



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

丛书主编 钟承奎

(一类数学与基地班教程)

高等数学

第二册 多元微积分

张志强 编著



兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS



中国海洋大学数学与统计学院

数学基础 必修

《——高等数学(上册)》

高等数学

第二册 多元微积分

张金海 编

 中国海洋大学出版社





普通高等教育“十一五”国家级规划教材

丛书主编 钟承奎

(一类数学与基地班教程)

高等数学

第二册 多元微积分

张志强 编著



兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

多元微积分/张志强编著. —兰州:兰州大学出版社,
2006.10
(高等数学/钟承奎主编)
ISBN 7-311-02793-4

I. 多... II. 张... III. 微积分—高等学校—教材
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 126852 号

高等数学

第二册 多元微积分

张志强 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

<http://www.onbook.com.cn>

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16

印张:26.5

2006 年 10 月第 1 版

2006 年 10 月第 1 次印刷

字数:418 千字

印数:1~3000 册

ISBN7-311-02793-4/O·198

定价:38.00 元

《高等数学》系列教材编审委员会

名誉主任：范先令

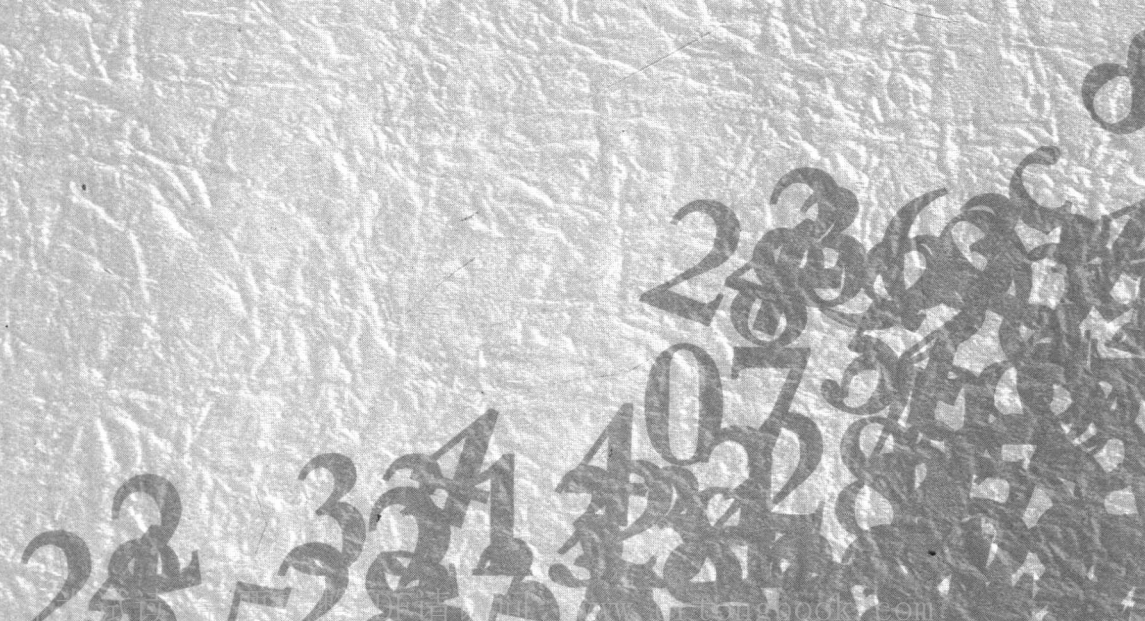
主 任：钟承奎

副 主 任：张和平 罗彦锋 李万同 张国凤

委 员：(按姓氏排序)

李效虎 李自珍 陆 凡

罗彦锋 张国凤 张志强



总序

《高等数学》系列教材为教育部“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”,共四册:《一元微积分》、《多元微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。主要供非数学专业对数学要求更高一些的专业(需要一类数学的专业)与基地班的本科大学生使用,其它专业与班级在使用本套教材时可对教材内容进行适当选择。

