铁路职工教材

高中平面几何教学参考材料

杭州铁路局编

人民铁道出版社

鉄路职工教材

高中平面几何教学参考材料

杭州鉄路局編

人民鉄道出版社出版

（北京市霞公府17号）

北京市書刊出版业营业許可証出字第010号

新　华　書　店　发　行

人民鉄道出版社印刷厂印

書号1603　开本 $787\times1092\ \frac{1}{32}$　印張 $2\frac{5}{8}$　字数51千

1960年2月第1版

1960年2月第1版第1次印刷

印数 0,001—2,000 册

統一書号：K·7043·32　　定价（4）0.14元

出版者的話

我社在1958年9月出版了高小到初中一貫制的鉄路职工教材后，受到各路局职工的欢迎，很多单位的紅专学校、业余学校采用为基础教材的課本。全国鉄路教育工作会議后，鉄路职工教育工作又有了迅速的发展，要求出版高中到大学阶段的基础教材，更加迫切了。杭州鉄路局本着大跃进的精神，在該局党委的領导下，組織了管内职工业余学校的教师及有关人員，根据党的教育为无产阶級政治服务，教育与生产劳动相結合的方針，結合职工业余教育的特点，編写了高中的及部分大学的基础教材。这套教材包括：

1. 高中語文、高中語文教学参考材料各一至六册；
2. 高等数学上、下两册（編写中）；
3. 高中代数、高中代数教学参考材料各上、下两册；
4. 高中平面几何、高中平面几何教学参考材料各一册；
5. 高中立体几何、高中立体几何教学参考材料各一册；
6. 高中三角、高中三角教学参考材料各一册；
7. 普通化学、普通化学教学参考材料各一册；
8. 高中物理、高中物理教学参考材料各上、中、下三册；

这套教材由于編写和出版时間仓猝，内容还有一定的缺点，希望教授这些課本的教师及使用这些課本的职工多提意見，以便进一步修改补充。

1959年8月

説　明

为了貫徹党的"教育为无产阶級政治服务，教育与生产劳動相結合"的方針，适应鉄路运輸事业和教育工作发展的需要，在党的領导下，組織教师編写了鉄路职工教材的教学参考資料。主要目的系帮助教师鑽研和掌握教材，提高教学質量。

本書是根据現行"鉄路职工教材、高中平面几何"的內容按单元編写的，每一单元共分三大項：

一、教学目的——是根据數学教学大綱的精神和各单元教材的內容而提出的。

二、教材研究——包括有教材的主要精神、前后联系、教学重点，課文內容的分析等等。

三、教学建議——是按各节教材分別来說明的；每一节中提出了"教学要求"及"教学注意事項"。

此外，在本書的最后部份还有兩个附录：

一、教学進度表：本書拟訂的教学时間共为40課时（学期复习、測驗在外），每課时以45分鐘計算。

二、部份习題的解法：編写本書时，虽力求适合于一般鉄路职工业余学校教师的需要，但因各校的具体情况不同，教师們还需从实际出发，灵活运用本書所提供的材料。关于习題方面，可以根据学員工作上的需要，酌量补充一些有关的生产題。

由于編写倉促，加以編写人員的水平所限，本書內容上难免有很多錯誤和缺点，希望教师們多多提出意見，以便改正。

目　录

第一章　相似形

第一单元　相似三角形

一、教学目的：

1. 在复习初中几何已有的知識的基础上，使学員进一步了解和掌握相似三角形的性質，并能熟練地应用它們。

2. 使学員熟悉关于比例綫段的定理。

二、教材研究：

1. 本单元是在初中几何已講过的相似三角形的基础上，复习相似三角形的定义与判定方法，并进一步研究相似三角形的一般性質与应用，以及关于比例綫段的定理。

本单元的教材很重要，它是后面所研究的“相似多边形”、“三角形中及圓中各綫段間的相互关系”等教材的基础。所以，在教学时，对于这几节的內容，必須使学員透徹的領会，为今后学习准备条件。

