普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学分析简明教程

第二版

下册

邓东皋　尹小玲　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学分析简明教程

第二版

下册

邓东皋　尹小玲　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书第一版是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。第二版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版的基础上修订而成。教程用“连续量的演算体系及其数学理论”的全新观点统率全书，在保留传统数学分析基本内容的前提下，比较好地处理极限与微积分演算及应用的关系，建立了一个既循序渐进、生动直观，又保持了严密性的系统，与传统的教程十分不同。本教程对概念、方法的来源与实质，有许多独到的、精辟的见解。教程分上、下两册，本书为下册，主要内容包括数项级数、广义积分、函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续性、偏导数与全微分、隐函数存在定理、极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分间的联系与场论初步等。本书是作者集几十年教学与教改经验之力作，在教学改革实践中取得较好的效果。

本书可作为高等学校理科及师范学校数学学科各专业的教科书，也可供计算机学科、力学、物理学科各专业选用及社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析简明教程．下册／邓东皋，尹小玲编著．
2版．—北京：高等教育出版社，2006.12
ISBN 7-04-019954-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①邓…②尹…　Ⅲ.数学分析－高等学校－教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第122889号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1999年6月第1版
开　　本	787×960　1/16		2006年12月第2版
印　　张	25.75	印　　次	2006年12月第1次印刷
字　　数	480 000	定　　价	29.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19954-00

再版说明

本书第一版是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。第二版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版的基础上修订而成。本版最主要的改动是，在实数基本定理证明后不久，便证明了区间套定理，然后，闭区间上连续函数三大定理都是用区间套定理证明的，改变了第一版中直接用实数基本定理证明的讲法。我们认为这样改动，初学者比较容易接受。

其他地方都只是根据近年的教学实践，为了更适合于教学，做了些局部的改动。

感谢林伟、姚正安、胡建勋、赵育求、关彦辉以及万伟勋等同仁为本书再版提出的宝贵意见。

邓东皋　尹小玲

2005年7月28日

目　　录

第十章　数项级数

本章是无穷级数理论的第一章，讲述无穷级数理论的基本概念与基本知识，是无穷级数理论的基础．直观地说，无穷级数就是无穷个数相加，能加出一个数来的级数叫收敛级数，加不出一个数来的级数叫发散级数．因此，收敛与发散是两个最基本的概念．如何判定一个级数收敛或发散是本章的主要内容．无穷级数是无穷项的和，比较有限和与无限和的共同点与差异，是级数理论研究的基本问题，在整个级数理论的学习过程中都应注意到这一点．

§1　级数问题的提出

在本教程的上册中，读者学习了一元函数的微积分，但落实下来能计算的，只是初等函数．我们已能计算一切初等函数的微分，也能计算很多初等函数的积分．对非初等函数，我们只接触过分段函数，这只是很少一部分非初等函数．而实际问题中大量存在着的现象，却要用更一般的非初等函数才能描述，这就需要我们提供一个表示非初等函数的工具．依靠这个工具，我们不仅能够计算它的函数值，至少还能计算它的微商与积分，以及研究它的各种性质．无穷多个函数相加，是一种最容易想到的表示函数的工具．例如

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

或

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots.$$

这是用无穷个初等函数相加表示的函数．下面我们再从一个简单的例子，说明这种表示的好处．

有许多实际问题都可化成求解下面的微分方程：

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数，$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．这是一个二阶变系数的微分方程．用大家过去学过的方法是很难求解的．现在，我们试用待定系数法求这方程的解．

假设它的解是一个待定系数的多项式

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

经过简单的计算就可知道(留作习题)，除了得到所有的系数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 必须为 0 外，即 $y = 0$ 的显然解外，得不到任何结果．

现在我们设想方程的解不是这样的多项式，而是无限项相加的“无穷级数”：

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

其中$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$是待定的系数．结果会是怎样的呢？我们试着去计算一下．

