的号码是奇数，或是偶数}，它是必然事件，即 $A+B=U$.

②AB={取得的球的号码既是奇数又是偶数}，它是不可能事件，即 $AB=\varnothing$.

③$\overline{C}$={取得的球的号码大于等于 5}，即 $\overline{C}=\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$.

④$A+C$={取得的球的号码是奇数或是小于 5 的数}，即 $A+C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$.

⑤AC={取得的球的号码是小于 5 的奇数}，即 $AC=\{\omega_1,\omega_3\}$.

⑥$\overline{A}\,\overline{C}$={取得的球的号码是大于 5 的偶数}，即 $\overline{A}\,\overline{C}=\{\omega_6,\omega_8,\omega_{10}\}$.

⑦$\overline{B+C}$={取得的球的号码不是偶数也不小于 5}，也就是{取得的球的号码是大于等于 5 的奇数}，即 $\overline{B+C}=\overline{B}\,\overline{C}=\{\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$.

⑧$\overline{BC}$={取得的球的号码不是小于 5 的偶数}，也就是{取得的球的号码是奇数或大于等于 5}，即 $\overline{BC}=\overline{B}+\overline{C}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$.

⑨$A-C$={取得的球的号码是奇数但不小于 5}，也就是{取得的球的号码是大于等于 5 的奇数}，即 $A-C=\{\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$.

⑩$C-A$={取得的球的号码是小于 5 但不能是奇数}，也就是{取得的球的号码是小于 5 的偶数}，即 $C-A=\{\omega_2,\omega_4\}$.

(2) 事件 A 与 B 互不相容，因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数，即 $AB=\varnothing$，同

时又因为$A+B=U$，所以A与B是对立事件.

(3) 事件C与D互不相容，因为取得的球的号码不会既小于5同时又大于5，即$CD=\varnothing$，但C与D不是对立事件，因为

$$C+D=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}\neq U$$

(4) 因为$AC=\{\omega_1, \omega_3\}$，$\overline{A}\overline{C}=\{\omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$，所以$(AC)(\overline{A}\overline{C})=\varnothing$，但$AC+\overline{A}\overline{C}=\{\omega_1, \omega_3, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}\neq U$，因此，事件$AC$与$\overline{A}\,\overline{C}$互不相容，但不是对立事件.

例2 设A，B，C为三个事件，用事件运算表示以下事件.

(1) A，B，C同时发生；　　(2) A发生但B，C不发生；

(3) A，B发生但C不发生；　　(4) A，B，C至少有一个发生；

(5) A，B，C只有一个发生.

[分析] 要正确表示事件，首先要准确理解所要表示的事件的意义及事件运算的定义．要注意，同一事件可能有不同的表示方式.

解 (1) 事件A，B，C同时发生就是这三个事件的积，即ABC.

(2) 因为事件B不发生为$\overline{B}$，事件C不发生为$\overline{C}$，所以事件A发生但B，C不发生就是A，$\overline{B}$，$\overline{C}$的积，即$A\overline{B}\,\overline{C}$；

又因为事件$\overline{B}\,\overline{C}=\overline{B+C}$，所以事件$A$发生但$B$，$C$不发生也可以表示为：$A(\overline{B+C})$.

(3) 因为事件C不发生为$\overline{C}$，所以事件A，B发生但C不发生可以表示为$AB\overline{C}$.

(4) 事件A，B，C至少有一个发生，是指A，B，C中只有一个发生，或恰有两个发生，或三个都发生．因此，A，B，C至少有一个发生可以表示为$A+B+C$.

(5) 事件A，B，C只有一个发生，是指只有事件A发生，或只有事件B发生，或只有事件C发生．因此A，B，C只有一个发生，可以表示为$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

例3 同时投掷两枚均匀的骰子，求：

(1) 点数之和等于5的概率；　　(2) 点数之和不大于3的概率；

(3) 点数之和大于2的概率.