关于数学在其它科学中的重要作用,有一些人常用“数学是科学的工具”这样的术语来描述,其实这样的描述并不确切,有的人甚至把这句话理解为数学只不过是科学发展的一个居于次要的、仆从地位的、可用可不用的工具而已,这就更大错特错了。现代科学(尤其是物理学)发展中的许多事例已经确凿地表明,如果一定要说“数学是科学的工具”,那么数学也是科学发展中特别重要的、不可或缺与不可替代的、而且在很多时候占据主导地位与起着决定性作用的工具。其实这里我们想说的是,数学不是科学的一个一般的、普通的工具,数学对于科学的重要性,无论给予多么高的评价都不会过分。现代科学的发展史同样也表明,对于科学的发展来说,不光数学理论是重要的,而且数学特有的思维方法也特别重要。在一定意义上可以说,每门学科的发展史都是该学科的数学化程度逐渐提高的历史。我们看到,当今数学化程度最高的一些学科已经和数学密不可分,并逐渐和数学融为一体。在这些学科中的伟大的科学家无一例外地同时也是数学家,数学和科学的统一必将是个大趋势。对于非数学专业的大学生而言,数学素养是专业素养中的重要组成部分。另外,数学还是一种文化,学习数学对于促进人的全面发展与人格的完善具有积极的意义。总之,数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养;不仅是一种科学,而且是一种文化。作为非数学专业的大学生一定要下决心努力学好高等数学这门课程。因为数学对于同学们在校期间的专业课程的学习和本科毕业后的继续学习、工作以及生活都是非常重要的。

我们编写这套教材的目的和任务就是,要使同学们能较好地掌握各相关专业所必需的高等数学领域中的最基本、最重要的理论知识,并且能较好地掌握其中所体现的一些重要的数学思想和方法,使同学们在获取数学知识的同时切实提高数学素养,特别是增强数学思维能力与创新意识,从而为后续专业

课程的学习与深造以及今后的工作打下坚实的数学知识与思维方法方面的基础。

一部好的教材无疑会对教学效果起到十分重要的作用。本套教材是在吸收和借鉴国内外同类教材,特别是近几年出版的一批“面向二十一世纪课程”教材和国家“十五”规划教材以及我校出版的四套高等数学教材优点的基础上,结合教学实际情况,按照新的教学要求和教学任务,组织具有较高学术水平且有丰富教学经验的教师认真编写而成的。在编写中我们特别注意了以下几个方面。

第一,与时俱进,与数学和其它学科的发展现状相适应。例如,由于很多学科对数学知识内容需求的扩大,以前仅限于微积分内容的传统的高等数学教材显然不能满足现在的需要,因此本套教材中增加了线性代数和概率论与数理统计的内容;再如,微积分学是牛顿和莱布尼兹等人于17世纪末创立的,属于经典数学的范畴,对于这些内容,本教材力求用现代数学的思想观点去统帅与处理,这样可以使同学们能够站在更高的层次上对这些内容的本质与作用有更深入一些的理解,也便于与现代数学的衔接;还有,计算机的诞生和迅速发展对各门学科均有很大影响,数学更是首当其冲,高等数学应当作出相应的响应。

第二,重点突出,各学科所需要的数学知识实在是太多了,把它们全写入教材,既不可能也无必要。一方面,在知识内容上重点突出,我们力求选择那些最基本、最重要、最有用的内容编入教材,并把这些重点内容下大力气写好;另一方面,使学生能较好地掌握一些重要的数学思想和方法。因此在教材的编写中结合有关的具体内容突出重点并力求写好,这方面在帮助学生理解诸如“数学家是怎样抽象出这些重要的数学概念的?”、“数学家是怎样猜想出这些定理的?”、“这些定义和定理究其实质是怎么回事?”等问题方面能起到画龙点睛的作用。

第三,深入浅出,通俗易懂,便于自学。对于重要的数学概念与定理,除了解释清楚它们的物理意义与几何意义外,还从多种角度出发并用通俗易懂形象直观的语言揭示出它们的本质。此外,教材中的例题和习题的选取与配备适应了教学目的的需要。例题有典型性与启发性,习题难易得当、类型多样,能适应不同的需要,特别是增加了一些有助于较高水平的学生提高分析与解决问题能力和创新能力的思考题。

在这里我们还要特别强调一下的是,虽然在兰州大学相关专业试用本套教材的本科生考研过关率有较大的提高,但是我们认为,在本科生教材的编写与使用上一定不要按照应试教育那一套去片面追求考研率。否则就会舍本求

末,高分低能,后患无穷。本套教材重在培养厚基础与高素质的人才,至于考研率的提高,只不过是一种水到渠成的副产品而已。我们希望并相信绝大多数使用本教材的本科生在毕业后能够实现考取研究生的愿望,而且是高分高能、后劲十足,将来能成为有较大作为的栋梁之材。