2. §1引言中介紹了八个比例性質，这些性質为今后学习时的基础，它們的証明如下：

（1）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，等式兩边各乘bd，则得$ad=bc$；

（2）如果$ad=bc$，等式兩边各除bd，则得$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；

（3）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，等式兩边各乘$\frac{b}{c}$，则得$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

等式兩边各乘$\frac{d}{a}$，则得$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；

（4）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，等式兩边各乘$\frac{bd}{ac}$，则得$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

（5）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，等式兩边各加1，则得$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

(6) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，等式兩边各減1，則得$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$；

(7) 把(5)÷(6)，則得$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$；($a\neq b$，$c\neq d$)

(8) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，

設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$，

則　$a=bk$，$c=dk$，$e=fk$；

∴　$a+c+e=(b+d+f)k$

即　$\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$，

∴　$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$。

3. §2定理1～3是初中几何里已經討論过的教材，但在教学时，应該着重复习。

定理1（初中几何里已証明过）是研究相似三角形的基础；它不但說明了相似三角形的存在，而且还显示出了“相似形和平行綫这兩个概念之間是有着非常紧密的內在关联的”。

定理2是三角形相似的判定定理。初中几何課本对于定理2的i、ii、iii，仅証明过i，至于ii与iii的証明如下：

ii、已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle A=\angle A_1$，

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$（图1）。

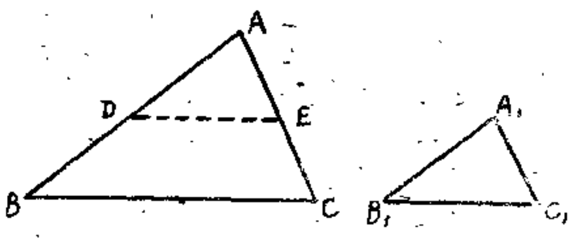

图　1

求証：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$。

証明：在AB上截取綫段AD，使$AD=A_1B_1$；并且作

$DE /\!/ BC$交AC于E。则$\triangle ABC \sim \triangle ADE$，

$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$；

但 $AD=A_1B_1$（作图），$\therefore \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{AE}$。

$\because \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$（已知），

$\therefore \quad \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad AE=A_1C_1$。

在 $\triangle ADE$和$\triangle A_1B_1C_1$中，

$AD=A_1B_1$，$\angle A=\angle A_1$，$AE=A_1C_1$；

$\therefore \quad \triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$。

$\therefore \quad \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$。

上述的証法是通过兩个主要的步驟：

（1）由$DE /\!/ BC$来推出$\triangle ABC \sim \triangle ADE$；

（2）由$\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$及$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 来推出$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$。定理2的 i、ii、iii都是参照上述步驟来証明的。

定理 3 中的 i 和 ii 是定理 2 中 i 和ii的特殊情形；由定理 2 的 i 和ii就可以直接推出定理 3 的 i 和 ii。但是定理 3 的 iii 就不能由定理 2 推出来；它的証明也可以通过上面的兩个步驟，即

（1）由$DE /\!/ BA$来推出$\triangle ABC \sim \triangle EDC$；

（2）由$\triangle EDC \cong \triangle A_1B_1C_1$及$\triangle ABC \sim \triangle EDC$来推出 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$（图 2）。

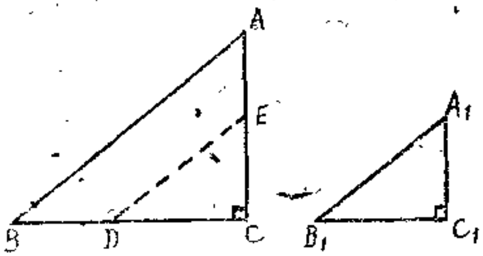

图 2

4．§3的定理說明了相似三角形具有“对应高和对应边成比例”的性質。实际上，我們可以証明：在相似三角形中，一切对应的綫段（如对应角的平分綫、对应边上的中綫、周長、外接圓及内切圓的半徑等）都和对应边成比例。