[分析] 该试验的样本空间$U=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(1,6),\cdots,(6,6)\}$，共有36个样本点（基本事件)，由于骰子是均匀的，每个样本点出现的可能性是相同的．因此，本题所给三个事件的概率，首先要理解事件叙述的意义，再利用概率的定义和运算性质求之.

解 (1) 设事件$A=\{$点数之和等于5$\}$，则A包含4个样本点，即$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$，所以

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(2) 设事件$B=\{$点数之和不大于3$\}$，$B_1=\{$点数之和等于2$\}$，$B_2=\{$点数之和等于3$\}$，则事件B_1包含1个样本点，B_2包含2个样本点，即$B_1=\{(1,1)\}$，$B_2=\{(1,2),(2,1)\}$，所以

$$P(B_1)=\frac{1}{36},\ P(B_2)=\frac{1}{18}$$

由于 $B=B_1+B_2$，且 $B_1B_2=\varnothing$，即 B_1，B_2 是互不相容事件，故由加法公式得

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$$

(3) 设事件 $C=\{$点数之和大于 2$\}$，则 $\overline{C}=B_1$，且

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(B_1)$$
$$=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$$

例 4 已知 10 个产品中有 7 个正品，3 个次品，每次从中任取一个，不放回地取 3 次，求取到两个正品一个次品的概率.

[分析] 设事件 $A=\{$取到两个正品一个次品$\}$，将试验理解为从 10 个产品中一次任取 3 个产品，取法有（基本事件）C_{10}^3，即 $n=C_{10}^3$；而取到两个正品的取法有 C_7^2，取到一个次品的取法有 C_3^1，那么事件 A 包含的基本事件的个数 $m=C_7^2C_3^1$.

解 $P(A)=\dfrac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{40}=0.525$

说明：如果按题目原意分三次取产品，由于要考虑取到的 3 个产品中的一个次品是哪一次取到的，问题就会变得复杂，事件 A 包含的样本点数就不容易计算．所以对这类问题，除了要分清无放回抽取与有放回抽取的区别，还要学会将问题简化.

例 5 设 A，B 是两个随机事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid\overline{A})=0.4$，求：

(1) $P(\overline{A}B)$； (2) $P(AB)$； (3) $P(A+B)$.

[分析] 问题 (1) 可以利用乘法公式 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$ 和加法公式的推论 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 求之.

问题 (2) 可以利用事件积与差之间的运算关系 $AB=B-\overline{A}B$，加法公式的推论 2：“若随机事件 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$”及 (1) 的结果求之.

问题 (3) 可以利用广义加法公式求之.

解 (1) 因为 $P(A)=0.5$，$P(B\mid\overline{A})=0.4$

所以 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=(1-P(A))P(B\mid\overline{A})$
$$=(1-0.5)\times 0.4=0.2$$

(2) 因为 $AB=B-\overline{A}B$，$B\supset\overline{A}B$

所以 $P(AB)=P(B-\overline{A}B)=P(B)-P(\overline{A}B)$
$$=0.6-0.2=0.4$$

(3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$$=0.5+0.6-0.4=0.7$$

说明：在用概率加法与乘法公式时，应先将所求概率的事件用简单的事件表示，因此必须熟练掌握事件之间的关系及其运算.

例 6 一个盒子中放有 5 个球，2 个白球和 3 个黑球．甲、乙两人依次从盒中取出一球（均不再放回），求：

(1) 甲取出的是白球的概率； (2) 乙取出的是白球的概率.

[分析] (1)“盒子中放有 5 个球”说明基本事件的个数是 5. 甲先取且取出的是白球，这一事件涉及 2 个基本事件，利用古典概型求之.

(2) 因“甲、乙两人依次从盒中取出一球”，故事件 $B=\{$乙取出的是白球$\}$，要考虑“甲、乙取到的都是白球”和“甲取出的是黑球，乙取出的是白球”两种情况，即把事件 B 写成两个互不相容事件 AB 与 $\overline{A}B$ 的和 . 再应用加法公式与乘法公式求之.

