二十一世纪课程立体化系列教材

高等学校非数学类专业

线性代数讲义

主编 吴赣昌
瞿晓鸿
陈 怡

海南出版社

二十一世纪课程立体化系列教材

线性代数立体化教材之

线性代数讲义

海南出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数讲义/吴赣昌编．—海口：海南出版社，2005.2

ISBN 7-5443-1481-2

I. 线... II. 吴... III. 线性代数—高等学校—教材 IV. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009506 号

线性代数讲义

主　　编：吴赣昌　翟晓鸿　陈　怡
责任编辑：武　铠
出版发行：海南出版社
电　　话：0898—66778835　　邮政编码：570216
地　　址：海口市金盘开发区建设三横路 2 号
印　　刷：广东省佛山市汾江印刷厂有限公司
开　　本：850×1168 mm 1/32
印　　张：7.125　　字数：190 千
版　　次：2005 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 2 次印刷
书　　号：ISBN 7-5443-1481-2/O·3
定　　价：13.80 元

内 容 提 要

本书参照教育部颁发的高等学校本科非数学专业线性代数课程教学大纲和考研大纲编写，在教学内容和符号表示上都与这两类大纲相适应. 其内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型及线性空间和线性变换等知识.

本书的编写具有以下特点：(1) 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想；(2) 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出进一步的总结；(3) 充分考虑教学的需要，选编了题型较为丰富的例题，除精选部分例题放入本书外，其余放入了配套的教学（学习）系统光盘中，供师生选用. 此外，还在每小节后配有课堂练习，供教师教学选用.

线性代数立体化教材是在面向21世纪课程的教改实践中产生的，它在教育技术与信息技术相结合方面具有突出的特点，本书是线性代数立体化教材之讲义部分，与《线性代数多媒体学习系统》和《线性代数习题集》组成整套立体化教材，配合使用，互为补充. 内容涵盖了课堂教学、习题课教学、数学实验教学、自学辅导、综合提高等方面，形成教与学的有机结合.

本书可作为高等院校理工、经济、管理、农林及医学等专业的教材或参考书.

目　录

第一章　行列式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

定义 1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列，由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式记号中就是"**对角线法则**". 如图1-1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1-1

二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$(1.1) \times a_{22} - (1.2) \times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1.3}$$

$(1.2) \times a_{11} - (1.1) \times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则由方程组 (1.3)、(1.4) 可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}$$

于是，在行列式 $D \neq 0$ 的条件下，方程组 (1.1)、(1.2) 有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注: 从形式上看，这里分母 D 是由方程组 (1.1)、(1.2) 的系数所确定的二阶行列式（称为**系数行列式**），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式．本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性．请读者学习时注意比较．

例 1　解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$.

解　$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14,$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

三、三阶行列式

定义 2　记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠于正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”或“沙路法则”来表述之.

(1) 对角线法则

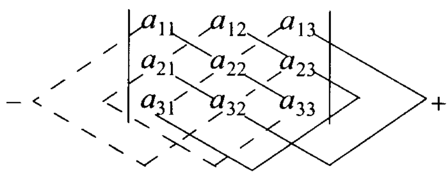

图 1-1-2

(2) 沙路法则

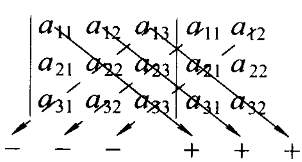

图 1-1-3

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 6+2\times 5\times(-1)+3\times 4\times 0 \\ -3\times 0\times(-1)-1\times 5\times 0-4\times 2\times 6 \\ =-10-48=-58.$$

例 3 求解方程

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 , \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4　解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3=-2 \\ 2x_1+\ x_2-3x_3=1 \\ -x_1+\ x_2-\ x_3=0 \end{cases}$$

解　注意到系数行列式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\qquad -1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1) \\ &=-5\neq0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

课堂练习

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，试给出 $D>0$ 的充分必要条件.