对 y 进行微分：

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots.$$

把它们代入方程

$$\begin{array}{rrcrrrrrl}
 & xy'' = & & 2a_2x + & 3\cdot 2a_3x^2 + & 4\cdot 3a_4x^3 + & 5\cdot 4a_5x^4 + & \cdots \\
 & y' = & a_1 + & 2a_2x + & 3a_3x^2 + & 4a_4x^3 + & 5a_5x^4 + & \cdots \\
+) & xy = & & a_0x + & a_1x^2 + & a_2x^3 + & a_3x^4 + & \cdots \\
\hline
 & 0 = & \multicolumn{6}{l}{a_1 + (a_0 + 4a_2)x + (a_1 + 9a_3)x^2 + (a_2 + 16a_4)x^3 + \cdots}
\end{array}$$

比较系数得到递推公式如下：

$$\begin{cases}
a_1 = 0, \\
a_0 + 4a_2 = 0, \\
a_1 + 9a_3 = 0, \\
a_2 + 16a_4 = 0, \\
\cdots\cdots \\
a_{2k-1} + (2k+1)^2a_{2k+1} = 0, \\
a_{2k} + (2k+2)^2a_{2k+2} = 0, \\
\cdots\cdots.
\end{cases}$$

由此解得

$$a_1 = 0,\quad a_3 = 0,\quad a_5 = 0, \cdots,\quad a_{2k+1} = 0, \cdots.$$

设 $a_0 = c$（常数），则

$$a_2 = -\frac{c}{4},\quad a_4 = -\frac{a_2}{16} = \frac{c}{16\cdot 4}, \cdots,$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{c}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k))^2} = \frac{(-1)^kc}{2^{2k}(k!)^2}, \cdots.$$

结果得到

$$y = c\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \right.$$

$$\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots+\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots\Bigg],$$

这就是方程的一个解．它不是一个初等函数．但是，现在用无穷级数把它表示出来了．我们由此就可计算它的函数值，并研究其性质．以后我们会知道，它是一种称为贝塞尔(Bessel,1784—1846)函数中的一员(0 阶贝塞尔函数)．还有许多类似的函数，如拉盖尔(Laguerre)函数、勒让德(Legendre,1752—1833)函数、高斯(Gauss,1777—1855)几何函数等等，它们和初等函数一起，构成人们描述世界的“函数库”．

对上述的演算过程，很自然会提出下面的问题：

(1) 无穷多项相加究竟是什么意思？加得起来吗？

(2) 对这种无穷项相加的“无穷级数”，它的运算规律与“有限和”有什么异同？

我们在演算中，没有理会这两个问题，而把“无穷和”完全看成与“有限和”一样地进行运算(并项、求微分等)，这种运算通常叫做形式运算．

无穷级数的历史，和微积分的历史一样长，甚至更长一些．早期微积分的结果，很多是依赖无穷级数的形式运算得到的(例如推导$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$)．微积分在应用到力学、天文、物理等方面时，无穷级数更是常用的工具．由于当时所解决的问题比较直观，许多结果可以直接检验，所以人们一直停留在这种形式运算的水平上，而不去深究无穷级数的概念与理论．直到 19 世纪初，由于应用的深入与广泛，得到的结果也不是那样直观和容易验证，同时在形式运算中还出现了许多矛盾，使得前面提到的两个问题变得尖锐起来了．形式运算中出现的矛盾，可以举一个简单的例子说明如下：

无穷项相加所成的无穷级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

如果把它写成

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots,$$

则其和为 0．如果把它写成

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots,$$

则其和为 1．

一个级数只能有一个“和”，这就推出了 $0=1$ 的荒谬结论．这个例子表明，“无穷和”与“有限和”有本质的区别．把“有限和”的运算规律无条件地应用到“无穷和”上去，有可能导致错误．这就要求人们去搞清楚无穷级数“和”的概念，以及在运算规律方面与有限和的异同．这就是下面要讲述的级数的一般理论的内容．

习　　题

1. 证明：若微分方程 $xy''+y'+xy=0$ 有多项式解

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

则必有 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$.

2. 试确定系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$，使 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0.$$

§2　数项级数的收敛性及其基本性质

无穷项函数相加，对每一个固定的 x，每一项便变成一个数. 因此，我们从无穷个数相加谈起. 这种级数称为数项级数，或简称为无穷级数. 下面先给出一个准确的定义.

设有数列

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots,$$

用加号把这一些数依次连接起来所得到的式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为无穷级数，简称级数. 上式也记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{\infty}u_k,$$

其中 $u_1,u_2,\cdots$分别称为级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 的第一项、第二项、…、第 n 项，u_n 称为级数的通项或简称为项.