5．根据相似三角形原理，除应用在測量方面（如§2的例1和例3）外，課本中又介紹了它对制造仪器及工具方面的应用。§4中的比例规与对角綫尺就是根据相似三角形原理来制造的。在講解§4时应該清楚地說明这兩种仪器的制作原理、構造及用法等，最好結合这兩种仪器的实物来向学員講解。

6．§5的“关于比例綫段的定理”，是在相似三角形的基础上推出的。定理1的結論不仅是$\frac{OC}{OC_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}$，而且依等比定理还可以推得：$\frac{OC}{OC_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{OD}{OD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{CE}{C_1E_1}=\frac{OE}{OE_1}$。定理2是定理1的逆定理，可以由比例的合比性質导出。通过§5定理，可以看出平行綫与比例綫段有密切的关系，并且，利用这种关系，我們可以得到証题的方法如下：

（1）要証綫段成比例，可以借助于平行綫(已有的或添作的)。

（2）要証兩直綫平行，可以設法先証出綫段成比例，然后根据§5中定理2。

7．§6作图题（1）和（2）都是根据§5的定理1来解的，作图题（2）“已知三綫段a、b、c，求作綫段x，使$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$”与作图题（1）是同一类問题，并且是以作图题（1）为基础的。

8．我国的古算書里，曾有很多应用相似三角形的理論来进行測量的方法；这些測量方法，古人称之为“重差术”。到了三国时，經魏刘徽的研究，重差术更趋完备；課本上习题一的第16題就是刘徽所著的重差术（又名海島算經）的第一題，这一題可在本单元复习課时講解，使学員了解我国古代数学家在几何学方面的成就。

9．在高中代数引进实数时，已由数軸說明了无理数的存在性和唯一性，并且从数軸上可以知道：量数是一个无理数的綫段也是存在且唯一的。鉴于学員从代数开始阶段已了解“量数是一个无理数的綫

段是存在的”，又考虑到本教材与初中几何銜接的系統，所以在本单元中不再討論“公度”的概念。今后在解題时，如果遇到无理数，只要說明同样可以进行运算就可以了。

三、教学建議（按节分别說明）：

§1 引言

1．教学要求：使学員了解幷掌握比例的性質。

2．教学注意事項：

（1）說明：在初中几何里已經初步学过一些关于相似三角形的知識，現在我們要进一步研究相似形，为此，就必須掌握§1中的比例的性質，为今后学习打好基础。

（2）关于比例的一些定理的証明，可以参考前面教材研究的2。

（3）在比例式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（也可写成$a:b=c:d$）中，說明：a和d又叫做比例的外項；b和c又叫做比例的內項。

指出：当比例式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$成立时，我們說d是a、b、c的第四比例項；但不能說，d是b、a、c（或c、a、b）的第四比例項。

（4）对于任一已知比例式，我們都可以根据比例的性質来加以变化；但是，必須明确，比例式中的各項幷不是可以任意交换的，例如，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$就不能变换成$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$。

（5）类似下面的問題，可以結合教材当作例題来講解：

① 已知$\frac{x+5}{x}=\frac{8}{3}$，求$x$。

② 已知$\frac{x+y}{y}=\frac{5}{4}$，求$\frac{x}{y}$。

③ 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{e}$，求証$d=e$。

④ 設綫段a、b之和与差之比为$\frac{12}{5}$，$a=6$米；求b長。

解：$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{12}{5}$　∴　$\dfrac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}=\dfrac{12+5}{12-5}$，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{17}{7}$，　∵　$a=6$米，　∴　$b=\dfrac{6\text{米}\times 7}{17}=2\dfrac{8}{17}$米。

（6）习题一第1～4题，可选擇一些作为学員的課內或課外作业。

§2　相似三角形的定义和判定方法

1．教学要求： 在初中几何的基础上，复习相似三角形的定义和判定方法，使学員掌握这些定理，并熟悉用这些定理来解决有关的問題。

2．教学注意事項：

（1）在复习相似三角形定义时，应使学員注意下列几点：

① 相似三角形的对应元素这个名称。

② 如果$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$；

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}\text{（图 3）。}$$

那末在表示这兩个三角形相似时，应写成$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，不要写成$\triangle ABC\backsim\triangle C_1A_1B_1$，或者$\triangle ABC\backsim\triangle A_1C_1B_1$等等。

