高等学校"十一五"规划教材/经济管理类及相关学科数学教材

经济数学基础及应用

——线性代数及概率论

赵萍 编著

哈爾濱工業大學出版社

经济数学基础及应用

高等学校“十一五”规划教材/经济管理类及相关学科数学教材

经济数学基础及应用

——线性代数及概率论

赵萍　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

本书共分两部分，第一部分为线性代数，包括行列式、矩阵、线性方程组（n 维向量）、二次型、矩阵的特征值和特征向量、投入产出数学模型；第二部分为概率论与统计，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本分布及参数估计、假设检验及方差分析、回归分析，每章均配有类型题、难度较大的综合范例，以及适量的习题及参考答案。

本书内容精练、重点突出、通俗易懂，既可作为高等学校经济类、管理类及相关学科本科、专科的基础课教材，又可供经济类、管理类复习考研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础及应用——线性代数及概率论/赵萍编著.
哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.10
ISBN 7-5603-2395-2
Ⅰ.经…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③概率论-高等学校-教材　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 116553 号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　王勇钢
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 25.625　字数 464 千字
版　　次　2006 年 10 月第 1 版　2006 年 10 月第 1 次印刷
印　　数　1~4 000 册
定　　价　29.80 元

前　言

2002年10月出版的《经济数学基础及应用——一元、多元函数微积分及应用》一书，受到了广大经济类、管理类等学生和社会读者的欢迎，一定程度地满足了他们学习和研究的需要。

由于数学内容具有连续和系统性，为进一步满足广大读者的要求，我们在学校和出版社的支持下，又编写了《经济数学基础及应用——线性代数及概率论》一书，供经济类、管理类等学生学习参考。本书被列为哈尔滨工业大学“十一五”重点教材。

本书内容按照教学大纲的要求，完整系统地介绍了线性代数及概率论与统计的基础知识。主要目的是培养学生熟练运算能力、抽象概括问题能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力。因此，我们本着循序渐进、深入浅出、通俗易懂的指导思想，从注重培养学生综合运用所学知识、分析解决实际问题的能力出发，在系统介绍理论基础的同时，对每章中的计算方法和技巧都进行了归纳总结；为扩展类型、适当拔高，在每章中还选入了相当数量的范例，以帮助学生扩展视野。

由于水平有限，加之时间仓促，书中疏漏与不足之处在所难免，希望读者多提宝贵意见，以便使本书更加完善。

作　者

2006.7

于哈尔滨工业大学

目　　录

第 1 篇　线性代数

第 1 章　行列式 …… 1
1.1　二阶、三阶行列式 …… 1
1.2　n 阶行列式 …… 5
1.3　行列式的性质 …… 9
1.4　行列式按行(列)展开 …… 16
1.5　克莱姆法则 …… 23
1.6　范例 …… 26
习题 …… 36
第 2 章　矩阵 …… 40
2.1　矩阵的概念 …… 40
2.2　矩阵的运算 …… 43
2.3　分块矩阵 …… 52
2.4　逆矩阵 …… 57
2.5　矩阵的初等变换 …… 62
2.6　矩阵的秩 …… 70
2.7　范例 …… 73
习题 …… 81
第 3 章　线性方程组 …… 85
3.1　线性方程组的消元法 …… 85
3.2　线性方程组解的判定 …… 88
3.3　n 维向量空间 …… 94
3.4　向量间的线性关系 …… 96
3.5　线性方程组解的结构 …… 109
3.6　范例 …… 118
习题 …… 132
第 4 章　二次型 …… 137
4.1　二次型与对称矩阵 …… 137
4.2　二次型的标准形 …… 139

4.3 矩阵的合同 …… 143
4.4 二次型与对称矩阵的有定性 …… 144
4.5 范例 …… 151
习题 …… 155
第 5 章 矩阵的特征值和特征向量 …… 157
5.1 预备知识 …… 157
5.2 矩阵的特征值和特征向量 …… 161
5.3 相似矩阵 …… 166
5.4 矩阵级数的收敛性 …… 175
5.5 线性方程组的迭代解法 …… 177
5.6 范例 …… 181
习题 …… 192
第 6 章 投入产出数学模型 …… 194
6.1 投入产出表与平衡方程组 …… 194
6.2 直接消耗系数与完全消耗系数 …… 196
6.3 平衡方程组的解 …… 200
6.4 投入产出表的编制 …… 204
习题 …… 206