解 (1) 设事件 $A=\{$甲取出的是白球$\}$，则

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

(2) 设事件 $B=\{$乙取出的是白球$\}$，则 $B=AB+\overline{A}B$，其中 AB 与 $\overline{A}B$ 是互不相容的.

由乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),\ P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$$

在甲取出了一个白球的条件下，盒中还剩一个白球和三个黑球，故 $P(B\mid A)=\frac{1}{4}$.

同理可得，$P(B\mid\overline{A})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. 由此可得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

由加法公式得

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$$

例 7 三家工厂生产的同一种产品放在一起，第二家工厂的产品是第三家工厂产品的两倍，而第一家工厂的产品是第二、三两家工厂产品总和的两倍 . 已知这三家工厂的产品次品率分别为 0.05，0.02 和 0.01，现从这批产品中任取一件，求取出的产品是次品的概率.

[分析] 因为三家工厂生产的产品量和次品率均已知道，且三家工厂生产的产品量构成一个完备事件组，所以本题可以利用全概率公式求之.

解 对于任意取出的一件产品，设事件 $A_i=\{$产品是第 i 家工厂生产的$\}$ $(i=1,2,3)$，$B=\{$取出的产品是次品$\}$. 则

$$P(A_1)=\frac{6}{9},\ P(A_2)=\frac{2}{9},\ P(A_3)=\frac{1}{9},$$

$$P(B\mid A_1)=0.05,\ P(B\mid A_2)=0.02,\ P(B\mid A_3)=0.01$$

因为 A_1，A_2，A_3 是互不相容的，且 $B\subset A_1+A_2+A_3$，由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=\frac{6}{9}\times0.05+\frac{2}{9}\times0.02+\frac{1}{9}\times0.01\approx0.039\end{aligned}$$

说明：使用全概公式计算事件 B 的概率的关键是要找到一个完备事件组 A_1，A_2，…，A_n，使得 B 能且仅能与 A_1，A_2，…，A_n 之一同时发生 . 如果把 A_1，A_2，…，A_n 看成是导致 B 发生的一组原因，那么 A_1，A_2，…，A_n 比较容易找到，而 $P(A_i)$ 与 $P(B\mid A_i)$ $(i=1,$

2，…，n）可以用古典概率及概率的加法、乘法公式计算得出.

例 8　加工某一零件共需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序出次品的概率分别为0.02，0.03，0.05，0.04，各道工序互不影响，求加工出的零件的次品率.

[分析]　因为第一、二、三、四道工序出次品的事件是相互独立的，且事件“加工出的零件是次品”是第一、二、三、四道工序出次品的事件之和．所以，可以利用公式

$$P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

求之.

解　设事件 $A_i=$ {第 i 道工序出次品}（$i=1,2,3,4$），$B=$ {加工出的零件为次品}，则有 $B=A_1+A_2+A_3+A_4$.

因为 A_1，A_2，A_3，A_4 相互独立，那么$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，$\overline{A_3}$，$\overline{A_4}$也相互独立.

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})$

$$=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-0.98\times0.97\times0.95\times0.96=0.133$$

例 9　某篮球运动员投篮的命中率为 0.8，他投篮 6 次，求：

(1) 恰有 4 次命中的概率；　　　　(2) 至少有 2 次命中的概率.

解　这个问题可以看作贝努里概型，即假设运动员每次投篮都是相互独立的，每次的命中率保持不变.

设事件 $A_i=$ {恰有 i 次命中}（$i=0,1,2,3,4,5,6$），$B=$ {至少 2 次命中}.