上面说的级数只是写成无穷个数相加的形式，但究竟能否加得起来呢？或者说，能否加出一个“和数”来呢？这个“和数”的确切意义又是什么呢？

无穷个数相加，只能看成有限个数愈加愈多时的极限，因此我们引入一个新的数列：

$$\begin{aligned}&S_1=u_1,\\&S_2=u_1+u_2,\\&S_3=u_1+u_2+u_3,\\&\cdots\cdots\\&S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

或简记为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$. S_n 称为级数的前 n 项部分和或简称为部分和，数列 $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列.

定义 10.1 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限存在(设为 S)，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛，S 称为级数的和，记作

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=S,$$

此时也称级数 $\sum_{k=1}^{n}u_k$ 收敛到 S. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限存在，则称该级数发散，此时它没有和.

注意，根据我们以前的约定，数列极限存在是指极限为一个数. 因此当部分和数列趋于无穷($S_n\to\infty$)时，级数发散.

从定义看出，研究无穷级数的收敛问题，化成了研究部分和数列是否有极限存在的问题. 这样，我们就可以用学过的数列极限的知识来研究无穷级数. 在进入一般讨论之前，我们先来看几个例子.

例 1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性.

解 前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和为 1，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 前 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]\\&=\ln(n+1)\to\infty\quad(\text{当 }n\to\infty),\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 3 (几何级数)讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

$(a\neq 0)$的收敛性，其中 r 为公比.

当 $|r|\neq 1$ 时，级数的前 n 项部分和为

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=a\,\frac{1-r^n}{1-r}.$$

当 $|r|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)=\frac{a}{1-r}.$$

此时级数收敛，其和为$\frac{a}{1-r}$，即

$$a+ar+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-r}\quad(|r|<1),$$

这是中学学习过的.

当 $|r|>1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^n}{1-r}=\infty$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数发散.

当 $r=1$ 时，$S_n=na\to\infty$ (当 $n\to\infty$)，级数发散.

当 $r=-1$ 时，$S_1=a$，$S_2=0$，$S_3=a$，$S_4=0,\cdots$，
当 $a\neq 0$ 时，极限不存在，这是因为 $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k-1}=a$，两个子数列的极限不相等. 因此级数发散.

特别地，当 $a=1$ 时，级数就是

$$1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.$$

这是 §1 中讨论过的级数，它发散，因此没有和. 故说它的和既等于 1 又等于 0 的推理，前提是不正确的.

综合起来，对几何级数，得到的结论是：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ 当 $|r|<1$ 时收敛，当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

例 4 在第八章 §1，我们曾得到公式

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!},$$

其中 $0<\theta<1$. 由

$$0<\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{n+1},$$

知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}=0$，故

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

这样就把 e 用一个无穷级数表示出来.

有了这个级数后，e 这个无理数、超越数，就十分容易计算了. 只要有个简单的计算器，从 1/2 开始，后一项总是前一项(例如 n)除以 $n+1$，然后再加起来，便可以计算到任意精确度. 读者不妨拿个计算器算一算.

从数列极限的理论，很容易得到下列关于级数的简单性质.

定理 10.1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，c 为任一常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

证明　设 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则由假设知

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

S 为一有限数. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 的前 n 项部分和为 σ_n，则

$$\begin{aligned}\sigma_n &= cu_1+cu_2+\cdots+cu_n\\ &= c(u_1+u_2+\cdots+u_n)\to cS\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛，且其和为 $cS = c\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

易知，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$c\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也发散.

定理 10.2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

定理 10.2 可用数列极限的运算法则证明，我们把它留给读者作为一个习题.

定理 10.3　任意改变级数有限项的数值，不改变级数的收敛性.

证明　设原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，任意改变其有限项的数值后所得之新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. 因改变数值的只有有限项，故存在 N，使得当 $n>N$ 后，$u_n=v_n$. 记 $w_n=u_n-v_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$$

$$= (u_1 - v_1) + \cdots + (u_N - v_N) + 0 + 0 + 0 \cdots .$$

显然这级数是收敛的．因此，根据

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n - (u_n - v_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - w_n)$$

与定理 10.2，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散．定理 10.3 证完．

定理 10.3 说明，考虑一级数是否收敛，可以不管它前面有限项的数值．甚至把前面的有限项去掉(即把它们变成 0)，并不改变级数的敛散性．

定理 10.4(收敛的必要条件)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则一般项 u_n 趋向于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$，其部分和为 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= S - S = 0.\end{aligned}$$

本定理可以用来判断级数的发散性．例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散，因为它的一般项 $u_n = (-1)^{n-1}$ 不趋向于 0．又如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

发散，因为一般项 $\frac{n}{n+1}$ 的极限是 1，不为 0.