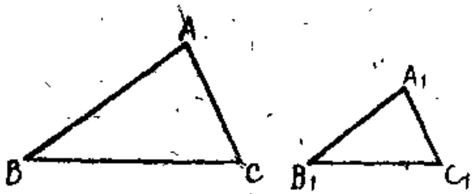

图　3

③ 在把相似三角形的对应边列成比例的时候，要注意把一个三角形的各边当作等比的前項，把另一个三角形的各边当作后項，不要顚倒。

（2）指出定理1是研究相似三角形的基础（也是相似三角形判定方法的輔助定理，在初中几何里已証明过，不需要再加証明），說明它在下面几种情形下都能成立（图4中設$DE\parallel BC$，則$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$）。

接着講解例1来說明定理1的应用。

（3）讓学員回忆一下，在初中几何里，我們要判定兩个三角形

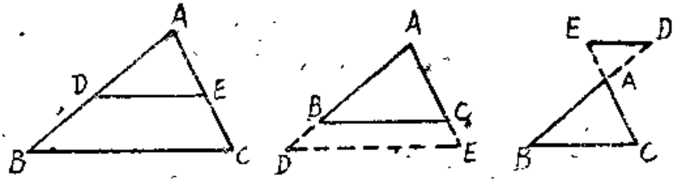

图 4

相似，已学过的有哪些定理？随后归納成課本中的定理2～3。

（4）定理2的i在初中課本上已經証明过，可以提問学員这个定理是怎样証明的？于是說明根据这个方法（即通过两个主要步驟，詳見本单元教材研究的3）同样可以証明定理2的ii和iii。証明过程可以結合提問来进行，使学員能熟悉比例的变換，并能提高学員的解題能力。

（5）指出定理3的i、ii，是定理2中i、ii的特殊情形。定理3的iii的証明，可以啓发学員自己来进行。

（6）例2（是初中几何第四章习題四第36題）講解后，說明：运用相似三角形定理来証明比运用直綫性質証明要簡捷，同时不必添置輔助綫。

（7）講解例3时，应简单說明一下平板仪的構造（平板仪，三脚架，照准器，移点器，方框罗針等），并結合例題来介紹一些測量的常識。

（8）习題一中第5～10題，可选擇作为学員課堂或課外作业。

§3 相似三角形中的对应綫段

1. 教学要求： 使学員了解和掌握相似三角形的性質——相似三角形中一切对应綫段和对应边成比例。

2. 教学注意事項：

（1）§3的定理是以§2中定理3的i与相似三角形的定义为依据来进行証明的；証明过程可以讓学員說出。

（2）指出：在相似三角形中，一切对应的綫段（如对应角的平分綫、对应边上的中綫、周長、外接圓及內切圓的半徑等）都和对应边成比例。关于这些性質的証明很簡单，可以讓学員練习。

（3）关于“在相似三角形中，一切对应的綫段和对应边成比例”，可以再举些例子来説明，例如：

已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，$BD=\frac{1}{3}BC$，$BE=\frac{3}{5}BC$；

$$B_1D_1=\frac{1}{3}B_1C_1,\ B_1E_1=\frac{3}{5}B_1C_1 \text{（图5）}$$

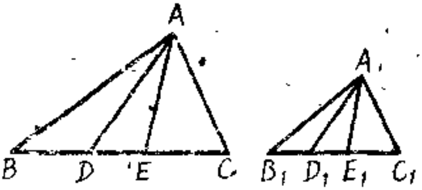

图　5

求証：$\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{AE}{A_1E_1}$

証明：$\because$ $BD=\frac{1}{3}BC$，$B_1D_1=\frac{1}{3}B_1C_1$，

$$BE=\frac{3}{5}BC,\ B_1E_1=\frac{3}{5}B_1C_1,$$

$\therefore$ $\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$，$\frac{BE}{B_1E_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$。