第 2 篇 概率论与统计

第 7 章 随机事件及其概率 …… 207
7.1 随机事件 …… 207
7.2 事件的关系及运算 …… 209
7.3 事件的概率 …… 211
7.4 条件概率 …… 219
7.5 事件的独立性与贝努里概型 …… 222
7.6 范例 …… 225
习题 …… 231
第 8 章 随机变量及其分布 …… 233
8.1 随机变量的概念 …… 233
8.2 离散型随机变量及其概率分布 …… 234
8.3 随机变量的分布函数 …… 236
8.4 连续型随机变量及其概率密度 …… 239
8.5 几种重要分布 …… 242
8.6 随机变量函数的分布 …… 254

8.7 二维随机变量 …… 257
8.8 条件分布与随机变量的独立性 …… 264
8.9 二维随机变量函数的分布 …… 267
8.10 范例 …… 271
习题 …… 285
第 9 章 随机变量的数字特征 …… 288
9.1 数学期望 …… 288
9.2 方差 …… 294
9.3 协方差与相关系数 …… 300
9.4 矩与协方差矩阵 …… 303
9.5 范例 …… 304
习题 …… 314
第 10 章 大数定律和中心极限定理 …… 316
10.1 大数定律 …… 316
10.2 中心极限定理 …… 319
10.3 范例 …… 322
习题 …… 325
第 11 章 样本分布及参数估计 …… 327
11.1 样本分布 …… 327
11.2 参数估计 …… 333
11.3 范例 …… 341
习题 …… 349
第 12 章 假设检验及方差分析 …… 351
12.1 假设检验 …… 351
12.2 方差分析 …… 359
12.3 范例 …… 365
习题 …… 368
第 13 章 回归分析 …… 371
13.1 一元线性回归分析 …… 371
13.2 可线性化的非线性回归 …… 375
13.3 多元线性回归 …… 377
习题 …… 378
附表 …… 380
附表 1 泊松分布累计概率值表 …… 380

附表 2　标准正态分布分位函数值表 …………………………… 381
附表 3　χ^2 分布表 …………………………………………… 382
附表 4　t 分布表 ………………………………………………… 384
附表 5　F 分布表 ………………………………………………… 385
附表 6　相关系数检验表 ………………………………………… 392
参考答案 ……………………………………………………… 393

第1篇　线性代数

第1章　行列式

行列式是一个重要的概念，它在数学的许多分支中都有着非常重要的作用。本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算，以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

在中学代数中，我们学过用消元法解二元和三元线性方程组。

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1, x_2 是未知量，a_{11}, a_{21} 为 x_1 的系数，a_{12}, a_{22} 为 x_2 的系数，b_1, b_2 为常数项。

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 和 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后将所得方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并称之为一个二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

在一个行列式中，横排叫行，纵排叫列。其中，a_{11}, a_{12} 和 a_{21}, a_{22} 分别叫做该行列式的第 1 行和第 2 行，而 a_{11}, a_{21} 和 a_{12}, a_{22} 依次叫做该行列式的第 1 列和第 2 列。数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.2)的元素。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列。

由二阶行列式的定义，我们可以用对角线法则来记忆，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

把 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为副对角线，则二阶行列式的值等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差。

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则方程组(1.1)的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

注意　这里的分母 D 恰好是由方程组(1.1)的系数确定的，D_1 是由 b_1, b_2 替换 D 中的 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的行列式，D_2 是由 b_1, b_2 替换 D 中的 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的行列式。

【例 1】　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

【解】

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

所求方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

【例 2】 设 $$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

问:(1) 当 λ 为何值时 $D = 0$;

(2) 当 λ 为何值是 $D \neq 0$。

【解】 $$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ 或 } \lambda = 3$$

因此,(1) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时,$D = 0$;(2) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时,$D \neq 0$。

【例 3】 求 $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。

【解】 $$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1.1.2 三阶行列式

我们用

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示一个三阶行列式,它表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再赋以正负号,其规律遵循下述对角线法则:

如图 1.1 所示,三条实线上三元素乘积赋以正号,三条虚线上三元素乘积赋以负号。

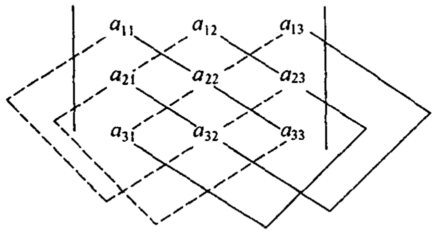

图 1.1

如果我们用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，可得到与二元线性方程组类似的结论，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

