普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数

陈建龙 周建华 韩瑞珠 周后型 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数

陈建龙　周建华
韩瑞珠　周后型　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本教材为普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 内容包括矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型以及与这些内容相应的数学实验. 全书在致力于强调内容的科学性与系统性的同时，注重代数概念的几何背景及应用背景的介绍，以利于读者更好地理解代数理论，提高应用代数方法解决实际问题的能力. 每章后配备的大量习题均按难易程度分成三类，以适合不同层次的读者，尤其是考研学生的需要.

本书可供高等院校非数学专业(工科，经济类等)的学生使用，也可供自学者和科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建龙等编. —北京：科学出版社，2007
(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)
ISBN 978-7-03-018452-8

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 005697 号

责任编辑：赵　靖 / 责任校对：鲁　素
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 2 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007 年 2 月第一次印刷　印张：13 1/2
印数：1—4 000　字数：255 000

定价：18.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　言

线性代数是理工、经济管理等学科大学生的一门重要的数学基础课程，是学习后续课程的工具，对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要. 近些年来，随着科学技术突飞猛进的发展，线性代数已渗透到经济、金融、信息、社会等各个领域，人们已越来越深刻地感到线性代数教材应该在充分考虑大学生的特点，帮助大学生掌握相关的代数知识的同时，提高其用代数的方法思考、解决实际问题的能力. 另外，教材还应该充分发挥数学软件的优势，反映线性代数的理论在现代科学技术中的应用. 为此，结合教育部教学指导委员会所制定的新的基本要求，在编写本教材时，我们做了以下几方面的努力.

1. 加强应用背景的引入　在教材内容的处理方法上，注意理论联系实际，加强概念与理论的背景和应用介绍，利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念；在习题中，安排了一些简单的应用题，力求拓宽学生的视野和培养学生应用代数知识解决实际问题的能力.

2. 加强数学软件在课程教学中的作用　结合课程内容，介绍 MATLAB 在线性代数计算中的用法. 让学生学会在应用线性代数知识解决实际问题时，如何应用数学软件，同时通过对一些具体问题的计算，帮助学生对一些抽象的代数概念进行理解，加深对代数理论知识的认识，向学生展示如何将代数理论和数学软件相结合应用于实际问题之中.

3. 引入数学建模和数学实验的方法　在本教材最后，安排了数学建模实例，力求引入数学建模和数学实验的方法，将本教材中介绍的数学软件、线性代数理论有机地结合起来，并应用到实际问题之中.

4. 注重课程自身的系统性和科学性　内容的处理更突出主题，更适合学生的思维特点. 例如我们利用归纳法定义行列式，将行列式看为刻画方阵是否可逆的一个数量指标，从而更突出了本课程的主旨. 再如，向量组的线性相关性历来是学生学习本课程的难点，有别于传统的处理方式，本书先讨论矩阵的秩，然后再利用矩阵的秩建立向量组的线性相关性的概念. 这样，内容便可以由易而难地展开，有利于学生的理解.

5. 留有思考余地,激发进一步学习的兴趣 课程中将利用 MATLAB 揭示、发现一些代数现象,提示学生如要真正解决相关的问题,则有待学习进一步的代数理论,掌握相关的代数规律.

6. 根据不同的理解层次配备习题 每章之后均安排有 A、B、C 三套习题. A 套安排了填空题和选择题,主要用于检查学生对于基本概念、基本理论的了解程度;B 套安排了计算题和证明题,主要用于检查学生对这部分内容的掌握程度;C 套是一些提高题和应用题. 这样安排可供不同层次的学生选择.

参加本教材编写的是东南大学陈建龙教授、周建华教授、韩瑞珠教授以及周后型教授,主编陈建龙教授. 其中,第 1 章由韩瑞珠教授编写,第 2 章和第 3 章由周建华教授编写,第 4 章和第 5 章由陈建龙教授编写,数学实验室 MATLAB 简介部分由周后型教授编写,综合实践 1,2,分别由韩瑞珠教授和周后型教授编写.

本教材作为普通高等教育"十一五"国家级规划教材正式出版,得到了教育部高校优秀青年教师教学科研奖励计划的资助. 该教材被评为江苏省高等学校精品教材建设项目,并列入东南大学规划教材. 在此对教育部、江苏省教育厅、东南大学教务处、东南大学数学系和科学出版社的领导给予的大力支持表示感谢,尤其是对东南大学郑家茂副校长给予的关心和帮助表示由衷的感谢! 同时,我们还要感谢张小向和沈亮两位老师以及多位博士生在本书的编写过程中所做的大量工作.

限于编者水平,本教材肯定有许多不足和缺点,恳请读者批评指正.