虽然本套教材的编写人员尽了最大的努力,但难免还会存在不足之处,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

兰州大学《高等数学》系列教材编审委员会

2006年8月于兰州大学

前 言

《高等数学》系列教材的微积分部分是在吸收和借鉴国内外同类教材优点的基础上, 结合教学实际情况, 按照新的教学要求和教学任务编写的. 在教材的编写过程中, 特别注意了以下几点:

1. 以数学修养和素质教育为中心 本教材突出数学思想和方法教育, 突出思维、推理、建模和创新能力教育, 突出对实际问题的分析、解决和组织能力教育, 积极渗透现代数学思想方法和数学成就, 以更合理更科学的章节和时间安排来组织教材, 力求内容更新, 重点突出, 难点通俗. 对于有些问题, 采用了多观点和多方法处理. 加大了数学应用问题和综合分析问题的介绍力度.

本教材按照了解、掌握、精通和强化四个层次安排和设计, 对于涉及数学主流和数学发展的一些深层次理论做了必要的介绍, 希望学生有机会了解更多的数学思想和方法. 强化部分按照基地班和考研需要编写, 一方面加强了例题数量和难度, 另一方面扩大了综合程度和应用广度, 对于计算方法和计算技巧, 应用方法和应用技巧等都有适当强化.

2. 以全面提高数学教学质量为目标 为了更有效地提高教学质量, 一方面对于代表数学主流的东西尽可能地讲深、讲透; 另一方面切实贴近考研, 对于有利于考研的内容尽可能地拓展、强化.

例题以提供课堂讲授、习题指导和学生自学内容三个层次编写, 按照简单、综合和应用三个次序排列. 有些内容, 任课教师可根据自己的教学情况和时间, 合理选择, 灵活掌握.

在习题选择和设计方面, 尽量优化结构, 分层分类, 学用配套, 兼顾考研. A 类习题按基本教学要求编写, 习题数量、难度、题型和综合性都有严格控制. B 类习题按考研要求编写, 习题的难度、深度、广度和题型以及综合性、多样性、层次性和灵活性等都做了系统考虑和精心安排, 为优秀学生提供了更深入学习高等数学的良好机会和优越环境.

尽可能排除次要因素对主要内容的干扰, 在保证严格数学语言的前提下, 更多地采用了形象用语, 对于许多难点和抽象问题给出了独特的通俗解释.

3. 按照教学计划整体优化教材结构 一元微积分按照 108 学时设计, 多元微积分按照 90 学时设计. 多元微积分的基本授课时间设计为 80 学时, 机

动时间为 10 学时. 具体安排如下:

第八章	空间解析几何	10 学时
	§8.1 向量代数 (4)	§8.2 平面与直线 (3)
	§8.3 曲线与曲面 (3)	
第九章	多元函数的微分	18 学时
	§9.1 多元函数的极限 (3)	§9.2 多元函数的偏导数 (3)
	§9.3 多元函数的全微分 (3)	§9.4 多元函数的微分法 (3)
	§9.5 偏导数的应用 (6)	
第十章	无向域上的积分	17 学时
	§10.1 黎曼积分与微元法 (2)	§10.2 重积分的计算 (5)
	§10.3 常用坐标变换 (3)	§10.4 线面积分的计算 (4)
第十一章	有向域上的积分	16 学时
	§11.1 有向曲线上的积分 (3)	§11.2 有向曲面上的积分 (4)
	§11.3 定向类积分关系 (3)	§11.4 积分公式的应用 (6)
第十二章	场的微分与积分	13 学时
	§12.1 数量场与梯度场 (5)	§12.2 场的通量与散度 (4)
	§12.3 场的环量与散度 (4)	
第十三章	常微分方程 II	6 学时
	§13.1 一阶微分方程 (3)	§13.2 常微分方程组 (3)

本书为教育部“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”, 业已经过试用修改, 同时根据试用意见, 增加了配套习题解答《高等数学强化与考研教程》, 书中不妥之处, 恳请各位专家、同行和读者继续批评指正.