【例 4】 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

【解】 $D = 1^3 + 2^3 + 3^3 - 1 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 = 18$

【例 5】 a, b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

【解】
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

若 $a^2 + b^2 = 0$，则 a, b 必同时为零。因此当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时，行列式等于零。

【例 6】 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

【解】 方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$,解得 $x = 2$ 或 $x = 3$。

【例 7】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

【解】

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

由 $a^2 - 1 > 0$ 可得 $|a| > 1$。

因此,$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $|a| > 1$。

1.2 n 阶行列式

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍有关全排列的知识,然后给出 n 阶行列式的定义。

1.2.1 全排列及其逆序数

我们用一一列举的方法可以得到 1,2,3 这三个数不同顺序的序列:123,231,312,132,213,321,其中每一个序列都称为 1,2,3 这三个元素的全排列(也称排列)。

【定义 1.1】 把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列)。

【定义 1.2】 对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说构成 1 个逆序,一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

例如,排列 23154 中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,逆

序数为 3,记为 $N(23154)=3$,所以 23154 为奇排列。同样我们可以得出,23145 是偶排列。

由 1,2,3 组成的 6 种排列中,是奇排列的有 132,213,321,是偶排列的有 123,231,312。

【例 1】 求排列 32514 的逆序数。

【解】 3 在 2 的前面,3,2,5 在 1 的前面,5 在 4 的前面,故逆序数为 $1+3+1=5$,记为 $N(32514)=5$。

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种变换称为对换,将相邻两个元素对换,叫做相邻对换。

【定理 1.1】 任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变。

【证】 先证相邻对换的情形。

设排列 $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,得到排列 $a_1\cdots a_l b a b_1\cdots b_m$,可以看出,当 $a<b$ 时,经过对换后的排列的逆序数增加 1,当 $a>b$ 时,经过对换后的排列的逆序数减少 1,所以对换后的奇偶性改变。

再证一般情况。

设排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 经过 a 与 b 的对换得到排列 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$,这次对换可以看成排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 经过 m 次相邻对换,调换成 $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$, 再经过 $m+1$ 次相邻对换, 调换成 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$, 也就是说, 经过 $2m+1$ 次相邻对换, 排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变为 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$,所以这两个排列奇偶性相反。

例如,奇排列 213 经过对换 1 与 3 变成偶排列 231。

【定理 1.2】 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的排列共有 $n!$ 个,其中奇偶排列各占一半。

【证】 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的排列共有 $n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$ 个。设其中奇排列有 p 个,偶排列有 q 个。

若每一个奇排列都进行一次同样的对换,例如对换 $(1,n)$,则 p 个奇排列都变为偶排列,于是 $p\leqslant q$;若每一个偶排列都进行一次同样的对换,则 q 个偶排列都变为奇排列,于是 $q\leqslant p$,所以 $p=q=\frac{n!}{2}$。

1.2.2 n 阶行列式的定义

前面我们定义了二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们以三阶行列式为例。可以看出等式右边的每一项都是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行,不同的列。不看正负号,右边的每一项可以写成 $a_{1p_1}, a_{2p_2}a_{3p_3}$。列标的排列 $p_1p_2p_3$ 是由 1,2,3 三个数组成的某个排列,这样的排列共有 6 个,对应着等式右边的 6 项,其中带正号的三项列标排列是 123,231,312,带负号的三项列标排列是 132,213,321。

经过计算可知,123,231,312 是偶排列,132,213,321 是奇排列,因此三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中,t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 的对应项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 取和。

【定义 1.3】 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。

它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号,因此 n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。

其中,t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,记为 $t = N(p_1p_2\cdots p_n)$。由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而这 $n!$ 个排列对应项的和为 $\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$,当 $n = 1$ 时,一阶行列式 $|a| = a$。

【例 2】 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有4!项,即24项。

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为1234,列标排列为1234,四个元素取自不同行不同列,列标排列的逆序数为0。即 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 的一项且前面为正号。

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为1234,列标排列为4312,元素取自不同行不同列,且列标排列逆序数为5,即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 的一项且前面为负号。

而 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有两个元素取自第四列,它不是 D 的一项。

【例 3】 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【证】 由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为0的元素 a_{ip_i},其下标应有 $p_i\leqslant i$,即 $p_1\leqslant 1, p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为0的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,此项符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$,所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

我们将上三角形行列式和下角形行列式统称为三角形行列式。