编 者

2006 年 10 月

目　　录

第1章 矩　　阵

在现代社会中，数学起着非常重要的作用，除了算术以外，线性代数是应用最为广泛的数学分支之一. 线性代数主要处理与数量的线性关系相关的问题，和其他数学分支一样，线性代数有两类基本的数学构件：一类是对象、数据；另一类是对这些对象进行的运算. 本章就是讨论最简单的由数形成的矩形数表——矩阵及其运算.

矩阵是线性代数的一个最基本的概念，矩阵的运算是线性代数的基本内容，在数学科学、自然科学、工程技术与生产实践中有许多问题都可以归结为矩阵的运算，进而用矩阵的理论来处理.

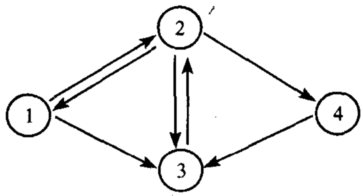
本章正是从实际问题出发，引出矩阵的概念，然后介绍矩阵的线性运算、乘法、转置、可逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵、方阵的行列式和矩阵的秩.

1.1　矩阵的基本概念

1.1.1　矩阵概念

在日常生活中，矩阵无时无刻不出现在我们身边，例如班级中学生各科考试的成绩、企业销售产品的数量和单价、超市物品配送路径等等. 当抽出其具体内容时，它们的数量都可以列成矩形表格，如图 1.1 和图 1.2.

图 1.1 表示城市之间航线与矩阵的关系.



(a) 城市航线网

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) 邻接矩阵

图 1.1　城市航线中的矩阵

图 1.1(a)表示四个城市之间的航线网，其中 ⓘ $(i=1,2,3,4)$表示城市的代码，它们之间的连线和箭头表示城市之间航线的线路及方向. 如果将此图对应着一个 4 行 4 列的矩形表格，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列交叉点的元素 a_{ij} 定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从城市 }(i)\text{ 到城市 }(j)\text{ 有一条航线},\\ 0, & \text{从城市 }(i)\text{ 到城市 }(j)\text{ 没有航线},\end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant 4,$$

则 **A** 称为图 1.1(a)的邻接矩阵,见图 1.1(b).

再看图 1.2 表示成绩表与矩阵的关系.

	数学	物理	化学	英语
张萍	98	90	87	72
王刚	89	90	86	98
李冰	97	84	75	87
张燕	85	88	85	88

(a)成绩统计表

$$\begin{pmatrix}98 & 90 & 87 & 72\\ 89 & 90 & 86 & 98\\ 97 & 84 & 75 & 87\\ 85 & 88 & 85 & 88\end{pmatrix}$$

(b)对应的矩形表格

图 1.2　成绩表中的矩阵

图 1.2(a)中,有四个学生考了 4 门课程,成绩分布在统计表中.如果把学生编成学号,课程编成序号,那么右边的矩形数表对应于左边的成绩表.

我们把图 1.1,图 1.2 中的矩形数表称为矩阵.一般地我们有如下定义.

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定的次序排成 m 行 n 列的表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵.横的每排叫做矩阵的行,纵的每排叫做矩阵的列.a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列的元素,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又可记作(a_{ij}),$(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$,通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$来表示矩阵.

元素都是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵,本书中的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.

当 $m=n$ 时,即矩阵的行数与列数都是 n 时,称矩阵为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$排成的对角线称为方阵的主对角线.

当 $n=1$ 时,得到一个 m 行 1 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},$$

称它为列矩阵或列向量,常用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示.

当 $m=1$ 时,得到一个 1 行 n 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11}\quad\cdots\quad a_{1n}),$$

称它为行矩阵或行向量,此时也记成 $\boldsymbol{A}=(a_{11},\cdots,a_{1n})$.

当 $n=m=1$ 时,得到一个 1×1 的矩阵,记为(a_{11}),也记成 a_{11}.

两个矩阵的行数和列数都相等时,称它们是同型矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.2 几种特殊矩阵

我们利用矩阵解决问题时,经常遇到下面几种特殊矩阵.

零矩阵:若矩阵的所有元素均为零,则这个矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$.

对角矩阵:若一个 n 阶方阵除主对角线上的元素之外,其余元素全部为零,则此矩阵称为对角矩阵,通常用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示,即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix},$$

这里非主对角线上的零元素可以省略不写,或记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

数量矩阵:若对角矩阵中主对角线上元素为常数,即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$,则此矩阵称为数量矩阵.

单位矩阵:若数量矩阵中对角线上常数为 1,则此矩阵称为单位矩阵,记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$,即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

三角矩阵:若一个方阵的主对角线下(上)的元素全为零,则此矩阵称为上(下)三角矩阵,上、下三角矩阵统称为三角矩阵.