(1) 由贝努里概型的概率计算公式，得

$$P(A_4)=C_6^4\times0.8^4\times0.2^2=0.246$$

(2) 因为 $\overline{B}=A_0+A_1$，且 $A_0\cdot A_1=\varnothing$

所以，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-(P(A_0)+P(A_1))$

$$=1-(C_6^0\times0.8^0\times0.2^6+C_6^1\times0.8^1\times0.2^5)$$

$$=1-0.000\,064-0.001\,536$$

$$=0.998\,4$$

说明：(1) 独立试验的特点是各次试验 E_1，E_2，…，E_n 是相互独立的．从而若 A_i 是第 i 次试验 E_i（$i=1,2,\cdots,n$）的有关事件，那么 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的，可用事件相互独立的有关结论解题.

(2) 贝努里试验是独立试验中重要的一类试验，它可用来计算在 n 次重复试验中某个事件 A 恰好发生 k（$0\leqslant k\leqslant n$）次的概率．从而也可以计算 A 至少发生 k（$0\leqslant k\leqslant n$）次或 A 最多发生 k 次的概率.

例 10　由以往经验可知，在开工前某台机器正确调整的概率是 0.75，在机器正确调整的情况下，产品的合格率是 0.90，而在没有正确调整的情况下，产品的合格率是 0.3. 某日开工后生产出的第一件产品是不合格品，问机器已经正确调整的概率是多少？

[分析]　全概率公式的作用就在于将一些不好处理的复杂事件，转化成一组事件的和事件，通过已经掌握的加法公式和乘法公式，使问题得解．本例所求为 P(正确调整 | 不合格

品).

由条件概率可知 P(正确调整 | 不合格品) $=P$(正确调整×不合格品) / P(不合格品).

于是需将不合格品率转化成是在正确调整下生产的还是在非正确调整下生产的．用全概率公式求之，使问题得到解决.

解 设 $A=$ {生产的产品为合格品}，$B=$ {机器已经正确调整}，则

$P(B)=0.75$，$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)=1-0.9=0.1$

$P(\overline{B})=0.25$．$P(\overline{A}\mid\overline{B})=1-P(A\mid\overline{B})=1-0.3=0.7$

由全概率公式，得

$$P(\overline{A})=P(B)P(\overline{A}\mid B)+P(\overline{B})P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.75\times0.1+0.25\times0.7=0.25$$

因此，某日开工后生产出的第一件产品是不合格品，而机器已经正确调整的概率是

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)P(\overline{A}\mid B)}{P(\overline{A})}=\frac{0.75\times0.1}{0.25}=0.30$$

例 11 甲、乙两运动员进行乒乓球单打比赛，根据以往比赛的情况，每一局甲胜的概率是 0.6，乙胜的概率是 0.4. 若比赛采用五局三胜制，求甲取胜的概率.

[分析] 根据约定只要甲胜三局，显然最后一局甲胜即可结束比赛．可能情况是：比赛进行三局，甲连胜；或者比赛进行四局，前三局甲胜两局，第四局甲胜；或者比赛进行五局，前四局甲胜两局，第五局甲胜．也只有这三种情况甲胜．当然在每局中他们的胜负都是独立的.

解 五局三胜制，甲在以下三种情况下获胜：

A_1："3：0（甲连胜三局）"；

A_2："3：1（前三局中甲胜两局，负一局，第四局甲胜）"；

A_3："3：2（前四局中甲胜两局，负两局，第五局甲胜）".

每局甲、乙胜负各自是独立的．并记甲胜为"A"，乙胜为"B"，于是有

$$P(A_1)=P(AAA)=0.6\times0.6\times0.6=0.216$$

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(AABA\text{ 或 }ABAA\text{ 或 }BAAA)\\&=0.6\times0.6\times0.4\times0.6+0.6\times0.4\times0.6\times0.6+0.4\times0.6\times0.6\times0.6\\&=3\times(0.6)^2\times(1-0.6)\times0.6\\&=0.259\,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(\text{前四局中甲胜两局，负两局，第五局甲胜})\\&=6\times0.6^2\times(1-0.6)^2\times0.6\\&=0.207\,36\end{aligned}$$

所以甲胜的概率为

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.216+0.259\,2+0.207\,36=0.682\,56$$