2. 求一个二次多项式 $f(x)$，使

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28$$

§1.2　n 阶行列式

一、排列与逆序

定义 1 由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 **n 级排列**（简称为**排列**）.

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，而 24315 是一个 5 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_t (t=1, 2, \cdots, n)$ 大的且排在 i_t 前面的数有共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

例 1 计算排列 32514 的逆序数.

解 因为 3 排在首位，故其逆序数为 0；

在 2 前面且比 2 大的数有一个，故其逆序的个数为 1；

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

将上述结果排成如下形式

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 类似例 1 的讨论，可排出下表：

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
t_i & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1
\end{array}$$

则所求逆序数为:

$$N(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k$, $4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2$, $4k+3$ 时，该排列是奇排列.

二、n 阶行列式的定义

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见:

1. 三阶行列式共有 $6=3!$ 项;

2. 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;

3. 每项的符号是: 当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 4　由 n^2 个元素 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**n阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号；是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

注：① n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的符号)各占一半；

② $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$(不算元素本身所带的符号)；

③ 一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，现考察不为零的项. a_{1j_1}取自第一行，但只有 $a_{14}\neq 0$，故只可能 $j_1=4$；同理可得

$$j_2=3,\ j_3=2,\ j_4=1.$$

即行列式中不为零的项只有

$$(-1)^{N(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,$$

所以
$$D=24.$$

注：一般地，可得到下列结果：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

例 3 中行列式，其非副对角线上元素全为 0，此类行列式可以直接求出结果. 特别地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，而对角线以下(上) 的元素全为 0 的行列式称为**上(下) 三角(形) 行列式**.

例 4 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0)$.

解　一般项为$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项. a_{nj_n}取自第 n 行，但只有 $a_{nn} \neq 0$，故只可能取 $j_n = n$；$a_{n-1\, j_{n-1}}$取自第 $n-1$行，只有 $a_{n-1\, n-1}$及$a_{n-1\, n}$不为零，因 a_{nn}取自第n 列，故$a_{n-1\, j_{n-1}}$不能取自第 n 列，从而 $j_{n-1} = n-1$；同理可得，

$$j_{n-2} = n-2,\ \cdots,\ j_1 = 1.$$

所以不为零的项只有

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

注：类似可得下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

对角行列式　$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

三、对换

为进一步研究 n 阶行列式的性质，先要讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

定义 5 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如，对换排列 21354 中元素 1 和 4 的位置后，得到排列 24351.

定理 1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然，$a_1\cdots a_l$，$b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：

当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n,$$

总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n,$$

所以这两个排列的奇偶性改变.

推论 1 奇排列变成自然顺序排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然顺序排列的对换次数为偶数.

证明　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然顺序排列是偶排列(逆序数为 0)，因此结论成立.

定理 2　n 个自然数($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证明　n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$.

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都作同一的对换，则由定理 1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p\leq q$，同理对每个偶排列都作同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q\leq p$，所以 $p=q$. 从而 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

定理 3　n 阶行列式也定义为

$$D=\sum(-1)^{S}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 S 为行标与列标排列的逆序数之和. 即

$$S=N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n).$$

证明　按行列式定义有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(\bar{j}_1\bar{j}_2\cdots\bar{j}_n)}a_{1\bar{j}_1}a_{2\bar{j}_2}\cdots a_{n\bar{j}_n}, \tag{2.1}$$

令

$$D_1=\sum(-1)^{S}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{2.2}$$

注意到交换 (2.2) 的一般项中两元素的位置，相当于同时进行一个行标的对换和一个列标的对换. 故交换位置后一般项的两下标排列逆序数之和的奇偶性保持不变. 即交换 (2.2) 的一般项中两元素的位置，其符号保持不变. 这样我们总可以经过有限次的位置交换，使其行标换为自然数顺序排列，即变为(2.1)的一般项，因此，D 的一般项也可以记为 (2.2) 的形式.

推论 2　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

例 5　在六阶行列式中，下列两项各应带什么符号

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；