行阶梯矩阵:若一个矩阵的每个非零行(元素不全为零的行)的非零首元(第一个非零元素)所在列的下标随着行标的增大而严格增大,并且元素全为零的行(如果有的话)均在所有非零行的下方,则此矩阵称为行阶梯矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

行最简形矩阵:若一个行阶梯形矩阵满足每一个非零行的非零首元为 1,且此非零首元所在列其余元素均为零,则此矩阵称为行最简形矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2　矩阵的基本运算

矩阵之所以有用,不在于把一组数排成矩形数表,而在于我们对它们施行有实际意义的运算.下面介绍矩阵的基本运算.

1.2.1　矩阵的线性运算

定义 1.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵,则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由于矩阵的加法就是矩阵的对应元素的和,容易证明,矩阵的加法满足下列运算规则:假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵,记作 $-\boldsymbol{A}$.

不难看出,零矩阵与负矩阵有下面的性质:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(2) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

利用负矩阵,可以定义矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

定义 1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 是一个数,矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积,简称为数乘,记作 $k\boldsymbol{A}$.

根据这个定义,容易验证,数乘满足下列运算规律:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,k,l 皆为任意数,则

(1) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

从定义 1.2 与定义 1.3 可以看出,当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 1×1 矩阵时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和、数乘实际上就是数的加法与乘法运算.从这个意义上看矩阵的和、数乘都是数的加法与乘法运算的一种推广.

矩阵的加法与数量乘法运算统称为矩阵的线性运算.

1.2.2　矩阵的乘法

已知变量 x_1,x_2 与 y_1,y_2,y_3;变量 y_1,y_2,y_3 与 z_1,z_2 有如下关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{cases}$$

那么变量 x_1, x_2 与 z_1, z_2 的关系是什么呢?

将上述第二式代入第一式得

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2. \end{cases}$$

将 x_1, x_2 与 y_1, y_2, y_3 的关系对应阵记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$,将 y_1, y_2, y_3 与 z_1, z_2 的关系对应阵记为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$,记 x_1, x_2 与 z_1, z_2 的关系对应阵为 $\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列交叉处元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的每一个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和,此时 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积. 一般地,有如下定义.

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,作 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \tag{1.2.1}$$

称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1s}b_{s2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2s}b_{s1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2s}b_{s2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2s}b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{ms}b_{s2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}.$$

值得注意的是,在矩阵乘积的定义中,只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义. 当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{AB}$ 的行数与 $\boldsymbol{A}$ 的行数相等,$\boldsymbol{AB}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数相等. 因此,$1\times n$ 的行矩阵与 $n\times 1$ 的列矩阵的乘积是一阶方阵,也就是数. 但是 $n\times 1$ 的列矩阵与 $1\times n$ 的行矩阵的乘积是一个 $n\times n$ 方阵.

例 1.1 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,-3)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=(1,2,-3)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=(1\times2+2\times1+(-3)\times1)=(1),$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}(1,2,-3)=\begin{pmatrix}2&4&-6\\1&2&-3\\1&2&-3\end{pmatrix}.$$ □

例 1.2 根据图 1.2 给出的成绩统计表,写出学生各科总成绩和个人平均分数的矩阵表示式.

解 图 1.2 给出了 4 个学生成绩统计表对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}98&90&87&72\\89&90&86&98\\97&84&75&87\\85&88&85&88\end{pmatrix}$,于是 4 个学生各科总成绩的矩阵表示式为

$$(1,1,1,1)\begin{pmatrix}98&90&87&72\\89&90&86&98\\97&84&75&87\\85&88&85&88\end{pmatrix}=(369,352,333,345).$$

所以数学、物理、化学、英语各科总成绩分别为:369,352,333,345.

个人平均分数的矩阵表示式为

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}98&90&87&72\\89&90&86&98\\97&84&75&87\\85&88&85&88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}87\\91\\86\\87\end{pmatrix}.$$

所以个人平均分数依次为:87,91,86,87. □

例 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\2&2\end{pmatrix}.$$ □

从这个例子可以说明,矩阵乘法不满足交换律. 同时看到,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵,但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 因此,对于矩阵乘法,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

此外,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,一般推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$. 例如,上例中取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{C}$. 因而矩阵乘法不满足消去律.

上面所述是矩阵乘法与数的乘法的不同之处，但是矩阵乘法与数的乘法仍有一些相似之处. 利用定义 1.4 可以证明，矩阵乘法满足下列运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$(结合律)；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$(分配律)；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$(其中 k 是一个任意数).

证明留给读者.

例 1.4 n 阶数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$ 与任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，即 $(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{E})=k\boldsymbol{A}$. 特别的，$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$. □

由此可见，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法运算中起着与数 1 在数的乘法中的作用.