$\because$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$；$\therefore$ $\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$，$\frac{BE}{B_1E_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$。

$\because$ $\angle B=\angle B_1$，$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$。

$\therefore$ $\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$。又 $\triangle ABE \backsim \triangle A_1B_1E_1$，

$\therefore$ $\frac{AE}{A_1E_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$；$\therefore$ $\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{AE}{A_1E_1}$。

（4）下面問題可作为学員課外作业。

① 求証：相似三角形对应边上的中綫的比等于它們的对应边的比。

② 求証：相似三角形外接圓半徑的比等于它們的对应边的比。

§4　比例規与对角綫尺

1．教学要求：使学員了解和掌握比例規及对角綫尺的原理和用

法。

2. 教学注意事項:

（1）在講課时，要准备較大的教学用的比例規和对角綫尺各一，对于比例規和对角綫尺，应該講清以下三点:

① 制作的原理。

② 構造（材料、結構和制法等）。

③ 用法。

（2）在教学比例規的时候，可用“三等分一已知綫段”为例来說明——先問学員用初中学过的方法怎样作，然后再用比例規作給学員看。最后說明比例規的主要用途是按照定比来等分一条綫段或者把一条綫段扩大若干倍。

（3）关于对角綫尺的用法，最好用教具結合課本上例題来說明。

（4）如有可能，也可讓学員自制比例規（用木制或竹制）和对角綫尺（用紙画成）。

§5 关於比例綫段的定理

1. 教学要求: 使学員了解比例綫段的定理，認識平行綫与比例綫段之間的关系。

2. 教学注意事項:

（1）在教学§5定理1的时候，可以先复习初中几何里曾經学过的平行綫截角兩边的定理——如果在角的一边上截取相等的綫段，并且过各綫段的端点作平行綫与角的另一边相交；那末这些平行綫在角的另一边上所截得的綫段也相等（鉄路初中几何課本§51图140），并且提問这定理是怎样証明的；然后向学員提出如果在角的一边上所截取的綫段不是相等而是成定比（例如 1:2:3）的时候，那末平行綫在另一条边上所截的綫段怎样呢？（仍然成定比1:2:3）

于是导出§5定理1的內容，这定理的証明可以讓学員說出。

（2）向学員指出:

① 初中几何§51定理就是本定理的特例;

② 如果一个角的兩边被兩条平行綫所截，那末就得到§5定理的推論。

（3）定理2是推論的逆定理，它常常用作判定兩直綫平行的准則。

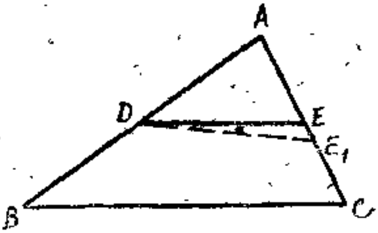

图 6

这个定理也可以这样来証明："先作$DE_1 \parallel BC$，然后再証明DE和DE_1重合就可以了。

已知：在$\triangle ABC$中，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（图6）；

求証：$DE \parallel BC$

証明：过D作$DE_1 \parallel BC$，

$\therefore \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE_1}{E_1C}$。

但 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（已知），

$\therefore \quad \frac{AE_1}{E_1C}=\frac{AE}{EC}$。

由此：$\frac{AE_1+E_1C}{E_1C}=\frac{AE+EC}{EC}$，

即：$\frac{AC}{E_1C}=\frac{AC}{EC}$，

$\therefore \quad E_1C=EC$，因而E_1和E重合，

$\therefore \quad DE \parallel BC$。

（4）习題一第11題可当例題与学員一同来解，第12、13題作为課外作业。

§6 作图題

1. 教学要求：使学員了解和掌握"分已知綫段成已知比"及"作已知三綫段的第四比例項"的作图法。

2. 教学注意事項：

（1）本节开始的时候，可以讓学員說出上节（§5）所講的定理1的內容，为教学§6（1）（2）兩个作图題作好准备。

（2）作图題（1）（2）在教学时可以当作一个問題来提出，

讓学員考慮怎样解决。

（3）关于作图題（2），当实际作图的时候，在角ABC的兩条边上，綫段b和c的位置可以互换（内項可以互换），并且綫段DE也可以不順着BD的方向截取，而在相反的方向截取，但是在作图以后，要檢查一下所截的四条綫段是不是比例綫段。