值得指出的是，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 仅仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件．换句话说，从 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛．例如前面例 2 中的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

我们知道它是发散的，但它的一般项趋向于 0:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 .$$

现在来看级数和数列的关系．根据定义，看一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛，就

看它的部分和数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ 是否有极限．这就把级数的问题完全化归数列来研究．反过来，任意给定一个数列$\{S_n\}$，我们也可以作出一个级数，它的部分和数列恰恰就是$\{S_n\}$，实际上只要取

$$u_1=S_1,u_2=S_2-S_1,u_3=S_3-S_2,\cdots,$$
$$u_n=S_n-S_{n-1},\cdots,$$

则级数

$$\begin{aligned}&S_1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots\\&=S_1+\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1})\end{aligned}$$

的部分和数列就是$\{S_n\}$，这样，也就把数列极限的问题化归级数来研究．

这样，读者很自然会问，既然两者等价，为什么还要研究级数？事实上，在级数理论中，我们看它有没有极限的这个数列(部分和数列$\{S_n\}$)，是有特殊构造的．它是由一项一项加起来的．因此，“项”应该是级数理论的着眼点．如果一个定理，条件是加在部分和的，那它是一个数列的定理．而当定理的条件落实到项时(例如前面的定理 10.4:若级数的一般项不趋向于 0,则级数发散)，就是一个级数的定理．故我们后面研究的思路是：从过去学过的数列极限理论出发，从级数的部分和入手，最后落实到项．以后我们将会看到，一些级数的项是十分简单的，例如一般项为 a_nx^n 或 $a_n\cos nx+b_n\sin nx$，但它们加起来所表示的函数却可以极其复杂，这就是级数的威力所在．

习　题

1. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx$, $|r|<1$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$, $|r|<1$.

2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2n+1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.

3. 证明定理 10.2.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项是正的，把级数的项经过组合而得到新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$，即 $U_{n+1}=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}}$，$n=0,1,2,\cdots$，其中 $k_0=0, k_0<k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}<\cdots$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛，证明原来的级数也收敛.

§3 正 项 级 数

“由简到繁”是研究问题的原则，因此我们先从最简单的级数着手. 最简单的级数就是本节要讨论的正项级数.

定义 10.2 若级数的每一项都是非负的，则称此级数为正项级数.

定理 10.5 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

证明 必要性. 按定义，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，部分和数列有极限存在，因此必有上界.

充分性. 由 $u_n \geqslant 0$，知部分和数列 $\{S_n\}$ 单调上升，它有上界则必有极限存在，因此级数收敛.

例 1 证明“p 级数”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p \leqslant 1$ 时发散.

证明 先证明 $p=1$ 时级数发散. 由定理 10.5，只需证明部分和数列无上

界．对任意正整数$n(\geqslant 2)$，都有正整数 k，使 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$．这时把部分和的项从第二项起依次按 $1,2,4,8,\cdots,2^{k-1}$项组合起来，便得

$$\begin{aligned}S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\\&\quad\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}\right)+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{n}\\&\geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\Big(\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{个}}\Big)\\&= \frac{k+1}{2},\end{aligned}$$

k 可以取任意大，因而 S_n 无上界．故 $p=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散$\Big($级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也称为调和级数$\Big)$．

当 $p<1$ 时，由于对任意正整数 k，有

$$\frac{1}{k^p} \geqslant \frac{1}{k},$$

因此
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

右边的部分和数列无上界推出左边也无上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在$p<1$ 也发散．

当 $p>1$ 时，设 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$，类似于前面的做法，有

$$\begin{aligned}S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&= 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots+\\&\quad\left[\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^p}\right]+\\&\quad\frac{1}{(2^k)^p}+\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&\leqslant 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p}+\frac{2^k}{(2^k)^p}\\&= 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k\\&= \frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\end{aligned}$$