例 1.5 对角矩阵的乘积仍为对角矩阵，且

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

以上两个例题留给读者作为练习. □

由于矩阵的乘法满足结合律，因此可以定义矩阵的方幂：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为正整数，用 $\boldsymbol{A}^k$ 表示 k 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂.

容易验证：对于任意正整数 k,l，下列等式成立：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}.$$

因为矩阵乘法不满足交换律，所以 $(\boldsymbol{AB})^k$ 与 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$ 一般不相等，而且与两个矩阵有关的因式分解与二项式定理一般也不成立.

如果记 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 m 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，称

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

例 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$f(x)=2x^3+x+3$，求 $(\boldsymbol{BA})^n$ 和 $f(\boldsymbol{BA})$.

解 易知，$\boldsymbol{AB}=(2)$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\end{pmatrix}$，于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{BA})^n&=(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}2^{n-1}\boldsymbol{A}=2^{n-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1}\\2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1}\\2^n & -2^n & 2^n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{BA})=2(\boldsymbol{BA})^3+\boldsymbol{BA}+3\boldsymbol{E}=9\boldsymbol{BA}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}12&-9&9\\9&-6&9\\18&-18&21\end{pmatrix}.\qquad\square$$

例 1.7　试用矩阵表示图 1.1 中从ⓘ市经一次中转到ⓙ市的单向航线的所有情况.

解　由 1.1 节知,城市之间航线的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

利用矩阵的乘法可知,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\end{array}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}.$$

所以间隔一个城市单向航线的对应矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{A}^2=(a_{ij})$,则 a_{ij} 为从ⓘ市经一次中转到ⓙ市的单向航线总数. 例如:$a_{13}=1$,即从①市经一次中转到③市的单向航线有 1 条(①→②→③);$a_{23}=2$,即从②市经一次中转到③市的单向航线有 2 条(②→①→③,②→④→③);$a_{44}=0$,即④市没有双向航线.

当然,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=(b_{ij})$中元素 b_{ij} 表示ⓘ市能直接或经一次中转到ⓙ市的单向航线总数.

1.2.3　矩阵的转置

定义 1.5　把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的行依次换成同序数的列得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$的转置矩阵是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算,且满足下面的运算规律(假设运算都是可行的):

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意数);

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

下面只验证(4),其余的留给读者自己验证.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$,记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(d_{ij})_{n\times m}$,于是有 $c_{ji}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$.

又矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为$(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为$(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}$,因此 $d_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$.

这表明 $d_{ij}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$,故得$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

对于多个矩阵的乘积的转置,用数学归纳法容易证明

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.对称矩阵与反对称矩阵是两种重要的特殊方阵.易知,反对称矩阵主对角线上的元素全部为零.

例 1.8 证明任意一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

证明 任意一个 n 阶方阵都可以写成

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

由于

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{2}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{2}=-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

因此$\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$为对称矩阵,$\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$为反对称矩阵.故命题得证. □

1.3 分块矩阵

1.3.1 基本概念

对于阶数比较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$,在计算过程中经常采用"矩阵分块法",它可以使矩阵运算化为较低阶矩阵的运算,所以是矩阵运算中的一个重要技巧.我们把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条横线和纵线分成若干小矩阵,每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块,以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.下面通过例题说明矩阵如何分块以及分块矩阵的

运算法则.

例如,下面的 5 阶方阵可用横线、纵线将它分成 4 块,构成一个分块矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&2\\0&1&0&4&5\\0&0&1&7&6\\\hdashline 3&2&1&0&0\\6&5&4&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{O}_2\end{pmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{E}_3$ 为 3 阶单位方阵,$\boldsymbol{O}_2$ 为 2 阶零矩阵,$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}$.

给定一个矩阵,由于横线纵线的取法不同,所以可以得到不同的分块矩阵,究竟取哪种分块合适,这要由对问题的需要来决定.

一般地,对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果在行的方向分成 s 块,在列的方向分成 t 块,就得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s\times t$ 分块矩阵,记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$,其中 $\boldsymbol{A}_{kl}$ $(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块.

1.3.2　常用的分块矩阵

常用的分块矩阵,主要有以下三种.

(1) 按列分块.

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列间引入虚线按列分块,为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{array}\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,$\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{sj})^{\mathrm{T}}$,$j=1,2,\cdots,n$.

(2) 按行分块.

设在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行间引入虚线按行分块,为

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\\hdashline b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\hdashline\vdots&\vdots&&\vdots\\\hdashline b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行,$\boldsymbol{\beta}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})$,$i=1,2,\cdots,s$.

(3) 当 n 阶方阵形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&&\\&\ddots&\\&&\boldsymbol{A}_{ss}\end{pmatrix}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 称为分块对角矩阵,其中 $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(i=$