（4）习題一第14～15題，可作为学員作业。

第二单元　相似多边形

一、教学目的：

1. 在相似三角形的基础上，进而研究多边形的相似，使学員了解和掌握多边形相似的判别法及相似多边形的性質。

2. 闡明图形的相似变换的概念，使学員了解和掌握对已知图形施行相似变换的方法。并且掌握放縮尺的原理和用法。

二、教材研究：

1. 本單元以研究多边形的相似，图形的相似变换为主要內容。由于本單元教材与前一單元所講的相似三角形的內容有密切的联系，所以，在本單元的教学中，应該隨时联系前一單元的教材。

2. §7所講的相似多边形的定义和相似三角形的定义是完全一致的。但是相似三角形只是相似多边形的一个特例，而不是和相似多边形并立的。

判定三角形相似的几个方法是不能适用于一般的多边形（边数多于3的）；这因为：就兩个边数多于3的多边形来講，可以有“各对应角相等，但各对应边不成比例”及“各对应边成比例，但各对应角并不相等”的情形。例如課本§7的图12，所画的正方形与矩形是各角相等但对应边不成比例的兩个四边形，所画的菱形与正方形是各对应边成比例但各对应角不相等的四边形。所以只根据“各角对应相等”或者“各对应边成比例”这兩种条件之一是不足以断定兩个多边形相似的（除非它們是三角形）。必須强調：根据定义来判断兩个多边形相似时，必須証明：（1）对应角分别相等；（2）对应边成比例。

3. 从§8作图題可以看出它的作法是以“用对角綫（自一个頂点引出的）把多边形分成若干个三角形”和“用平行綫作相似三角形”

为基础的。

从这个作图题的証明中，我們还可以由所証得的$\frac{AC_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{AD_1}{AD}$而明显地看出：相似多边形具有“对应的对角綫与对应边成比例”的性質。

4．§9所講的是相似多边形的性質。§9定理 2 是根据相似多边形的对应边成比例及等比定理（§1的（8））来証明的；它对于三角形也能适用。

5．根据 §10 中所講的作图方法，作出一个图形，使它和已知图形相似。叫做图形的相似变换。但应該注意：并不是用任何方法来作出和已知图形相似的图形都叫做相似变换。相似变换是用 §10 里所講的方法来作出的。

利用这样的法則，我們不但作成了和已知图形相似的图形，而且这个所作成的图形也和已知图形具有一定的位置关系；就多边形来講，这种位置关系就是：（1）各边对应平行，（2）过对应頂点的直綫相交于一点。

6．在作“图形的相似变换”时，相似中心 O 可以取在形外（如图 7），可以取在形內（如图 8），可以取在一条边上（如图 9），也可以取在一个頂点的位置（如图10）。

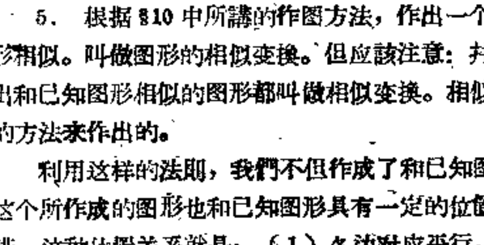

图 7

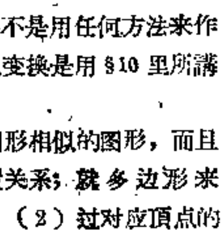

图 8

7．在进行多边形的相似变换时，相似系数 K 并不一定是正整数。但是，在講 §10 时，为了作图的便利，我們不妨暂时說 K 是正整数。如果 K 是大于 1 的数，則相似变换的結果就得到比原多边形为大的新图形；如果 K 是小于 1 的数，則相似变换的結果就得到比原多边