编 者

2006年 8月于兰州大学

目 录

第八章 空间解析几何	1
§8.1 向量代数	1
§8.1.1 向量运算	1
§8.1.2 线性运算	4
§8.1.3 内积运算	9
§8.1.4 外积运算	12
习题 8.1 A	19
习题 8.1 B	20
§8.2 平面与直线	22
§8.2.1 平面方程	22
§8.2.2 直线方程	26
§8.2.3 点线面关系	30
习题 8.2 A	37
习题 8.2 B	39
§8.3 曲线与曲面	42
§8.3.1 空间曲面	42
§8.3.2 空间曲线	49
§8.3.3 二次曲面	56
习题 8.3 A	58
习题 8.3 B	59
总习题八	61
第九章 多元函数的微分	64
§9.1 多元函数的极限	64
§9.1.1 多元函数的概念	64
§9.1.2 多元函数的极限	67
§9.1.3 多元函数的连续性	73
习题 9.1 A	77
习题 9.1 B	78

§9.2 多元函数的偏导数	80
§9.2.1 一阶偏导数	80
§9.2.2 高阶偏导数	88
习题 9.2 A	91
习题 9.2 B	93
§9.3 多元函数的全微分	94
§9.3.1 一阶全微分	94
§9.3.2 高阶全微分	105
习题 9.3 A	107
习题 9.3 B	108
§9.4 多元函数的微分法	110
§9.4.1 复合函数微分法	110
§9.4.2 隐函数微分法	121
习题 9.4 A	130
习题 9.4 B	132
§9.5 偏导数的应用	135
§9.5.1 方向导数与梯度	135
§9.5.2 泰勒公式	145
§9.5.3 自由极值	146
§9.5.4 条件极值	151
习题 9.5 A	160
习题 9.5 B	161
总习题九	163
第十章 无向域上的积分	166
§10.1 黎曼积分与微元法	166
§10.1.1 积分域与微元法	166
§10.1.2 黎曼积分与可积性	169
§10.1.3 黎曼积分的性质	172
习题 10.1 A	173
习题 10.1 B	174
§10.2 重积分的计算	175
§10.2.1 累次积分法	175

§10.2.2 换元积分法	184
习题 10.2 A	192
习题 10.2 B	194
§10.3 常用坐标变换	196
§10.3.1 极坐标变换	197
§10.3.2 柱坐标变换	201
§10.3.3 球坐标变换	204
习题 10.3 A	208
习题 10.3 B	210
§10.4 线面积分的计算	212
§10.4.1 线积分的参数化方法	212
§10.4.2 面积分的参数化方法	217
§10.4.3 曲面积分的投影方法	222
习题 10.4 A	228
习题 10.4 B	229
§10.5 黎曼积分的应用	230
习题 10.5 A	238
习题 10.5 B	239
总习题十	240
第十一章 有向域上的积分	243
§11.1 有向曲线上的积分	243
§11.1.1 变力作功问题	243
§11.1.2 定向类曲线积分	244
§11.1.3 曲线积分的计算	246
习题 11.1 A	251
习题 11.1 B	252
§11.2 有向曲面上的积分	253
§11.2.1 流体的流量问题	253
§11.2.2 定向类曲面积分	256
§11.2.3 曲面积分的计算	258
习题 11.2 A	270
习题 11.2 B	272

§11.3 定向类积分关系	274
§11.3.1 微积分基本定理 *	274
§11.3.2 定向类积分公式	279
习题 11.3 A	285
习题 11.3 B	286
§11.4 积分公式的应用	287
§11.4.1 Green 公式的应用	287
§11.4.2 Gauss 公式的应用	295
§11.4.3 Stokes 公式的应用	304
习题 11.4 A	308
习题 11.4 B	309
总习题十一	311
第十二章 场的微分与积分	313
§12.1 数量场与梯度场	314
§12.1.1 数量场的梯度场	314
§12.1.2 梯度场的线积分	320
习题 12.1 A	333
习题 12.1 B	334
§12.2 场的通量与散度	336
§12.2.1 向量场的通量	336
§12.2.2 向量场的散度	339
§12.2.3 散度的坐标变换 *	345
习题 12.2 A	351
习题 12.2 B	351
§12.3 场的环量与旋度	352
§12.3.1 旋度的环量表示	353
§12.3.2 旋度运算与特殊场	356
§12.3.3 旋度的坐标变换 *	360
习题 12.3 A	362
习题 12.3 B	363
总习题十二	366

第十三章 常微分方程 II	368
§13.1 一阶微分方程	368
§13.1.1 全微分类方程	368
§13.1.2 一阶隐式方程	374
习题 13.1 A	383
习题 13.1 B	384
§13.2 常微分方程组	385
§13.2.1 初等积分法	385
§13.2.2 线性方程组 *	389
习题 13.2 A	397
习题 13.2 B	398
 附录四 含参变量积分	 400
附录五 解的存在定理	402
附录六 场与微分方程	406

第八章 空间解析几何

空间解析几何是用代数方法研究几何问题的数学分支,常用的代数方法有向量运算、代数方程和坐标变换等.直观上向量是指既有大小又有方向的量,本质上向量是指线性运算系统中的元素.

§8.1 向量代数

空间解析几何中的向量是指一个三元数组 (a_1, a_2, a_3) , 习惯上表示为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 或 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. 实数 a_1, a_2, a_3 称为向量的分量. 物理学中常用 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 表示向量.

向量可表示空间中的点和有向线段, 向量运算可通过分量运算定义.

§8.1.1 向量运算

通过建立空间坐标系, 向量便和空间中的点建立了一一对应关系, 也和空间中的有向线段的大小及方向建立了一一对应关系. 有了这两个一一对应关系, 几何问题便可以通过向量运算来解决. 最简单的坐标系是空间直角坐标系, 最基本的向量运算是线性运算、内积运算和外积运算.

1. 空间直角坐标系

两两垂直且具有共同原点的三条数轴称为空间直角坐标系. 构成空间直

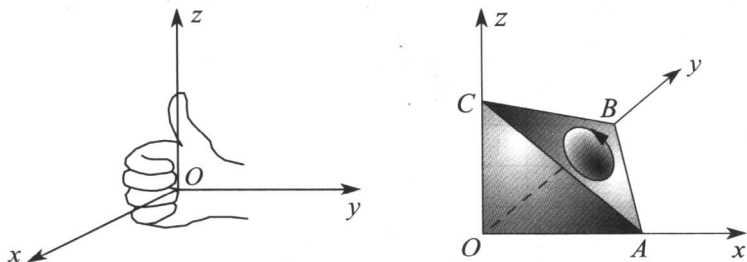


图 1.1

角坐标系的数轴分别称为 x 轴、 y 轴和 z 轴，数轴的原点 O 称为坐标原点。如果坐标系 $Oxyz$ 符合右手法则，则称 $Oxyz$ 为右手系或默认坐标系，否则称为左手系。

右手系是指，用右手握住 z 轴，四指从 x 轴正向经 $\frac{\pi}{2}$ 转向 y 轴正向时，拇指指向 z 轴正向；或者在 x 、 y 、 z 正半轴上各取一点 A 、 B 、 C ，从外部看四面体 $OABC$ 时，三角形 ABC 按逆时针排序。

过两个坐标轴的平面称为坐标面，三个坐标面将空间划分成八个部分，每个部分称为一个卦限。由 x 、 y 、 z 正半轴确定的卦限称为第一卦限，第二、第三、第四卦限在 xOy 坐标面的上方按逆时针确定。第五、第六、第七、第八卦限分别在第一、第二、第三、第四卦限的正下方。

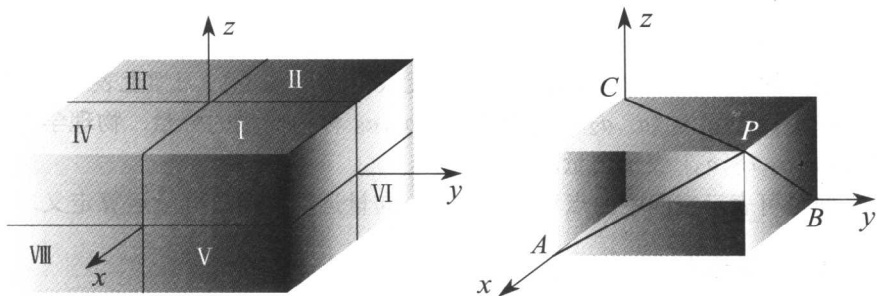


图 1.2

有了坐标系，空间中的一个点 P 就和一个向量 (x, y, z) 建立了一一对应，按照这种对应向量 (x, y, z) 也称为点。

定义 1.1 称向量 (x, y, z) 是空间点 P 的坐标，或 P 为 (x, y, z) 的点表示，记作 $P(x, y, z)$ ，如果 P 到三个坐标轴的垂直投影点依次对应实数 x, y, z 。

如果 (x, y, z) 是任一卦限内的点，则 x, y, z 的符号可表示如下。

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

向量不但可以表示几何点，而且还可以表示有向线段。